

2008 年 10 月 21 日  
山田光太郎  
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

## 数学科指導法 II 講義資料 2

### お知らせ

- 別紙「本日の課題」に回答し、締切りまでに指定提出場所に提出してください。なお、指定の用紙以外での提出は認めません。
- 講義資料、提出用紙は web ページに pdf ファイルとしておいてあります。
- 前回までの提出物でのご意見・ご希望・自己 PR などは web ページ上で（個人が特定できない形で、コメントをつけて）公開しております。なお、今回は受講者が多いため、ご提出いただいた用紙にはコメントをつけていません。
- 前回課題のうち「要約」の欄にいくつかコメントが入っているかもしれませんが、山田の採点用メモですので、読めないかもしれません。ご容赦ください。なお、どうしても気になる方はお問い合わせ下さい。
- 前回課題のうち「質問」については、その回答をこの講義資料にて行っております。必ず目を通してください。
- 「質問」の評価基準は「面白い（興味深い）」です。なお、2 つ以上の質問をされた方は一番面白くないものの評価を得点とします。

### 授業に関する御意見

- 聞こえずらい。  
申し訳ありません。スピーカの場所を少し工夫しましょう。なお、箱崎に永く居るせいで山田は飛行機の音に鈍くなっています。聞こえないようでしたら、その場で指摘してください。
- 下の方の黒板が見えにくい。  
了解。もし見えにくいようでしたら、その場で指摘していただくと助かります。

## 2 (講義 2) 四元数

- 前回の補足: 内積と外積, オイラーの公式
- 複素数体の拡張
- 四元数とその行列表示

## 前回の講義の要約

複素数 高等学校では「 $i^2 = -1$  となる数  $i$  を考え  $x + iy$  ( $x, y$  は実数) の形の数を複素数という, と習う. これは次のようにして数学的に正当化できる:

- $R^2$  に  $(x, y)(X, Y) = (xX - yY, xY + yX)$  で積を定義すると, この積とベクトルの和によって  $R^2$  は体になる. これを複素数体といい  $C$  と書く. 特に  $(x, y)$  を  $x + iy$  と書けばこれを複素数とみなせる.
- 行列  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  を考え,  $xE + yJ$  ( $x, y \in R$ ) と複素数  $x + iy$  を対応させると, 行列の和・積と複素数の和・積が対応するから, このような行列全体の集合は  $C$  と同一視できる.

複素数全体の集合  $C$  では加減乗除の演算が行えるが, 体の演算に適合した大小関係は定義できない.

複素平面 複素数全体の集合  $C$  を上で述べたように座標平面  $R^2$  と同一視したとき, その座標平面を複素平面, 座標平面の横軸を実軸, 縦軸を虚軸という. 一般に, 複素数  $z = x + iy$  ( $x, y$  は実数) に対して

$$\bar{z} = x - iy, \quad \operatorname{Re} z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

をそれぞれ  $z$  の共役 (共軛) 複素数, 実部, 虚部, 絶対値という. さらに座標原点と点  $(x, y)$  を結ぶ線分が実軸の正の部分となす角を  $z$  の偏角といい,  $\arg z$  で表す. 絶対値と偏角を用いると 0 でない複素数  $z$  は  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$  ( $r = |z|, \theta = \arg z$ ) と表せる (複素数の極表示). 2 つの複素数  $z = re^{i\theta}$ ,  $w = Re^{i\Theta}$  の積は  $zw = rRe^{i(\theta+\Theta)}$ , 「積の絶対値は絶対値の積, 積の偏角は偏角の和」となる.

平面の直交変換 複素平面上の点  $z$  に対して  $e^{i\alpha}z$  ( $\alpha$  は実数) は, 点  $z$  を, 原点を中心として正の向きに角  $\alpha$  だけ回転した点である. 複素数を行列と同一視することにより, この対応は回転の一次変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ( $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ) となる. ここで  $T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$  とおくと, 2 次の直交行列はこれらのいずれかの形になる.  $R^2$  の線形変換でベクトルの大きさを変えないもの (等長変換) は直交行列で表されるものに限る. とくに  $T(\alpha)$  が表す線形変換は, 原点を通り実軸の正の部分と  $\alpha/2$  の角をなす直線に関する折り返しで, 複素数を用いて  $z \mapsto e^{i\alpha}\bar{z}$  と表すこともできる.

## 前回の補足

体の定義 この講義では深入りしないが、

定義 1 集合  $F$  に演算 “+” と “ $\cdot$ ” が定義されてる、すなわち写像

$$+ : F \times F \ni (x, y) \mapsto x + y \in F, \quad \cdot : F \times F \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in F$$

が定義されていて、次を満たすとき、 $F$  は体であるという。

- $F$  は + に関して可換群をなす。すなわち、
  - 任意の  $x, y, z \in F$  に対して  $(x + y) + z = x + (y + z)$  が成り立つ。
  - 任意の  $x, y \in F$  に対して  $x + y = y + x$  が成り立つ。
  - ある要素  $0 \in F$  が存在して、任意の  $x \in F$  に対して  $x + 0 = x$  が成り立つ。
  - 任意の  $x \in F$  に対してある要素  $-x \in F$  が存在して  $x + (-x) = 0$  が成り立つ。
- $F \setminus \{0\}$  は  $\cdot$  に関して群をなす。すなわち
  - 任意の  $x, y, z \in F$  に対して  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  が成り立つ。
  - ある要素  $1 \in F \setminus \{0\}$  が存在して、任意の  $x \in F$  に対して  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$  が成り立つ。
  - 任意の  $x \in F$  に対してある要素  $x^{-1} \in F$  が存在して  $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$  が成り立つ。
- いわゆる分配法則：
  - 任意の  $x, y, z \in F$  に対して  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ 。
  - 任意の  $x, y, z \in F$  に対して  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ 。

さらに、任意の  $x, y \in F$  に対して

$$(*) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

が成り立つとき、 $F$  は可換体であるという\*1。

例 有理数全体の集合  $Q$  は通常の加法と乗法で (可換) 体をなす。実数全体の集合  $R$ 、複素数全体の集合  $C$  も同様。

例 集合  $Q(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\} \subset R$  は  $R$  の加法、乗法を制限したものによって可換体をなす。

定義 2 集合  $F$  の各要素に対して関係 “ $<$ ” が定義されている、すなわち “ $x < y$ ” が真か偽かすれかに決められているとき、この関係 “ $<$ ” が順序関係であるとは、次が成り立つことである。

- 任意の  $x, y \in F$  に対して  $x < y, y < x, x = y$  のいずれかが成り立つ。
- $x < y$  かつ  $y < z$  ならば  $x < z$  が成り立つ。

定義 3 体  $F$  上の順序関係 “ $<$ ” が  $F$  の体構造に適合する、とは次が成り立つことである。

- 任意の  $x, y, z$  に対して  $x < y$  ならば  $x + z < y + z$ ,
- 任意の  $x, y, z$  に対して  $x < y, 0 < z$  ならば  $xz < yz$ 。

体構造に適合した順序が与えられている体のことを順序体という。

例 実数体  $R$  の通常的大小関係は、 $R$  の体構造に適合している。すなわち  $R$  は順序体である。

定理 複素数体  $C$  には、体構造に適合した順序関係が存在しない。

証明は講義でやった。

\*1 可換体のことを単に「体」、乗法の交換法則 (\*) を満たさない体のことを「斜体」と呼ぶこともある。

## 質問と回答

質問:  $a + ib = 0 \Rightarrow a = b = 0$  を示すにはどうすればいいですか.  $a + ib \leftrightarrow aE + bJ$  を考えればできるかと思ったんですけど  $0 \leftrightarrow$  零行列 が自明でないので結局同じことでした.  $a \neq 0$  かつ  $b = 0$ ,  $a = 0$  かつ  $b \neq 0$  のときは大丈夫なんですけど  $a \neq 0, b \neq 0$  のときが分かりません. ついでに  $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0 (a, b \in \mathbf{R})$  も分かりません.

お答え: 「ついでに」以下は間違い. 実際  $a = -\sqrt{2}, b = 1$  とすればよい. 前半は, 高等学校流にいけば「複素数の相等」の定義が必要.  $\mathbf{R}^2$  に体構造を入れる, という立場に立てば,  $1$  と  $i$  が一次独立なので大丈夫.

質問: 「2乗して  $-1$  になる数  $i$  は存在するか」という質問にたいして「あったってよいでしょ」という答えは答えになっていない気がするので, 結局どっちですか.

お答え: 「あったってよい」が答え.  $i$  という数を考えて論理的に矛盾のない体系が作れるならば(作れているわけですが)「ある」と考えるのならば「ある」. そうやって作った体系がなんらかの現象を表しているのなら「ある」, と考えるのならば「ある」. その現象を解析することで  $i$  が役にたつならば「ある」, と考えるなら「ある」. そういうのがいやな人には「ない」かもしれない.

質問: 黒板にて  $z\bar{z} = x^2 + y^2 > 0$  (if  $z = 0 = 0 + 0i$ ) とあったのですが,  $z \neq 0$  の間違いでは?

お答え: Thanks.

質問:  $C$  には, 和・積に対して“うまい法則”が成り立つとあったのですが, “うまい法則”というのが定性的で何をさしているのかわかりませんでした.

質問:  $C$  には和・積に対して“うまい法則”が成り立つとありましたが, “うまい法則”ってどんなものなのですか. いまいちよくわかりませんでした.

お答え: 口頭で補足説明したのですが: 普通の演算法則, すなわち, 交換法則とか結合法則とか... . きちんと述べると「可換体」の公理. 本日の「補足」参照.

質問: 授業の板書では  $\mathbf{R}^2$  をベクトル空間と仮定してから積を定義して  $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$  は体をなすとしていたのですが, 仮定をベクトル空間とまでせずとも通常の意味の加法群とうい仮定で十分です.

お答え: その通り. ただし  $\mathbf{R}$  上の「次元」に言及したかったのでベクトル空間としました.

質問: 体をなす(可換体)がはっきりと分かりません.  $(x, y)(X, Y) = (xX - yY, xY + yX)$  と定義することが結果的にうまい法則が成り立ちますが, なぜこのように定義するのか分かりません.

お答え: 「後付け」の定義です. ナイーブに(高等学校流に)複素数を考えて, その積の公式を作っておきます:  $(x + iy)(X + iY) = (xX - yY) + i(xY + yX)$ . それをもとに(仮想的な数, なんていわないよようにして)数学的にきちんと  $C$  を定義するためにご質問のようなことをしました.

質問: ベクトル空間での乗法(原文ママ)を  $(x, y)(X, Y) = (xX - yY, xY + yX)$  と定義したのは  $1 = (1, 0)$ ,  $i = (0, 1)$  で  $i \cdot i = -1$  とするためだけですか.

お答え: そうです.

質問: 積を定義したあとで  $z = (x, y)$ ,  $w = (X, Y)$ ,  $zw = (xX - yY, xY + yX)$  で「 $zw$  があたかもひとつの数のように見える」の意味がわかりません.

お答え:  $z$  や  $w$  を一つの数,  $zw$  も一つの数, と「見なさい」ということだと思って下さい.

質問: どちらも複素数の集合を作っていく(定義していく)時に疑問を感じたものなのですが, まず(1) “ $z = (x, y)$ ,  $w = (X, Y)$ ,  $zw = \dots$  とするとあたかもひとつの数のように見える” というところなの

ですが、この表現の意味がイマイチわかりませんでした。あとその少し後に (2) “ $i \times i = -1$ ” とあったのですが、定義した乗法から計算すると  $i \times i = \dots = (-1, 0)$  で座標になるのですが、 $-1 = (-1, 0)$  なのですか？自分の映し（原文ママ）間違いかもしれませんがよろしくお願ひ申し上げます。

お答え： (1) は上の質問の回答参照 (2) は（こちらの書き間違いかもしれませんが） $i \times i = -1$  です。

質問：  $zw$  の作図はこれで正しいでしょうか？（図省略）

お答え： 正しいです。

質問： 今回の授業では complex numbers の解釈を 2 通り紹介されましたが、他の解釈の仕方はないのでしょうか。

質問： 複素数のまた違った解釈は存在しますか？

お答え： 「解釈」ですから、「ない」という回答はありません。

質問：  $C$  と  $R^2$  の違いは何ですか。

お答え： 積を考えるか考えないかです。

質問： “体をなす” とは具体的にどのようなことなのですか。

お答え： 本日の「補足」参照。

質問： 行列  $E$  や  $J$  を  $1, i$  とみることができるといものを授業でやりましたが、行列以外にも対応づけることができますか。（関数や集合を使って対応させるなど。）

お答え： いくらでも作れるのでは？作ってご覧ください。

質問： 「複素数」1 つをとっても定義の方法がたくさんあることを知りましたが数学の歴史的に見て、最も初めに用いられた複素数の定義はどのような方法ですか？

お答え： 申し訳ありませんがよく知りません。カルダノ（16 世紀）が 3 次方程式を解く際に負の数の平方根を使っているようですが、系統的に定義されたものではないようです。一般に「系統的な定義」は後付けであることが多いのですが。

質問：  $C$  のもうひとつの解釈として

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\} \quad \text{と} \text{思} \text{っ} \text{て} \text{よ} \text{い}$$

とその辺の説明があまり理解できませんでした。

質問：  $C$  のもうひとつの解釈として

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

とし、 $z = xE + yJ \leftrightarrow x + iy = z$ ,  $w = XE + YJ \leftrightarrow X + iY = w$ , と対応づけるとこの対応は全単射になるのでしょうか？

お答え： そうです。簡単に確かめることができるので確かめなさい。

質問：  $C$  のもうひとつの解釈として

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

という解釈は理解できたのですが、

$$(**) \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\} \quad \text{と} \text{思} \text{っ} \text{て} \text{よ} \text{い}$$

ということの意味がよく理解できません。 $C = x + iy$  の行列としての書き方ということでしょうか？

お答え： 区別するために，ご質問の (\*\*\*) の集合を  $\tilde{C}$ ，普通の複素数全体の集合を  $C$  と書きましょう．  
写像

$$\varphi: C \ni x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \tilde{C}$$

は全単射 (1 対 1 上への写像) で，

$$\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w), \quad \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w)$$

がすべての  $z, w \in C$  に対して成り立つ．ただし，左辺の和，積は  $C$  の和や積，右辺の和，積は行列の和，積である．すなわち  $C$  と  $\tilde{C}$  は演算まで含め 1 対 1 に対応している．したがって体という構造のみを考えているかぎり  $C$  と  $\tilde{C}$  は「同じもの」と思えます．

これは同一視，という数学の重要な考え方です．慣れてください．

質問：  $C$  の解釈として  $E = \text{略}, J = \text{略}$  としたとき (1)  $E^{-1} = E$  は自明として  $J^{-1}$  があるかどうか  $\Leftrightarrow$  商が計算しうるのか (2)  $EJ = JE$  (可換となるか) の 2 点を調べる必要があるのでは無いでしょうか．

お答え： 調べて下さい．ただ，これらは上の回答の対応  $\varphi$  が体の同型を与えているということから自動的にできます．

質問： 複素数全体の集合は 2 通りの表し方がありますが，これは本当に一致するのですか？また，他の表し方も存在するのですか？

質問： “2 乗して  $-1$  になる数  $i$  を考えて  $a + ib$  ( $a, b \in R$ ) という形の数” が複素数だった．一方で  $R^2$ : ベクトル空間を考え，そこからも複素数を定義できると授業ではあった．2 つの定義があるわけですが，この 2 つの定義は同値なのですか？仮に，一方ともう一方の間で違う複素数を表すということはないのですか？

お答え： 上の質問と回答参照．

質問： たとえば  $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  も  $F^2 = -E$  となりますが，これはなぜ講義で紹介されなかったのですか？ (理由はだいたい分かるが，先生がどのように返答するか聞かせてください： $F \leftrightarrow e^{-i\alpha}$  逆回転)

お答え： だいたい分かる，というところに書いてあることが理解できないので... ひとつ上の質問の集合  $\tilde{C}$  と，もう一つ  $\hat{C} = \{xE + yF \mid x, y \in R\}$  を考えましょう．写像

$$\psi: \tilde{C} \ni xE + yJ \mapsto xE + yF \in \hat{C}$$

を考えるとこれは，演算まで含めた 1 対 1 対応を与えています．したがって  $\tilde{C}$  を考えることと  $\hat{C}$  を考えることは (体として考えている限りは) 同じで区別できません．というわけでどちらか一方考えればよいこととなります．そこで，よく使う方を紹介したわけです．

質問： “ $R^2$  が  $+, \times$  で体をなす (可換体)” と書いてありました．代数  $A$  で，体は可換な斜体と習いました．ここでいう体とは非可換も含めているということになりますが，体の定義の仕方には流儀があるのですか？

質問： 以前，可換な斜体を体とよぶ，と習ったのですが，今回の授業で扱った体は私にならったものとは定義が異なりますか？

お答え： 「補足」の脚注参照．

質問： この複素平面の虚軸について，虚軸とはいうものの  $z = x + iy$  の  $x, y$  は実数なので，虚軸は上にいくにしたがって大きな値をとることができる (大小関係が入る) のですよ．

お答え： そうですね．虚軸に限れば大小関係を入れられます．ただし純虚数全体の集合は体にはなりませんので，順序体ができるわけではありません．また  $i$  を  $-i$  に置き換えても同型な体ができるので，虚軸の上下は絶対的な意味があるわけではないので，大抵の場合は順序を考えません．

質問：  $i$  に対して大小関係を考えることができない，といった内容の話がありましたが， $i$  が 0 より大きい，小さいなどを例にとって考えると確かに矛盾が起こってしまいますが，それは虚数と実数を比較するからで，それぞれの母体が異なるから比較できなくて当然だと思いますが，では例えば虚数同士の比較だったら大小は考えられるのでしょうか．

お答え： 母体もなにも「 $C$ 」には体構造に適合した順序はいらないことを示したのだから母体は  $C$  全体．その中で比較しているだけ．虚数同士に限るとしても  $1-2i$  と  $-2+i$  の大小なんて比較できないと思います．

質問： 行列として複素数を定義した時と，ベクトルとして複素数を定義した時に互いに不都合がでたり，もしくはこういう場合にはこの方が都合が良いなどの違いはありますか？

質問： 複素数を  $x+iy$  のように表すことと  $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  と表すことの互いにどんな利点があるんですか．

質問： 複素数を  $R^2$  や行列として考えたときの具体的な利点としてどのようなものがあるのですか？

お答え： 体としては同型ですから，加減乗除の計算をしているだけなら区別できません．しかし，記述が便利か不便かは文脈によりますね．有理数を「分数」で表すのと「小数」で表すのでは，同じものを表していても文脈によって使いやすさが違います．それと同様です．例を探してみてください．

質問： 複素数には和と積が定義でき，差はベクトルの向きを逆にしたものの和として扱うことは授業で言われていたのですが，商に関してはどうすれば良いのでしょうか．

質問： 複素数の積  $z \cdot w$  は講義で扱われたが，商はどうなるんですか．

お答え： 代数的には高等学校で習った通り．図形的に見るなら，極座標を考えよ： $z = re^{i\theta}$ ,  $w = Re^{i\Theta}$  なら  $z/w = (r/R)e^{i(\theta-\Theta)}$ ．

質問： 複素数の極表示のときに， $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  と書くことにする，として以降， $e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$   $\Rightarrow$  偏角  $\theta + \varphi$  のように計算していきますが，割り算のときも  $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$  は偏角が  $\theta - \varphi$  になるのでしょうか？

お答え： 簡単に確かめられるはず．やっぴごらん．

質問：  $z$  の偏角  $\arg z$  について， $2\pi$  の整数倍の不定性をもつのは気持ち悪いと思いました． $0 \leq \arg z < 2\pi$  となるように  $z$  の偏角をとって不定性をなくしてはいけないのですか？

お答え： そうすると「積の偏角は偏角の和」ということがいっずらくなりますよね．もう一つ，この不定性が「多価関数」という複素変数の関数に特徴的な現象と関わっているので，不定性があつたほうが数学的にはうれしいのです．

質問： 偏角  $\arg z = \theta$  について  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  といった範囲の指示がありませんでしたが，範囲はきめておかなくてもよいのですか？

お答え： 決めてもよいのですが，講義では「 $2\pi$  の整数倍の不定性がある」としました．この不定性は結構意味があると思うので．ちなみに，ご質問のように範囲指定をしても偏角は一意的に決まりませんよね．

質問： 「 $2\pi$  の不定性」というのは「 $\theta$  の範囲を  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  で考える」ということですか？答えるとき「 $\theta = \alpha + 2n\pi$ 」と答えるということですか？

お答え： どちらも違うように思いますが，前者ではありません．後者のほうが近いです．「偏角は  $2\pi$  の不定性を除いて一通りに決まる」という使い方をします．意味は想像できますか？

質問：  $z = 0$  の場合，偏角  $\arg z$  はどう定義するんですか？

質問：  $0 = 0 + 0i$  は極座標表示できるのでしょうか？絶対値が 0 になるのはわかる気がしますが，偏角が定められないと考えます．

お答え： 偏角は定義しません．

質問： 先生の話の聞いていると複素数が 2 元数なのは  $C$  が  $R^2$  と同一視でき， $R^2$  の次元が 2 だからなのかなあという印象を受けました．拡張して 4 元数の集合は  $R^4$  (次元 4)) と同一視することができですか．

お答え： 前半：印象でなくそういったつもり．後半：そうです．

質問： 2 元数である複素数が  $R^2$  と同じと見れるならば，4 元数は  $R^4$  と同じと見れるのですか．

質問： 4 元数の集合は  $R^4$  と同一視できるもののことですか．

質問：  $C$  は 2 元数と見ることがきるが，では 4 元数は  $C^2$  に和や積をいれたものになるのですか？

お答え： はい．

質問： 複素数は  $1 = (1, 0)$  と  $i = (0, 1)$  の 2 つの素でできている 2 元数であるとおっしゃられましたが，4 元数の 4 つの素の中にはこの複素数の 2 つの素は入っているのですか？

お答え： はい．

質問： 複素数は 1 と  $i$  という 2 つの基底をもったベクトル空間で  $R^2$  と同一視できるから 2 元数ということ考えると，1 元数というものが存在するならば，それは  $R$  同一視できて，基底を 1 つもつベクトル空間ということですか？さらに 4 元数というものは  $R^4$  と同一視でき，基底を 4 つもつベクトル空間になるのでしょうか？

お答え： だいたいその通りですが (1) 1 元数とはすなわち実数のことです．(2) 「基底」の数え方が間違っています．基底は「ベクトルの組」全体で一つです．たとえば

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{は } R^3 \text{ の基底 (a basis of } R^3 \text{)}$$

です．不定冠詞 “a” に注意．また

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

は  $R^3$  の二組の基底 (two bases of  $R^3$ ) です (不規則な複数形に注意)．ご質問の意図を想像すると「基底を 4 つもつベクトル空間」ではなく「4 つのベクトルからなる基底をもつベクトル空間」でしょうね．そのことを「4 次元ベクトル空間」といいますが．

質問： いま  $R^2$  に掛け算の構造を入れて  $R$  と同じ計算の構造にすることができました．では  $R^3, R^4, R^5 \dots$  にもなんとかして  $R$  と同じ計算の構造を入れられませんか？

お答え： 本日の講義内容です． $R^4$  はなんとか大丈夫，それ以外は「だめ」．

質問：  $R^2$  と  $C$  が同一視できるなら， $R^n$  と同一視できるような集合を作ることできますか？

お答え： ご質問の意味が分かりません． $R^n$  それ自体が集合ですが．

質問： うまい大小関係というのはある元に対して  $a > 0$  or  $a < 0$  が成立することなのですか？他の元との順序は考えなくてよいのですか？

お答え： 「前回の補足」参照．今回の講義内容の場合，0 と比較するだけで矛盾がでてしまい  $C$  に順序体の構造が「入らない」ことがわかってしまうので，そこから先，他の数との比較をする意味がなくなって



しまいます。

質問： 授業で扱われた「 $C$ には“うまい順序”が入らない」の「理由」に関して  $i > 0$  ならば  $i$  は正だから  $i^2 = -1$  も正でなければいけないという証明になっていましたが、実数上では確かに正  $\times$  正 = 正が成り立つと思いますが、 $C$  上で作られた順序に対しても、その性質が引き継がれているとは限らないため、証明としては何も示せていないように思えますが、どうなのでしょう？

お答え： 前提をまったく聞いていませんね。「うまい順序」とは「高等学校で習う不等式の性質」のこと、すなわち「不等式の両辺に正の数をかけても同じ不等式が成り立つ...」ということ、とすると、それを満たすようには順序が入られない、と言ったわけです。

質問：  $C$  にはうまい順序が入らないと言われましたが、うまくはなくても授業で言った例の他に白いものはありますか？

お答え： 見つかったら教えてください。

質問： 実数の定義として、数直線上にめもれる数で、(実数) = (有理数)  $\cup$  (無理数) ではないということなんですが、教科書などには(山田注: 図を写すのが面倒くさいので略; 「実数」から二つに分岐がでていて「有理数」「無理数」とわかれている)と書かれているのをよく見かけるので、(実数) = (有理数)  $\cup$  (無理数) ではないというのがいまち理解できません。

お答え： 記号はおかしいですが、等式 (実数) = (有理数)  $\cup$  (無理数) は正しいです。しかし「実数とは何か」という問いに「有理数と無理数を合わせたもの」と答えるのはいかなものか、とうことです。なぜなら「無理数とは何か」という問いには「有理数でない実数」と答えるしかないからです。「男とは何か：人間で女でない方」「女とは何か：人間で男でない方」では男女の定義ができませんよね。

質問： 無理数の定義は「有理数でない実数」以外の定義はないのですか？

お答え： 「循環しない無限小数で表される実数」というのもあったような気がしますが「無限小数が実数を表すこと」は結構難しいことですし、小数が循環するかどうかを判定するのもやさしくありませんから「有理数でない実数」というのがもっとも自然だと思います。

質問： 実数は有理数と無理数に分かれますが、循環すれば有理数にできます。しかし無限小数のその“無限”のさじ加減や何を持って循環しないと判断しているのでしょうか？

お答え： 「循環すれば有理数にできます」はまずくって「循環小数は有理数です」というべき。さじ加減なんにも無限は無限です。循環節の桁数がいくら大きくても循環小数です。

質問： 実数の説明で「数直線上にめもれる数」と言われて「じゃあ無限小数はどうする？」とあたかも数直線上にめもれないというニュアンスで言われましたが、無限小数は本当に数直線上にめもれないんですか？

お答え： 「めもれる」という語が曖昧なので定義にはなっていませんね。たとえば、無限小数がめもれるか、っていわれるとちょっと微妙ですね。というような文脈だったと思いますが、有理数も無理数もナイーブに数直線上にめもれる、と思って「実数」を理解しようということです(高校生向きに、ね)。

質問： 「共役」という漢字は「共軛」という漢字だったそうですが、この言葉の日本語としての意味はあるのですか？それとも英語を日本語に訳すときに無理やり作った当て字なのですか？

お答え： 辞書を引くと解ります：「共軛」は軛(くびき)をともにして車を引く、の意。「共役」は書き替え字(広辞苑)。

質問： 共役複素数とは何ですか。ただ虚部の符号を変えただけですか。

お答え： そうです。

質問：  $z$  の共役である  $\bar{z}$  は複素平面で図形的にみれば実軸に対する対称変換になると思います。では虚軸に

対する対称変換に名前はないのですか？

お答え： ないですねえ．強いて言えば「共役の  $i$  倍」

質問：（山田注：絵がいろいろ書いてあってよくわからなかったのですが，折り返しについて） $x$  軸に対する折り返しを考えるため複素数で表すことはできませんよね．

お答え： 実軸に関する折り返しは  $z \mapsto \bar{z}$ ．

質問： 複素数には大小関係がないのに，絶対値をとると三角不等式が成り立ちます．どうしてですか？

お答え： なにが疑問でしょう．複素数の絶対値は実数ですよ．

質問： 回転の 1 次変換の実数倍が，虚数を表す極表示になっているのは为什么呢？

お答え： 「複素数の極表示」ですね．複素数の積の図形的な意味を考えれば，そうですね．

質問： 複素数の積は回転の一次変換と似ていますが，これは  $C$  が 2 次の正方行列で表せることと関係があるのですか？

お答え： 関係あります．

質問： 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

の形しかないのですか？

お答え： ないのです．本当に高等学校程度の問題なのでご自分で証明をつけてください．

質問： 等長変換は，回転の一次変換と直線に対する対称移動の変換以外にないのですか？

お答え：  $R^2$  の，原点を原点に写す等長変換はこれらだけです．3 年生ですね．幾何学 B の演習でやりませんでしたっけ．

質問：  $i$  に大小関係が定められないのであるなら， $i$  について足したり引いたりすることに意味があるんですか．

お答え： 足したり，引いたり，というのは大小関係と関係あるんですか？

質問：  $C$  は大小関係が成り立たないのに和や積に対して“うまい法則”が成り立つのはなぜですか？

お答え： 講義で述べたように「うまい法則」とは体の性質ということで良いですね．とすると「のに」の意味が分かりません．

質問：  $\sqrt{-1}$  が  $i$  で複素数として定義できるのなら， $\log(-1)$  も何らかの方法で数として表すことはできないのですか？

お答え： 複素解析の教科書に答えが書いてあります．さがしてごらん．多分  $(2n+1)\pi i$ ． $n$  は整数で，これだけの不定性があります．

質問：  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$  で， $e$  を複素数  $i\theta$  乗としているのが，感覚的によくわかりません．どういうことですか．

お答え： ここでは  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を  $e^{i\theta}$  の「定義」としてしています（と説明しました）．だから，そういうこと．無理に感覚的に解らなくても大丈夫です．といいますか，たくさん使っているうちに感覚的に解ってきます．その前に「感覚的にわからないので理解できない」というのはわがままだと思います．

質問：  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  という定義をどのようにして考え付いたのか知りたいです．

お答え： 自分が考え付いたのではないので，答えられません．が高等学校で学ぶ「指数の拡張」（有理数指数まで？）の延長上で考えてごらん下さい．

質問：「 $e^{i\pi} + 1 = 0$  の神秘的なところ」は  $e$ （自然対数の底）を  $i$ （虚数単位） $\times \pi$ （円周率；無理数）なのに，実数 1 との和が 0 になってしまうことだと思ったのですが，実際どこが神秘的なのですか？

お答え： 神秘的だとは思いません。

質問：  $e^{i\alpha}$  のように  $e^x$  の部分に  $i$  を代入しても問題ないのはなぜですか？

お答え： 問題が起きないように指数関数の定義を拡張したからです。

質問：  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  指数が虚数!? しかも  $e$ ?  $e$  じゃなくて他の定数でもよさそうですが...

【調査結果】テイラー展開を用いる：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$x = i\theta$  を代入すれば明らか。

お答え： 質問の意味が不明ですねえ。ちなみに「調査結果」の「明らか」もおかしいです。1年生の微積分でならった「テイラー展開の公式」は実関数だったわけで  $e^x, \cos x$  などの  $x$  を虚数にまで拡張することは含まれていませんでした。そこはそれ、うまくいくのですが、そのためにはたくさんの言い訳が必要です。

質問：  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を満たすように  $e^{i\theta}$  を他で定義することはできますか？ ( $\sin \theta$  や  $\cos \theta$  の展開を使えば可能ですか？)

お答え： 展開の意味がわかりませんが、複素関数として

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

を定義すればよいですね (右辺は収束半径無限大のべき級数ですからこれで well-defined)。

質問：  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  という表記はとても使いやすいですが、なぜこれを定義することになったのでしょうか？これがなくても複素数  $z$  を  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  と表示できて十分わかりやすいと思えました。実在する  $e$  という数の指数が虚数であるのは不思議な気がします。

質問：  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  というように右辺・表される (原文ママ) はなぜですか。とくに何故  $e$  なのでしょう。

お答え： 実関数  $f(x) = e^x$  の定義域を複素数まで「拡張」することを考えましょう。「指数の拡張」ですね。大学2年生くらいで習う専門用語を用いれば、「解析関数として拡張する方法  $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$  のただ一通りしかないとわかります (複素解析で学ぶ一致の定理を用いる)。というわけで、気持ち悪がらないでください。さらに言えば  $e^{i\theta}$  は指数法則を満たす：“ $e^{i(\theta+\Theta)} = e^{i\theta} e^{i\Theta}$ ” ので三角関数の加法定理が覚えやすい、という副作用もあります。

質問： なぜ  $e^x$  と  $\cos x + i \sin x$  は  $e^x$  と  $\cos x, \sin x$  で個別に考えると全く別物なのに  $e^x = \cos x + i \sin x$  (原文ママ) と書けるのですか。

お答え： そうは書けません。

質問： 複素数に新たな軸を付け足し、 $R^3$  のような空間にすることは可能ですか？何を付け足したらよいのか見当もつきませんが。

お答え： 単に  $R^3$  を作りたいなら直積  $C \times R$  を考えれば良い。

質問： 今回の講義で複素数は点の回転を表すと学びました。そして四元数とは空間の回転を表すものらしいとプリントを見て思いました。では、なぜ平面の回転を表す“三元数”のようなものは考えないのでしょうか。そんなの考えても特におもしろくなく、便利ではないからなのでしょう。

お答え：  $R^3$  には体の構造を入れることができない、ということが証明できてしまうからです。

質問：  $0^0$  は不定形というのが興味深かったです。ところで“不定形”というのは文字通り“定まらない”なので“存在するけどどんな値になるかわからない”ととらえていいのでしょうか。それとも“そもそも

そんなもの存在しない” ととらえるべきなのでしょう。たとえば  $0^0 = x$  として両辺に 0 をかけると  $0^1 = 0 \times x$  となって  $x$  はどんな数でも成り立つので前者のような気がするのですが。

お答え：「両辺に 0 をかけると」以下の式がなぜでてくるのか分かりません。不定形の意味は次のように説明しました：

$\lim_{x \rightarrow a} X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} Y(x) = 0$  となる関数  $X, Y$  をとったときに、極限值  $\lim_{x \rightarrow a} X^Y$  が ( $X, Y$  のとりかたにより) 色々な値になりうる。

質問： 高校生のとある方に「 $0^0 = 1$  はどうして？」と言われたらどのように解答をすればいいですか？例えば (以下略)

お答え： 授業でやりました。「 $0^0$  は 1 ではありません。不定形です」

質問：  $0^0$  について、授業では 1 と言っていたが、実際には 0 になるか 1 になるか、あるいは他の数になるか、定まっていなかった (本によると) 私が高校のときも  $0^0$  をどう考えればいいのかわからなかった。このように値がはっきりしていないものをどのように生徒に説明すればよいのだろうか。

お答え： 説明するまえに授業をきちんと聞いてください。 $0^0$  は 1 である、なんて言っていない。不定形です。ただし、ある状況では (どういう状況だったかは思い出さず) 1 と決めると便利なこともある。といいましたね。ちなみに  $0/0$  も不定形ですが、微分の定義は  $0/0$  そのものですね。そういうものをどのように教わったか、よく考えてご覧なさい。

質問：  $0^0$  という書き方はまずくないのですか。 ( $X^Y (X \rightarrow 0, Y \rightarrow 0)$  ) とも言われていたのですが、 $0^0$  と黒板に書かれていたので)

お答え： まずいですよね。「 $0/0$  の形の不定形の極限」「 $\infty - \infty$  の形の不定形の極限」というように記号的に「 $0^0$  の不定形の極限」というように使うものだと思います。

質問：  $z = re^{i\theta}, w = Re^{i\theta'}$  のとき、 $|zw| = rR$  なんですけど、例えば 1 袋にりんごが 3 コ入っていて、4 袋買えばりんごは 3 コ  $\times$  4 袋 = 12 コである。(小学校の頃、答えの単位を先に書くように習ったので、4 袋  $\times$  3 コ = 12 袋になってしまう)。そこで  $rR$  に話を戻して、座標の 1 目盛を 1cm とすれば、 $r \times R = r\text{cm} \times R\text{cm} = rR\text{cm}^2$  で面積のことになるはずで、一方  $zw = rRe^{i(\theta+\theta')}$  の  $e^{i(\theta+\theta')}$  の部分は  $x$  軸から反時計まわりに  $\theta + \theta'$  回転させることを意味していて、 $rR$  の部分は原点からの距離だと思えます。つまり  $rR$  の単位は cm だとうれいんですけど左のことから  $rR$  の単位は  $\text{cm}^2$  なんですよ。ここのつながりがよくわかりません。

お答え： この質問は  $1/4$  の長さにできると思いますが、まず、りんごの例：掛け算の式が間違っています。  $3\text{コ}/\text{袋} \times 4\text{袋} = 12\text{コ}$  です。長さの積が長さで解釈できない、ということでしたら、複素数まで話を持ってこなくても、2 次関数のグラフが描けなくなりますね。 $x^2$  と  $x$  は単位が異なるので足せません。ということの「言い訳」というか「理由付け」はデカルトがやっています。「方法序説」を見てください。

質問： 実数から複素数に広げることによってどのような利点がありますか。

お答え： 任意の二次方程式が根をもつ。力学の時間に学んだ減衰振動の方程式を特には複素数があると便利。交流理論では複素数を使うのが普通。「解析関数」は複素数を定義域と考えるのが自然。それから... 数学としては「その方がおもしろいから」。

質問：「複素数は役に立つか？」と尋ねられても言い返せるとおっしゃっていましたが、「四元数は役に立つか？」と尋ねられたらどう答えますか？

お答え： 授業中にいいませんでした。3DCG。

質問： 実数解のない方程式があってもよいと考えるのは、微分方程式で困るといわれましたがなぜですか。

お答え：「実数解の」ではなく「解の」ですね。例えば、力学の時間に学んだ減衰振動の方程式を思い出し

て下さい。

質問： 有理数より，実数が“細かい数”，実数より複素数が“細かい数”だと決めると，複素数より細かい数はあるのですか。

お答え： 「細かい数」という言葉の意味が分かりません。

質問： 講義中，様々な言葉の具体的な意味（複素数は二つの要素から出来ている，というような）が説明されていましたが， $\arg z$ ， $z$  の偏角についても説明していただきたいと思います。何故「角」でなく「偏角」という名前が付いているのでしょうか？

お答え： 知りません。たぶん「向き付けられた角」の意味ではないでしょうか。

質問： 関数は昔「函数」と書いたと言われましたが，なぜ“函”なのですか。中学生のとき関数はブラックボックスだと教わりました。ボックス＝箱（函）？何か関係があるのでしょうか。

【調査結果】中国が数学を輸入したとき function（関数）の発音と似ていたため函（カン）という漢字を当てたという説があります。とくに意味はないそうです。

お答え： ピンインで書くと“hán”ですね。ちなみに「関」は“guān”なので，音が違います。「関数」となっちゃうと実は意味不明です。

質問： 複素平面（Gauss-Argand）と書いてありましたが，なぜ Gauss-Argand と書いてあるのですか？

お答え： この人たちが考えたと言われているからです。

質問： 授業中に  $\pi$ （円周率）のことを“ルドルフ数”とおっしゃいましたが，他にも（ $e$  以外）そんな人の名がはいたものはあるのですか？

お答え： いろいろとあるのでは？オイラー数ってやつはどうでしょう。

質問： 最初の質問が数学のことでなく国語のことで申し訳ありません。よく「てん（点なのですが，下が「れっか」でなく「大」のやつ）」という漢字を見ます。これは略字なんですか？正式なものなんですか？

お答え： 残念ながら知りません。だれか教えてください。

質問：  $x = X + iY = Re^{i\Theta}$  と定められましたが「 $\Theta$ 」は何と読むのですか。

お答え： ギリシア文字“ $\theta$ ”の大文字。授業で説明したはず。

質問： 加法定理の証明 3 つのうち 1 つは（略：座標を使うもの，高等学校の教科書にある），もう一つはオイラーの公式をつかって（略）の 2 つはこれで良いと思ったのですが，もう 1 つがわかりません。ヒントか何かいただけないでしょうか。

お答え： オイラーの公式を使う証明は「指数関数の定義」に何を使ったのかで証明になったりならなかったりしますね。 $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$  を定義にしてしまうと，指数法則が三角関数の加法定理から導かれることになるので。他の証明：(1) 初等幾何的な証明。三角比の定義だけを用いる。ただし鋭角の範囲でしかできない。(2) 円に内接する四角形とトレミーの定理を使う。(3) 内積の公式を用いる (4) 回転の合成 (5)  $\cos$ ,  $\sin$  を微分方程式の解として定義するならばそれを用いて (6) テイラー展開（面倒くさい）...

質問： 複素平面というのは何故定義されたのでしょうか？複素数の存在を認め，計算に用いたりするだけでなく，平面上に表さなければならなかった理由などはあるのですか？ $e^{i\theta}$  の定義や  $C$  を行列で表示するなど性質がいいことは分かるのですが，いまいちピンときません。

お答え： べつにピンとこなくても使いこなせばいいんですが。ただ，「虚数がたんなる想像上の数ではない」と人々が思うためには重要な役割を果たしたと思われる。

質問： 複素数平面（原文ママ）でグラフが 2 次関数みたいな曲線を描いたらおもしろくないですか？

お答え： 意味がわかりません。やって見せてください。

質問：  $z = x + iy$  について  $x, y$  は実数であるので、これらの複素数と関数（みたいなもの）を定義することはできますか？平面でいう直線のようなものなどはできるのでしょうか。

お答え： ご質問の意味がわかりません。こちらから質問： $z + 2\bar{z} = 1$  となる複素平面上の点  $z$  の集まりはどんな図形でしょう。

質問： 実数と複素数の入り混じった関数は定義できるのか？出来ないのか？（グラフを書いたり）もし定義できるとしたら、その連続性や微積分を考えることはできるのか？

【注釈】実数と複素数の入り交じった関数 = 複素数であるから定義は普通にできるのですが、高校生の立場になって考えると、複素数関数のグラフを書いたりすることは出来ないと思ったので「質問」としました。

お答え： いくら高校生の立場であっても「関数」と「グラフ」をそこまで密着させるのは疑問です。グラフでかけないものは関数ではないのですか？そんなことは中学校の教科書にも高等学校の教科書にもどこにも書いてありません。むしろ高等学校では「関数」をグラフの呪縛から開放すべきだと思います。

質問： 二次関数、3次関数のグラフのように複素数関数（？）のようなもののグラフは書けるのか？

お答え： グラフの定義、書けるの定義による。

質問： 実数は“Real numbers”というのになぜスカラ（実数）倍というのか？

お答え： 「スカラ」というときには実数でないこともあるからです。線形代数では、数の範囲を「実数全体」と思ったり「複素数全体」と思ったりします。この「数の範囲」のことを「係数体」とよび、その要素のことをスカラとよぶのです。したがって、たとえば  $C^n$  の「スカラ倍」といったら、普通は複素数倍を考えます。

質問： 複素数の積の図形的な意味を考える際に、 $z = re^{i\theta}$  と  $w = Re^{i\Theta}$  と2つの複素数を用い、 $zw = rRe^{i(\theta+\Theta)}$  と表せるが、このとき、長さ、偏角の大きさは分かったが、原点から書いていいのか。また初期位相のようなものは考えなくてよいのか。また、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $J^2 = -E$  とし、 $z = xE + yJ \leftrightarrow x + iy = z$ ,  $w = XE + YJ \leftrightarrow X + iY = w$ , と対応た（原文ママ）。このとき、どうして  $C = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{R} \right\}$  と思ってよいのか。行間をもう少し説明してほしい。

お答え： 行間を読むのが受講者の仕事。そのために初等的な教材を使っています。前半：「書いてよいのか」の「書く」の目的語がない（「書く」は他動詞）ので質問の意味がわかりません。行間を説明しなさい。後半：体として同型である、ということ。

質問： 私は高校のとき複素平面の授業がなかったのですが、高校の授業ではどの程度まで教えていたのですか？

お答え： 平成元年制定の学習指導要領（数学 B）より

(2) 複素数と複素数平面

ア 複素数と方程式の解

(ア) 複素数とその演算

(イ) 二次方程式の解

(ウ) 簡単な高次方程式

イ 複素数平面

(ア) 複素数の図表示

(イ) ド・モアブルの定理

[用語・記号] 虚数、 $i$ 、判別式、偏角、極形式

質問： 4元数群とは  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$   $ij = k, jk = i, ki = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$  こんな感じだったと思います。仮に高校数学で扱われる時代が来るとして、具体的にどのような問題が作れるのでしょうか。

お答え： それが課題。

質問：  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$  はどんな線型変換なのですか（考えたけどわかりませんでした）

お答え： 答えは講義で述べましたが。

質問： この講義では、大学の学生に対して講義をして下さっているのですが、大学での勉強と高校での勉強の間には大きなギャップがあるように私は感じています。高校の教師になるにあたってそのギャップを埋めるには、どのような勉強をすればよいでしょうか。

お答え： (1) 高等学校の教科書を熟読してください。たぶん、あなたが感じているほどはギャップは大きくないのです。(2) 高等学校の教材に対して理解を深めてください。とくに、教科書も問題集も何も無いところで教材を再構成できるくらいまで。この段階では「大学生の言葉」でok。そこまでできれば「高校生の言葉」に焼き直すのは簡単なはず。理解が浅いままにやさしく語ることはできません。

質問： どこからそんなに小ネタがでてくるんですか？

お答え： 22年の教壇経験。