2008 年 10 月 28 日 (2008 年 11 月 4 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

数学科指導法 II 講義資料 3

おしらせ

- この授業は「教員になる方」のための授業ですので，この期間の「講義」も「事実を学ぶ」ことだけが目的ではありません．講義の方法，質問や意見への対応など，講師の芸を盗んで，あるいは反面教師として学んでください．
- 「質問」を義務としているのは，次の目的のためです：
  - 講義中の疑問を解決する．
  - 講師の説明が不足していたところを指摘してもらい次回につなげる．
  - 質問を探すことによって復習をする，ということを促す．
  - 答えてもらう質問のしかたを身につける．
- いただいたご質問とその回答（らしきもの）はこの資料に掲載します．また，いただいたご意見は講義 web ページにて（個人が特定できない形で）公開しております．質問や意見に対する対応の参考あるいは反面教師として活用してください．
- 質問およびご意見の公開を拒否する，と宣言された方がいらっしゃいます．上で述べたように，あなたのご質問・ご意見は「教材」です．拒否するのは結構ですが，教材の提供をしていただかなかった，ということで，質問の得点は与えません．なお，山田はどなたが「拒否」されたのかは記憶しませんので，公開を拒否する場合は毎回その旨記述してください．
- 最初の時間に説明しましたように，この講義のあと，皆さんに「問題」を作成していただきます．これは「教材」ですので，公開を拒否された場合は問題を提出したとは見なしません．

3 （講義 3）空間の回転・四元数の行列表示

- 空間ベクトルの内積と外積
- 直交行列と空間の回転
- 四元数の行列表示

2008 年 10 月 28 日 (2008 年 11 月 4 日訂正)

前回の訂正

- 四元数の関係式を誤って板書したようです：

$$ij = -ji, \qquad jk = -kj, \qquad ki = -ik$$

　です．
- 前回の講義概要の「四元数の行列表示」は説明できませんでした．今回やります．

前回の講義の要約

■前の回の補足　複素数 z, w を $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルと見なすと，$\operatorname{Re}\bar{z}w$ は z と w の内積，$\operatorname{Im}\bar{z}w$ はベクトル z, w を並べてできる行列の行列式となる．

■複素数の拡張　然るべき性質をもった加減乗除の演算が定義されている集合を体と呼んだ．複素数は $\boldsymbol{R}^2$ に体の構造を入れたものと見なせる．同様の方法で $\boldsymbol{R}^3$ に体の構造を入れることはできない．

■ハミルトンの四元数　3 つの「数」 i, j, k が関係式 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ を満たしているとして，$t + xi + yj + zk$ $(t, x, y, z \in \boldsymbol{R})$ の形の数を**四元数**といい，四元数全体の集合を $\boldsymbol{H}$ と書く．$\boldsymbol{R}^4$ と同一視することで $\boldsymbol{H}$ に加法，減法が定義されるが，i, j, k の関係式で，乗法も定義できる．ただし，乗法の交換法則は成り立たない．

■四元数の除法　四元数 $\xi = t + xi + yj + zk$ $(t, x, y, z \in \boldsymbol{R})$ に対して $\bar{\xi} = t - xi - yj - zk$ をその共役という．とくに $\xi\bar{\xi} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geqq 0$ で等号成立は $\xi = 0$ のときに限る．ここで $\xi^{-1} = \bar{\xi}/(\xi\bar{\xi})$ とおけば，$\xi\xi^{-1} = \xi^{-1}\xi = 1$ が成り立つので ξ^{-1} は ξ の「逆数」に相当する．これを用いて四元数の除法を考えることができ，$\boldsymbol{H}$ は（可換でない）体となる．積の交換法則が成り立たないことから $\xi^{-1}\eta$ と $\eta\xi^{-1}$ は一般に異なる．

■四元数と 3 次元空間　四元数 $\xi = t + xi + yj + zk$ に対して $\operatorname{Re}\xi = t$, $\operatorname{Im}\xi = xi + yj + zk$ とおく．とくに $\operatorname{Im}\boldsymbol{H} := \{\xi \in \boldsymbol{H}\,;\, \operatorname{Re}\xi = 0\}$ とおくと，これは $\boldsymbol{R}^3$ と同一視することができる．ξ, $\eta \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルと見なすとき，$\operatorname{Re}\bar{\xi}\eta$ は ξ と η の内積を与える．一方，$-\operatorname{Im}\bar{\xi}\eta$ は「外積」と呼ばれるベクトルに対応する．

前々回の講義の要約

「前回の講義資料の要約では提出用紙に入らないではないか」というご意見がありました．もうすこし縮めるのは練習問題なのですが，縮小したバージョンつくってみました．どこを減らしたか，確認してみてください．

■複素数　高等学校では「$i^2=-1$ なる数 i を考え $x+iy$（x, y は実数）の形の数を**複素数**という」とならう．これは次のように正当化できる：

- $\boldsymbol{R}^2$ に $(x,y)(X,Y)=(xX-yY, xY+yX)$ で積を定義すると，この積とベクトルの和によって $\boldsymbol{R}^2$ は体になる．これを複素数体といい $\boldsymbol{C}$ と書く．特に (x,y) を $x+iy$ と書けばこれを複素数とみなせる．
- 行列 $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ を考え，$xE+yJ$（$x,y\in\boldsymbol{R}$）と複素数 $x+iy$ を対応させると，行列の和・積と複素数の和・積が対応するから，このような行列全体の集合は $\boldsymbol{C}$ と同一視できる．

複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ では加減乗除の演算が行えるが，体の演算に適合した大小関係は定義できない．

■複素平面　$\boldsymbol{C}$ を上のように $\boldsymbol{R}^2$ と同一視して複素平面という．$z=x+iy$（$x,y\in\boldsymbol{R}$）に対して $\bar{z}=x-iy$, $\mathrm{Re}\,z=x$, $\mathrm{Im}\,z=y$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ をそれぞれ z の共役，実部，虚部，絶対値といい，線分 $0z$ が横軸の正の部分となす角 $\arg z$ を z の偏角という：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$ $(r=|z|, \theta=\arg z)$．複素数 $z=re^{i\theta}$, $w=Re^{i\Theta}$ に対して $zw=rRe^{i(\theta+\Theta)}$ なので，「積の絶対値は絶対値の積，偏角は偏角の和」となる．

■平面の直交変換　複素平面の点 $e^{i\alpha}z$ $(z\in\boldsymbol{C}$, $\alpha\in\boldsymbol{R})$ は，点 z を，原点を中心として正の向きに角 α 回転した点である．$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^2$ とみなせば，これは回転の一次変換 $\boldsymbol{x}\mapsto R(\alpha)\boldsymbol{x}$ となる．ただし $\boldsymbol{x}={}^t(x,y)$, $R(\alpha)=\cos\alpha E+\sin\alpha J$ である．2 次の直交行列で，行列式が $+1$ のものの一般形は $R(\alpha)$ だが，行列式が -1 のものは原点を通り実軸の正の部分と $\alpha/2$ の角をなす直線に関する折り返しを表す線型変換に対応する．

質問と回答

質問： “四元数” は “しげんすう” と読むのが一般的なのですか．“よげんすう” の読みは変ですか？

お答え： あまり「よげんすう」とは言わないようです．四次元は「しじげん」でなく「よじげん」ですが．

質問： 体の定義に，可換であることをこの講義では要求しないとしましたが，それは何故でしょうか．以前受講した代数の授業では，体の定義に “可換であること” を含んでいたのですが．

お答え： 「四元数体」って言いたかったからです．

質問： 複素数のときにも思ったのですが，相等については “$x + iy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$” で十分なのに教科書なんかは何故あのような面倒なかき方をするんですか．ベクトルの 1 次独立も面倒な方でかいてあったような気がします．

お答え： 「面倒な方」が具体的に書いていないので想像するしかないんですが，「$x + iy = u + iv \Leftrightarrow x = u$, $y = v$」ということでしょうか．それでしたら，演算（和，差）の定義をするまえに相等を定義したい，ということだと思います．そうしませんと，和の定義式に「等号」を使えないので．

質問： $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$，$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$ のように，片方を定義すると，もう片方が定理となるような組み合わせは他にありますか？

お答え： たくさんあります．たとえば $\boldsymbol{R}^3$ の内積の成分表示．

質問： $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ を定義としていましたが，証明付きの公式なのに，やはり定義として教えた方がいいのでしょうか．証明を教えようにもテイラー展開が大学の内容なので，無理といったら無理なのですが．

お答え： ご質問の式を「定義」とするならばこれは「証明付きの公式」ではありません．もし「e の虚数乗」を別の方法で定義するならば，オイラーの式は証明付きの公式となります．「証明が必要かどうか」は文脈によって違っていて絶対的な意味はありません（と説明したつもりだが）

質問： $|z|^2$ や $|\xi|^2$ についてですが $|z|^2 = a^2 + b^2$ $(z = a + bi)$ を説明するときに（山田注：複素平面上の 3 平方の定理）を使って高校生に説明するのですが，どうして i を抜かして考えてよいのかいつも聞かれます．どのように説明すれば伝えやすくなりますか．

お答え： まず「定義」だということ，すなわち「四の五の言わずにこう約束するんだからあきらめろ」ということを伝えるべきだと思います．その上で，このような定義をするとどんなことが分かるのかを教える，というのが実はわかりやすいと思うのです．「定義（約束）と性質はきちんと分けて（すくなくとも教師は分けて考えて）教えましょう」

質問： 四元数の定義で i, j, k という記号を用いましたが，3 つの記号なら a, b, c などでもよいのに，あえて i という複素数の記号と同じ記号を用いたことには特別な意味があるのでしょうか．3 つの記号には相互関係があるので，i を使うのは何となく気持ち悪い気がするのですが．

お答え： $t + ix$ の形の複素数は四元数とも見なせるので，同じ記号だと気持ちよいような気もします．いずれにせよ，ハミルトンが i, j, k の記号を使って以来の伝統のようです．

質問： $\{t + xi + yj + zk \mid t, x, y, z \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{H}$：四元数全体の集合に対して $\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ はどのような集合ですか？

お答え： $\operatorname{Im}\boldsymbol{H} = \{xi + yj + zk \mid x, y, z \in \boldsymbol{R}\}$.

質問： $z\bar{w}$ の意味を考えるときに $\operatorname{Re} z\bar{w}$ は内積で，$\operatorname{Im} z\bar{w}$ は $-\operatorname{Im} z\bar{w}$ とマイナスをかけるのが不思議です．$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ のオイラーの公式も定義するで説明したので不思議です．

お答え： どういう回答を期待しているのかわかりません．後半は日本語がおかしいと思います．

質問： $z\bar{w} = rR\cos(\theta-\Theta) + irrR\sin(\theta-\Theta) = (xX+yY) + i(-xY+yY)$，すなわち $\operatorname{Re} z\bar{w}$ が z と w の内積，$-\operatorname{Im} z\bar{w}$ が z と w の外積となっていることの利点はあるのですか？

お答え： 山田はしょっちゅうこれを使って曲線の曲率なんかを計算しています．結構便利です．と答えると「日常生活での利点」と迫ってくる人がいますが，どういう答えを期待しているのでしょうか.

質問： オイラーの公式のところで $i\sin\pi = 0$ としたが，$i \times 0 = 0$ というのは正しいのか？図形的にはどう表すのか？

お答え： (1) ただしい (2) 積の絶対値は絶対値の積.

質問： ハミルトンの四元数を考えるときに，勝手に i, j, k という 3 つの記号を用意しましたが，それは何も問題ないでしょうか？何一つ定義していないので，矛盾が起きたりしないのでしょうか？

お答え： それは複素数の場合も同じ．それをどうやって数学的にきちんと定義するか，と言う方法を前回やった．その真似をすればよい.

質問： $i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$ をみたす i, j, k は具体的にどんな数ですか？

質問： Hamilton の四元数になるような i, j, k の組み合わせがあることをどういう風に他の人に説明すれば伝わりますか？（具体的にどんなものがあるかも教えてほしいです）

お答え： 前回の講義（複素数）にて「$i^2 = -1$ を満たす i は具体的にどんな数」というのと質問としては同等です．$\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{R}^4$ と同一視したり行列表示をしたりして，なんとなく納得するのです．$\boldsymbol{R}^4$ の元，といえば十分に具体的ですよね.

質問： このようなものは存在するということをどう生徒に説明するべきですか？

お答え： そのまえに，あなたが存在について納得することが先です.

質問： i, j, k という記号があって $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$ をみたすとありますが，k は ij で表せるので，わざわざ 3 つの記号を用いなくても i と j だけで式を表せると思うのですが，なぜそうしないのですか？

お答え： $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{C}^2$ と思って複素数 $z = x+iy, w = X+iY$ に対して

$$\xi = z + wj = (x+iy) + (X+iY)j = x + iy + Xj + Yk$$

と見なすこともあります．このときは虚数単位の i と j しか用いていません．しかし $\boldsymbol{R}$ 上 4 次元の線型空間と思うときには $\{1, i, j, ij\}$ が基底をなすので，ij をわざわざ k と書いたのだ，と思いましょう.

質問： $(1-i+2j-k)(1+2i-j+k) = \dots$ (山田注：中略) $= 5+2i-3k$ この乗法は上のように計算するように出された例なのですか？ $4ji = -4ij = -4k$ というヒントで答えを出したのですが，あってますか？

お答え： 検算しなさい．教員の資質として「自分で答えの成否を判定できる」は必要と思われます.

質問： 四元数のべき根を考えることはできますか？複素数では n べき根（原文ママ）の値は n 個ありましたが，四元数のべき根が定義できたとして値はいくつありますか？ $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ より $(-1)^{1/2}$ には 3 つ以上の値が考えられそうですが.

お答え： 3 つでなく 6 つでは？複素数の平方根を求める方法（$a+ib = (x+iy)^2$ をとく）と同様なことを四元数について試みてごらんなさい．どんなことが言えますか？

質問： 前回 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{R}^2$ と対応させて考えましたが $\boldsymbol{H}$ についても $\boldsymbol{R}^4$ と対応させて同様な議論ができますか？

お答え： できます．といいますか，簡単なのでやってください.

質問： 四元数で使う i, j, k の乗法の関係をサイクリックにする理由はどこから出てくるのですか？

お答え： もちろん $k' = -k$ として新しい基底 $\{1, i, j, k'\}$ をとれば，積の関係はサイクリックにはなりませんが，内積・外積との関係などを考えるとサイクリックにとったほうが便利なので．

質問： $\boldsymbol{H}$ が体をなすためには i, j, k の決め方というのは講義で出てきた方法しかないのですか．

お答え： $\{1, i, j, k\}$ は $\boldsymbol{R}^4$ の基底をなしているのですが，$\boldsymbol{R}^4$ のことなる基底をとってやれば違った関係式がでてきます．

質問： 四元数の定義・性質についての質問です． i, j, k には $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ij = -ji$, $jk = -kj$, $ki = -ik$ という定義・性質がありますが，これらは $\boldsymbol{R}^3$ でのベクトルの外積の性質とほぼ同じと見えます．i, j, k に関するこれらの性質はこの $\boldsymbol{R}^3$ の外積を意識して作られたものなのでしょうか？それとも $\boldsymbol{R}^4$ に体の構造を入れるにはこの方法しかなかったのでしょうか？

お答え： 本人に聞いたことがないのでわかりませんが，外積を意識していたように思います．また，体構造の入れ方は本質的に一通りのはずですが，基底 $\{1, i, j, k\}$ のとり方によっては関係式が変わります．したがってご質問の関係式を満たすように基底をとったのは，多分に恣意的です．

質問： $x^2 = -1$ となる x を i とするのは分かるのですが，その場合解は 2 つになる気がします．$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ のように $x^2 = -1$ を満たす x が 3 つあるのはなぜですか？

お答え： 複素数体の中には 2 つ．ここではさらに数を拡張しているのだから，答えが増えてもおかしくないのでは？ちなみに 3 つでなく 6 つあります．

質問： 四元数 i, j, k という 3 つの記号はそれぞれ異なっているものであるのに，$i^2 = j^2 = k^2 = -1$ と書くととても違和感を感じるのですが，2 乗して -1 になるものは複素数の $\pm i$ 以外にあるのですか？

お答え： 数を拡張しているのだから，増えてもおかしくないと思いますが．

質問： $\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{N}$ から拡張した数で一番大きいと思っていたのですが違うんですか？

お答え： 何を「数」と見なすかによります．

質問： 四元数を $t + xi + yj + zk$ と表す際，なぜ w, x, y, z のように連続したアルファベットでなく t, x, y, z を用いるのでしょうか？

お答え： 個人的な趣味．4 次元ローレンツ・ミンコフスキー時空を想像し，最初の座標を時間座標になぞらえています．

質問： 「$\{t + xi + yj + zk | t, x, y, z \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{H}$ は体をなす」と書かれていましたが，前回の補足で言われたように可換は成り立たないため，区別すると，ここでの体は「斜体」という意味ですか．

お答え： そうです．「可換は成り立たない」は日本語としておかしいですね．「（乗法の）交換法則は成り立たない」だと思います．

質問： $\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}^2$ は $\boldsymbol{H}$ の部分集合 ($\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}^2 \subset \boldsymbol{H}$) になりますか？

お答え： と見なすことはできます．ところで $\boldsymbol{C}$ でなく $\boldsymbol{C}^2$ ですか？だとしたら $\boldsymbol{C}^2$ を $\boldsymbol{H}$ と同一視できます：

$$\boldsymbol{C}^2 \ni (x + iy, z + iw) \longmapsto x + iy + (z + iw)j \in \boldsymbol{H}.$$

質問： $\boldsymbol{R}^3$ が体をなさないというのは，$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{R}^2$ を同一視したとき，$\boldsymbol{C}(= \boldsymbol{R}^2) \subset \boldsymbol{R}^3$ で複素数の演算を組み込んだから体をなさなかったのですか．（実ベクトルだけの和（ベクトルの合成），積（内積）を考えたら $\boldsymbol{R}^3$ は体をなしていそうなのですが）

お答え： ベクトル空間としての構造と適合した体構造を考える（次の質問の回答をご覧下さい）と，$\boldsymbol{C}$ を部分体として含まなければならないことまで証明できます．ちなみに，体 F の定義における積は，a, $b \in \mathcal{F}$ に対して $ab \in F$ となるものです．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ の内積は $\boldsymbol{R}^3$ に値をとらないので，体

の構造とは関係がありません.

質問： 体をなさない例 $\boldsymbol{R}^3$ で，いままで扱ってきた 3 次元実ベクトル空間を考えると，体をなしているように思えます．上で体をなさなかったのは，基底に複素数的性質をもつものをとったのが原因なのでしょうか？

お答え： どうして「体をなしているように思った」のか書いてないので，想像するしかないのですが，上の質問の回答参照.

質問： $\boldsymbol{R}^3$ に体の構造が入らないということですが，これは次元が 3 の体は存在しないということと同値ですか．それとも $\boldsymbol{R}^3$ に限らない集合を考えれば存在しますか？自分で質問しておきながら次元の意味がわからなくなってきました.

お答え： 難しいことは抜きにして「次元」は線型空間に対して意味のある量です．したがって「3 次元線型空間に体構造は入るか？」というご質問と思えます．ところで係数体を $\boldsymbol{R}$ とすれば 3 次元線型空間は $\boldsymbol{R}^3$ と線型同型ですから，これは「$\boldsymbol{R}^3$ に体構造が入るか」という問いと同じになります．以下，2 つ前の質問の回答参照.

質問： 複素数，四元数において $1, i\ (j,\ k)$ を 1 次独立な単位ベクトルと見ることができます．このとき，$1 \cdot i = i,\ 1 \cdot j = j$ など，1 というベクトルをかけても同一のベクトル方向なのに $ij = k,\ i^2 = -1$ など，i, j 同士をかけると違うベクトル方向になるのですか？

お答え： 「ベクトル方向」という語に違和感を覚えますが，そういうことです．いくつか上の質問の回答で，「$\boldsymbol{R}^4$ のベクトル空間の構造と適合した」ということが，「1 のスカラ倍 $s = s1$ をかけるとは，ベクトルの s 倍をすること」ということです.

質問： $\boldsymbol{R}^4$ に可換な体の構造は入りますか？入るならそれはどんなものですか？

お答え： $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル空間としての構造と適合した可換体の構造は入りません．ここで「ベクトル空間の構造と適合した」というのは，乗法単位元 $\mathbf{1}$ が生成する部分空間 $\boldsymbol{R}\mathbf{1}$ を $\boldsymbol{R}$ と同一視したときに，$s\mathbf{1}$ を「かける」という操作が「s 倍（スカラ倍)」と一致する，ということです．すると，$\boldsymbol{R}^4$ に入る体構造は本質的に四元数体と一致してしまいますので，可換にはなり得ません．それでは「可換な体構造は入れられるか」と言いますと，「集合として $\boldsymbol{R}^4$ は $\boldsymbol{R}$ と 1 対 1 に対応づけられる」のだから入れられます（$\boldsymbol{C}$ に順序を入れるときに同様の議論をしましたね).

質問： もし体の定義に可換という条件をいれてしまうと上（山田注：講義の要約）のように思うだけでは $\boldsymbol{R}^4$ は体をなさなくなりますよね？体の定義に可換という条件をいれても $\boldsymbol{R}^4$ が体をなすようには $i, j,$ k の関係を変えてもできないのですか.

お答え： できないのです．上の質問の回答参照.

質問： 「$\boldsymbol{R}^n$ に体の構造が入るのは $n = 1, 2, 4$ に限る」という発言をされたと思うのですが（聞き間違いでしたらすみません)「$n = k\ (k \geqq 5)$ のときは不可能」ということが一般的証明できるのですか？もしそうだとしたら $n = 3$ のときも不可能（というよりも 4 だけ特別に体の構造が入る）ということが不思議でならないのですが. . .

お答え： だからハミルトンが驚いて四元数 love になってしまったんですね.

質問： $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{C}$ の拡張ですが，$\boldsymbol{H}$ を拡張したもので “n 元数” というものはあるのですか．以下の質問はそのようなものがあった場合の質問です．$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{H}$ へ拡張した際に乗法の可換性が失われました．従って $\boldsymbol{H}$ から拡張した際に失われる性質があるように思われます．実際はどうなのでしょう．($\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{H}$ に拡張した際には乗法の可換性でしたので，例えば，乗法の結合法則や分配法則が成立しない等)

お答え： ケイリー数，ケイリー代数または八元数で調べてご覧なさい.

質問： 複素数（2 元数）と四元数を比べると，$1, i$ の他に j, k という記号を用意して，i, j, k の積に制限がつけられています．とすると，この i, j, k の他に $l, m, n \ldots$ という文字を付け加えて積や和にある条件をつければ，六元数や八元数などもできるのでしょうか（しかし，漢字の表記と算用数字の表記で一般化できるものは算用数字で書くようにしている，とおっしゃった気がするので，四元数と書かれている時点で六や八はないのかな，と思いました）もしできたとしたら，四元数では複素数の可換性が失われているのですが，また何か四元数では成り立っていたものが六や八元数などでは失われるのでしょうか.

お答え： ナイスな推理です（数学的ではないけれど）．体としてはさらに高次元化はできません．このへんの質問と回答参照.

質問： 4 元よりも多きい（原文ママ）次元の数について考えてみたのですがどれも体となりません．実際 4 元より多きい元数からなる数（多元数）は存在するのですか？

お答え： 「大きい」ですね.「元数」という語も使わないようです．体，ということにこだわるなら 4 元数を含む体はありませんが，演算法則のあるものを崩してもよいならば拡張することができます．ケイリー数（八元数）で調べてごらんなさい.

質問： $\boldsymbol{R}^3$ は体の構造が入らず，四元数には体の構造が入ることがわかりましたが，四元数は $\boldsymbol{R}^4$ と同一視できることから，$\boldsymbol{R}^n$ (n はある一定の法則をもつ変数，たとえば n は偶数，n は奇数，$n = 3m + 1$ (m は 0 以上の整数）など) で体の構造が入ると一般化できるものなのですか？

お答え： いいえ.

質問： $\boldsymbol{R}^n$ について一般の n では $\boldsymbol{R}^n$ が体になるとは限りませんが，n が 2^k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ の場合に $\boldsymbol{R}^n$ が体になる数が出来そうです．今でどのような n のときに $\boldsymbol{R}^n$ が体になることが明らかになっているのですか.

お答え： $n = 0, 1, 2.$

質問： $\boldsymbol{R}^5$ に体の構造が入らないことはどうやって示せますか？

お答え： 本質的には $\boldsymbol{R}^3$ の場合と同様です.

質問： 複素数体を拡張して Hamilton の四元数を考えたが，四元数をさらに拡張することはできるのか？

お答え： 拡張の意味にもよる．このあたりの質問と回答参照.

質問： 四元数は可換という性質を犠牲にして数を拡張していますが，聞いた話によると，八元数や十六元数と呼ばれるものも存在するようです．このようにある性質を犠牲にしてまで数を拡張することにはどのようなメリットがあるのですか？また三十二元数のようなものも存在したりするのですか？

お答え： メリットといっても，おもしろいでしょ．とはいえ，初等幾何，群論，理論物理などさまざまな応用があるようです．三十二元数ってのは聞いたことがないですねぇ．だれかが考えているかもしれませんが.

質問： 「$\xi\eta = \eta\xi$」とは限らないとありましたが（四元数において）四元数と行列以外にもあてはまる例はありますか？

お答え： 大抵の「群演算」は可換ではありません（2 年生ですか？そろそろ群の定義と例を習っていますよね).

質問： $\boldsymbol{R}^n$ に体の構造が入ることはあるんですか.

お答え： $n = 1, 2, 4$ の場合に入る.

質問： 体の構造が入るかどうかを考えることによって，何か利点はあるのか？

お答え： 利点がなければ考えてはいけないのか？

質問： $\xi, \eta \in \boldsymbol{H}$ とするとき，一般には $\xi\eta = \eta\xi$ が成り立たないということが分かりました．では $\xi\eta = \eta\xi$ が成り立つための条件は何かあるのでしょうか？もちろん $\xi\bar{\xi} = \bar{\xi}\xi$ や $\xi\xi^{-1} = \xi^{-1}\xi$ が成り立つのは分かりますが，これ以外に $\xi\eta = \eta\xi$ が成り立つための条件があれば教えていただきたいです．

お答え： たった 4 つの実数の組が 2 組あるだけなのだから試してみればよいのでは？あるいは行列表示（今回の講義でやる）をしてみると，行列の積が可換となるための条件（覚えていますか？固有空間が一致する）を用いて表せそうですね．

質問： 複素数では $z = x + iy$ に対して x: 実部，y: 虚部，i: 虚数単位という名前がついていますが，四元数ではそのような名前はないのですか？

お答え： 「虚数単位」に相当する言葉は知りません．実部，虚部については下の質問と回答を参照．

質問： 複素数の「実部」「虚部」のように四元数でも「実部」「i 部」「j 部」「k 部」のような言い方をしますか？

お答え： 実部とは言います．i 部，っていうのは聞いたことがありません．i-成分という言い方はします．なお，四元数 $t + xi + yj + zk$ の「虚部」とは $xi + yj + zk \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ のことです．

質問： $ij = -ji$ などを見ると，四元数の積はベクトルの外積と関係ありそうだと思ったのですが，授業中には「四元数 ξ, η について $\xi\eta = -\eta\xi$」とは言わず，実際に計算すると一般には $\xi\eta \neq \eta\xi$ でした．四元数の積とベクトルの外積は関係ないのでしょうか？

お答え： $\boldsymbol{H}$ には $\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ が埋め込まれる（部分体となっている）ので，そこに限れば $\xi\eta = \eta\xi$ になってしまいます．しかし，$\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{R}^3$ とみなし，$\{i, j, k\}$ をその基底にとれば $ij = -ji$ などは外積（ベクトル式）の関係式になっています．だから，ベクトル積と「大いに関係あり」で，それは今回説明します．

質問： 今回の授業の題名が「内積と外積」となっていたのですが，出てきたのは内積だけでした．なので，自分なりに外積を考えようと思ったのですが，そのためには z と w を $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルと思わなければ外積を考えられませんよね？つまり，$z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}$ として $z \times w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xY - yX \end{pmatrix}$ とするという意味なんですけど，そうすると $-\operatorname{Im} z\bar{w}$ は z と w の外積の成分になることがわかりました．このとき $|z \times w|$ を講義でやっていた $\begin{vmatrix} x & X \\ y & Y \end{vmatrix}$ (z と w の張る平行四辺形の面積）と等しくなるように z と w を無理矢理 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルにしたのですが，いいですか？長々とした質問になってしまい，申し訳ありません．

お答え： いいです．$\boldsymbol{R}^2$ のベクトル z，w に対して，その外積を $\det(z, w)$ で与えられる**スカラ**と定めることもあるようです．

質問： $\xi = xi + yj + zk$, $\eta = Xi + Yj + Zk$ とすると $\operatorname{Re}\bar{\xi}\eta = xX + yY + zZ$ となります．前回の $\operatorname{Re} z\bar{w} = xX + yY$ と同様に考えるなら内積を表すことになりますが，この事実はどういう場面で役立ちますか？

お答え： 内積を使う場面．

質問： $\bar{\xi} = -xi - yj - zk$ とし $\bar{\xi}\eta = (-xi - yj - zk)(Xi + Yj + Zk) = (xX + yY + zZ - (yZ - zY)i - (zX - xZ)j - (xY - yX)k$ なので $\operatorname{Re}(\bar{\xi}\eta) = xX + yY + zZ$ でいいですか．

お答え： いいですが，それは何ですか？

質問： $\xi = xi + yj + zk$, $\eta = Xi + Yj + Zk$ のとき $\operatorname{Re}\bar{\xi}\eta = xX + yY + zZ$ となりましたが，これは $z = x + iy$, $w = X + iY$ において $\operatorname{Re} z\bar{w}$ が z と w を $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルと思ったときの内積となったよ

うに何か意味のあるものなのですか.

お答え： $\boldsymbol{R}^3$ の内積.

質問： $\xi = xi + yj + zk \in \operatorname{Im} \boldsymbol{H}$, $\eta = Xi + Yj + Zk \in \operatorname{Im} \boldsymbol{H}$ とすると $\operatorname{Re}(\bar{\xi}\eta) = xX + yY + zZ$ となりました．そして，次に $\xi' = t + xi + yj + zk \in \boldsymbol{H}$, $\eta' = T + Xi + Yj + Zk \in \boldsymbol{H}$ として $\operatorname{Re}(\bar{\xi}\eta)$（原文ママ）を求めてみると $\operatorname{Re}(\bar{\xi}'\eta') = tT + xX + yY + zZ$ となりました（ξ', η' を $\boldsymbol{R}^4$ のベクトルと思ったときの内積)．そこで思ったのですが，どうして先生は講義の最後に『$\operatorname{Re}(\bar{\xi}\eta)$ がどうなるか』を考えるように促したのですか．（$\operatorname{Re}\bar{\xi}'\eta'$ が ξ', η' を $\boldsymbol{R}^4$ のベクトルと思ったときの内積ということの方が重要な気がしたのでそういう疑問が生じました.）

お答え： 確かに $\boldsymbol{R}^4$ の内積に言及すべきでしたね．ここで特に $\operatorname{Im} \boldsymbol{H}$ にこだわったのは $\operatorname{Im}(\bar{\xi}\eta)$ の方を考えたい（次回の講義）からで，空間図形との関係をとくに強調したかったからです.

質問： オイラーの公式のように四元数でも定義できたりするものはあるのですか？

お答え： 意味が分かりませんが.

質問： 複素数を拡張して四元数を考えたわけですが，四元数も極表示することはできるのでしょうか．3 次元ベクトルは φ, θ など角を 2 つ使って表すことができますが，それが 4 次元ベクトルの場合はどうなるのか分かりません．四元数というのは二元数（複素数）と同様に 4 次元ベクトルと見ることができると考えるので.

質問： 四元数は極座標表示できるのですか？つまり三角関数とスカラーを使って表すことができるのですか.

お答え： 3 つの角（と絶対値）で表すことはできます．一般に高次元の球面座標を考えることができますので．ただ，次回に扱う内容では，$\operatorname{Im} \boldsymbol{H}$ を極座標で表す，というのが自然かもしれません.

質問： 先生は四元数は行列の形でも表すことができるとおっしゃってありましたが，複素数のときのように，指数の形や三角関数の形でも四元数を表すことはできますか？

お答え： 極表示という意味ならできます．ただし，あまりきれいではありません.

質問： $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{H}$ における $\bar{\xi}\eta$ の虚部と外積の関係なのですが，$\xi, \eta \in \boldsymbol{C} \Rightarrow \operatorname{Im}\bar{\xi}\eta = \det(\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \operatorname{Im}\bar{\xi}\eta = -\xi \times \eta$ という風に実際に計算してみると共役のとり方は同じであるのに符号が逆転してしまいました．これは，特に深い意味はあるのでしょうか.

お答え： よく知りませんが，こんな説明ではいかが？複素数体 $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{H}$ に（たとえば）次のように埋め込まれる：

$$\boldsymbol{C} \ni x + iy \leftrightarrow x + i0 + jy + k0 \in \boldsymbol{H}.$$

しかし，このような埋め込み方では $\boldsymbol{C} \subset \operatorname{Im} \boldsymbol{H}$ と見なすことができない．そう思うためには（体として埋め込んでいるのではないが）

$$\boldsymbol{C} \ni x + iy \leftrightarrow 0 + i0 + jx + ky = (x + iy)j = j(x - iy) \in \operatorname{Im} \boldsymbol{H}$$

と見るべきで，四元数の共役公式（講義ではまだやっていないが）$\overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi}$ を用いればなんだかそれらしき関係式がでてくるでしょう．もし $x + iy \leftrightarrow (x - iy)j$ と埋め込めば，符号が変わります.

質問： 複素数上の複素数値関数に微分や積分を考えてみるといろいろ結果が得られたんですが，四元数体でも同じようなことが考えられるのですか.

お答え： いろいろなことが提案されていますが，複素関数論とまったく平行に考えるとあまりおもしろくありません．これは積（商）が可換でないことによっています．微分の定義は「割り算」です．右から割

るのと左から割るのでは一般に値が違うので，「それらの極限が一致する」ということを微分の定義に組み込むと，定義が強すぎて微分可能な関数がほとんどなくなってしまいます．

質問： 高校まででならう $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{i}\}$ の複素数は古典力学等で実用できることを物理の授業で習いましたが，$\{\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ の Hamilton 四元数はどういうところに実用されるのですか？それとも，単に複素数の数学的理解が深まった結果として，四元数を定義したのですか？

お答え： ハミルトンは空間幾何に応用されることを想定していたようです．実際にそのような本が当時いくつか書かれていますが，普通にベクトルを使ったほうが楽なようにも見えます．しかし，最近ではコンピュータ・グラフィクスなどで応用されていることもあるようで，一概にハミルトンの方針が間違っていたとは言い難いようです．一方，物理では「スピン」という概念は本質的に四元数の中に住んでいます．また，数学でも四元数がさまざまな場面で使われます．ところで，「実用される」という言葉の使い方はしますか？「応用される」では？

質問： 複素数や四元数はどのような分野に応用されているのですか？

お答え： いろいろ．複素数は数学のあらゆる分野，四元数は上の質問と回答参照．

質問： つい最近まで物理を解いていました．これに似た話をやった記憶があるのですが，「三体問題」や「剛体の力学」で四元数の計算はとても有効なものではないのでしょうか．

お答え： 空間ベクトルがでてくる場面は四元数に置き換えることができます．どちらが楽かといわれると何とも言えません．ところで，山田は「物理を解く」という言い回しに違和感を覚えます．「物理（または物理学）の問題を解く」「物理を学ぶ」「物理を考える」は正しいと思うのですが．

質問： ハミルトンの四元数を使うタイミングがわかりません．どういうときに役にたつのでしょうか？

お答え： 1 回の講義くらいでわかるものではありません．

質問： 複素数は微分方程式で必要だから考えられたといわれましたが，四元数は何のためにどの分野に必要だから考えられたのですか．

お答え： 人の言うことをちゃんと聞きなさい：「2 階線型定数係数の微分方程式をとくのに複素数は必要」ということは言いましたが，「微分方程式に必要だから考えた」などとは一言も言っていません．それから「数学的概念」は何かに必要だから考えられる，というものでもありません．

質問： 3^0 の教え方は参考になりました．質問ですが，どうしてそのような考えは教科書に載らないのですか？

お答え： 載ってます．ただし，もうすこし一般的な形です．今回の説明は「たとえ話」みたいなもので，文章で記述するには向かないので，そのままの形では教科書に載りません．

質問： $(-8)^{\frac{1}{3}}$ はなぜ undefined なのですか．たしかに数としては undefined ですが，集合として $(-8)^{\frac{1}{3}} = \{2\exp\frac{1+2n}{3}\pi i\,;\, n \in \boldsymbol{Z}\}$ とすれば definable だと思うのですが．

お答え： 高等学校の教科書にしたがいました．数学 II の「指数の拡張」の項で，たとえば次のように記述されています．

> **■有理数の累乗**　<u>以下 $a > 0$ とする</u>．指数 p, q が有理数のときにも指数法則 $(a^p)^q = a^{pq}$ が成り立つように累乗の定義を拡張する．. . .

もちろん，ここでは実数値関数を考えています（と説明しましたよね，あなたのご質問はその文脈を逸脱しています．空気を読むこと）．1/3 乗に限れば $(-8)^{1/3} = -2$ とする手もありますが，一般の有理数指数では実数の値をとらない場合があるので，普通，有理数指数を考えるときは底を正の実数とするようです．

質問： “3 乗根” と “$\frac{1}{3}$ 乗” の違いがよく分かりません．$(-8)^{\frac{1}{3}}$ は undefined で $\sqrt[3]{(-8)} = 2$（原文ママ）なのはなぜですか．$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ なのに...

お答え： $\sqrt[3]{-8} = -2$ ですね．$a > 0$ なら $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ となります．底が負の数なので微妙，というところ．上の質問の回答参照．

質問： 説明を聞いても「$\sqrt[3]{-8} = -2$，$(-8)^{\frac{1}{3}} : undefined$」の違いが分かりませんでした．$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ではないのですか？

質問： $\sqrt[3]{-8} = -2$ で，$(-8)^{\frac{1}{3}}$ は undefined の話をよく理解できなかったのですが，再度説明していただけませんか.

お答え： 高等学校の教科書では

$$x > 0 \text{ のとき} \qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

となっているはずです．負の数の非整数乗は高等学校の教科書のどこでも定義されていません．

質問： $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ となるのは一見計算がキレイですが，3 次，4 次，5 次の導関数を求めると $\tan x$ の次数が増える一方なので，どっちもどっちな気がするのですが.

お答え： $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$ から cos, sin の微分を使って tan の 5 次導関数を求めてみましたか？どっちもどっちで $1 + \tan^2 x$ の形を使うのと同じ程度の手間でできましたか？（やってみてないでしょ）

質問： $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ と覚えるのと $1 + \tan^2 x$ と覚えるのでは高校ではどちらが便利なのですか？ $\frac{1}{\cos^2 x}$ で覚えて不便に思ったことはなかったのですが.

お答え： 不便に思わないのは大した計算をやったことがないからです．現行のカリキュラムでは生徒に計算をさせることを推奨していないように見えるので不便に感じないかもしれませんが，$(\tan x)^{(5)}$ を計算してみればどちらが便利かすぐに分かるはずです．やってみてください.

質問： tan を守ろう市民の会に入会する時はどうすれば良いのですか？

お答え： 入会した，と宣言すればよいはずです.

質問： なんで体構造って言うんですか？

お答え： 言っちゃダメですか？

質問： Hamilton の四元数の Hamilton と行列ででてくるケーリー・ハミルトンのハミルトンは同一人物ですか．また，コーシー列，コーシー・リーマンの方程式，コーシー・アダマールのコーシーは同一人物ですか.

お答え： そうです.

質問： (山田注：黒板に書いたものがコピーされていて) Definition は “def” と省略したのに theorem は “thm” と省略しなかったことは何か意味があるのですか？

お答え： ありません.

質問： 実際，先生が僕等と同じ年代のころ，今の内要（原文ママ）を理解することができましたか？

お答え： あなたの年代がわからない（最近は様々な世代の学生さんがいらっしゃるので）のでお答えできません．20 才前後ということでしたら，そのころは講義がつまらなかったし，人の話なんて聞いてもよくわからないから，大体の内容は自分で再構成していましたので大体分かっていたと思いますが.

質問： $|a| \cdot |b| = |c|$，すなわち $({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) = ({c_1}^2 + {c_2}^2 + \cdots + {c_n}^2)$ の恒等式は $n = 1, 2, 4, 8$ に対してだけ満たされるという結果を見聞きした覚えがありますがこれは四元数の代数的構造と関わっているのですか？

お答え： 質問がわかりません．$n = 1$ のときですらこの「恒等式」は成り立たないと思いますが.