2008 年 11 月 4 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

数学科指導法 II 講義資料 4

おしらせ

- 今回で「講義」は終了です．次回は，この講義内容に対する確認試験を行います．しかるべき理由で出席できない方は申し出てください．

4 （講義 4）四元数による空間の回転

- 直交変換（直交行列）に関する復習
- 虚四元数と座標空間
- 単位四元数と空間の回転

前回の訂正

- 四元数による回転で，式に誤りがありました．次が正しい式です：$\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{R}^3$ を同一視し，

$$p = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H} \qquad (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^3 = \operatorname{Im}\boldsymbol{H}, |\boldsymbol{v}| = 1)$$

  とすると，変換

$$\operatorname{Im}\boldsymbol{H} \ni \boldsymbol{x} \mapsto p\boldsymbol{x}\bar{p} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$$

  は $\operatorname{Im}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^3$ の原点を通る $\boldsymbol{v}$ 方向の直線を軸とした角 θ の回転を表す．
- 講義資料 3，5 ページ 1 行目：$\theta = \Theta \Rightarrow \theta - \Theta$
- 講義資料 3，5 ページ 23 行目：質問 $\Rightarrow$ お答え
- 講義資料 3，5 ページ 26 行目：わざわさ $\Rightarrow$ わざわざ

2008 年 11 月 4 日

前回の補足

■回転行列の性質　前回,

> 3 次の回転行列（行列式の値が $+1$ であるような 3 次直交行列）が定める $\boldsymbol{R}^3$ の線型変換は，原点を通るある直線を軸とした回転である

ということを述べ，その理由（証明の概略）を与えましたが，ご質問が多いようなので，もうすこし詳しい概略を与えます.

- 直交行列の固有値は絶対値が 1 である複素数である.
  A を n 次直交行列，λ を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ を λ に対応する A の固有ベクトルとする．一般に λ は実数とは限らないので，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ も複素数を成分にもつ: $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$．すると，$A$ が実行列であるから，
  $$|A\boldsymbol{x}|^2 = (\overline{A\boldsymbol{x}})(A\boldsymbol{x}) = \overline{{}^t(A\boldsymbol{x})}(A\boldsymbol{x}) = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}{}^t\overline{A}A\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}{}^t\overline{A}A\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}{}^tAA\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2$$
  $$|A\boldsymbol{x}|^2 = |\lambda\boldsymbol{x}|^2 = |\lambda|^2|\boldsymbol{x}|^2$$
  となる．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に注意すれば $|\lambda| = 1$ を得る.
  ただし，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n$ に対して
  $$|\boldsymbol{x}|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$$
  とした.
- 3 次の回転行列の一つの固有値は 1 である.
  A を 3 次の回転行列とすると，A の固有多項式 $\varphi_A(t) = \det(tE - A)$ は，実数を係数とする t の 3 次多項式である.
  - もし A の固有値がすべて実数ならば，それらの絶対値が 1 で，すべての積が $\det A = +1$ であることから，固有値は $(+1, +1, +1)$ または $(+1, -1, -1)$ のいずれかである.
  - もし A が虚数の固有値 λ をもつならば，φ_A が実係数多項式であることから $\bar{\lambda}$ も固有値である．固有値の絶対値は 1 であるから $\lambda = e^{i\theta}$ と書けるので，もう一つの固有値は $\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$．もう一つの固有値を $\mu \in \boldsymbol{R}$ とすれば $\mu\lambda\bar{\lambda} = \det A = +1$ だから $\mu = 1$．したがって固有値は $(1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ である.
- 3 次回転行列 A に対して，$\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ で，
  $$A\boldsymbol{e}_1 = \cos\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta\boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{e}_2 = \cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$$
  となるものが存在する.
  A の固有値 1 に対する固有ベクトルは実ベクトルになる．そのうち大きさが 1 であるものを $\boldsymbol{e}_3 \in \boldsymbol{R}^3$ とし，$\boldsymbol{e}_3$ の直交補空間
  $$V := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_3 \rangle = 0\}$$
  を考える．V は $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間であるから，その正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を一つとると，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である．これが求めるものであることを示そう：$\boldsymbol{e}_3$ は固有値 1 に対する固有ベクトルであったから
  $$\langle A\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_3 \rangle = \langle A\boldsymbol{e}_j, A\boldsymbol{e}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_3 \rangle = 0 \qquad (j = 1, 2).$$
  したがって $A\boldsymbol{e}_j \in V$ $(j = 1, 2)$ なので
  $$A\boldsymbol{e}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 \qquad (j = 1, 2)$$
  となる a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ が存在する．とくに $\langle A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ) であるから行列 $\{a_{ij}\}$ は直交行列である．さらに
  $$A(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  の両辺の行列式をとれば (a_{ij}) の行列式が 1 であることがわかる．したがって，行列 (a_{ij}) は 2 次の直交行列で，その行列式が $+1$ であるから
  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
  となる θ が存在する.

- 上のことから A が定める線型変換は，原点を通る方向ベクトル $\boldsymbol{e}_3$ の直線を軸とする角 θ の回転を与えることがわかる．

■行列式が負であるような 3 次直交行列　$\det A = -1$ であるような 3 次直交行列 A に対して上と同様な議論を行うと，

- A の固有値のひとつは -1 である．
- $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と実数 θ

$$A\boldsymbol{e}_1 = \cos\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta\boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{e}_2 = \sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3$$

  となるものが存在する．したがって A が定める線型変換は $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ に平行で原点を通る平面 Π の原点を中心とする回転と，Π に関する折り返しの合成である．

前回の講義の要約

■空間ベクトル　3 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の要素（空間ベクトル）を列ベクトルで表すこととする．$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ に対して，それらの内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ と定義する（高等学校の定義と違う）と，シュワルツの不等式 $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqq |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|$ が成り立つ．したがって，零ベクトルでない $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して $\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{|\boldsymbol{x}|,|\boldsymbol{y}|}$ を満たす θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ がただ一つ定まる．これを $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角という．高等学校流の定義との違いに注意すること．また，外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ が力学の授業で習ったように定義される．

■空間の直交変換　実数を成分とする 3 次正方行列 A が定める $\boldsymbol{R}^3$ の線型変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ が $\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して満たすとき A を直交行列という．とくに A が直交行列であるための必要十分条件は ${}^tAA = E$ となることである．

直交行列の行列式は 1 または -1 であるが，行列式が 1 である直交行列のことをここでは回転行列とよぶ．回転行列 A の固有値のうち一つは 1 である．A が定める変換は，固有値 1 に対応する固有ベクトルに平行で原点を通る直線を軸とした角度 θ の回転であることがわかる．ここで A の残りの固有値を $e^{\pm i\theta}$ とおいた．

■四元数の行列表示　複素数を成分とする 2×2 行列

$$\boldsymbol{1} = E, \quad \boldsymbol{i} = i\sigma_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = i\sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = i\sigma_3 = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると，対応

$$\boldsymbol{H} \ni t + xi + yj + zk \leftrightarrow t\boldsymbol{1} + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

は和・積の演算を保つ．従って四元数体 $\boldsymbol{H}$ は右辺の形の行列の集合と同一視することができる．

質問と回答

質問： 「内積は分度器つきものさし」とうい言葉が授業ででましたが，それは「長さで角度がわかる」ということでしょうか．$\langle x, y\rangle$ は長さをはかるだけではもとまらないような気がするのですが，ここのところが少し気になりました．

お答え： 余弦定理をつかう：$4\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2$.

質問： ベクトルの内積によって長さで角度もわかることはわかったのですが，なんでこのようなものができたのですか．

お答え： 様々な場面で現れますので，どれ，と特定することはできないと思います．力学の仕事，幾何学の正射影などが元の形と思われます．

質問： 「今日の内積の記号は $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ にする」とのことでしたが，次回は他の記号になるのですか？

お答え： なるかもしれません．

質問： 内積が分度器つきものさしなら，外積はどのようなものに例えられますか．

お答え： 「向きつき面積計」

質問： 2 次元のとき（図略）外積はこの平行四辺形の面積である，と高校のときならったのですが，3 次元のときの外積というのは $\begin{pmatrix} y-z\ \text{平面での平行四辺形の面積} \\ x-z\ \text{平面での平行四辺形の面積} \\ x-y\ \text{平面での平行四辺形の面積} \end{pmatrix}$ ということですか？（山田注：いろいろ省略）

お答え： 「$x-z$ 平面での平行四辺形の面積」とは「平行四辺形を $x-z$ 平面に正射影したものの面積」ということですかね．間違ってはいませんが，このように解釈します：$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ の (1) 大きさ $|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}|$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が張る平行四辺形の面積，(2) 向きは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ にともに直交し，$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ に向けて右ねじを回したときに進む向き．

質問： 高校では何故内積の定義を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\cos\theta$ （θ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角）の形にするのでしょう．

お答え： 現行の教科書にはないかも知れません（チェックしていません）が，以前，成分ごとの積の和で定義をしている教科書も存在しました．高次元化が眼中にないこと，図形的に意味がわかる方が初等的だろう，という判断などが理由だと思います．

質問： 内積について，$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で $\cos\theta$ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $|\cos\theta| \leqq 1$ となります．つまり $\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|} \leqq 1 \Rightarrow |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqq |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|$ です．これはシュワルツの不等式と一致するのですが，なにか関係があるのですか？

お答え： この部分，授業で説明したと思いますが. . . (1) 内積を高等学校の教科書流に $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\cos\theta$ (θ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角) と定義すれば，シュワルツの不等式はあたりまえ．(2) 内積を成分ごとの積の和，と定義すると，シュワルツの不等式が成り立つことが証明できるから，$\cos\theta = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle/(|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|)$ を満たす θ を二つのベクトルのなす角と定義する．

この二つの違い（文脈）を混同しないように．

質問： 3 次元の空間ベクトルに対して，内積を用いて 2 つのベクトルのなす角が定義されましたが，四次元ベクトルとみなせる四元数に対しても 2 つのベクトルのなす角は定義できるのですか？

お答え： 内積が定義でき，シュワルツの不等式が成り立ちますので定義できます．四元数の言葉で書けば，$\xi, \eta \in \boldsymbol{H}$ に対して $\langle \xi, \eta\rangle = \mathrm{Re}\,\bar{\xi}\eta$ ですね．

質問： 今回の講義中の｜・｜（絶対値）は内積の絶対値とベクトルの絶対値をとっています．この｜・｜は高校で使うものですか？（つまり：中略）もし違うもの，たとえば $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ で $|\boldsymbol{x}| = \max_{1 \leqq i \leqq 3} x_i$ とすれば，$\boldsymbol{x} = {}^t(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(1, 1, 1)$ とすれば $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = \sqrt{3}$, $|x|\,|y| = 1$ となりシュワルツの不等式は成り立ちません．（一般に内積とノルムが関係しないときはシュワルツの不等式が成立しないことを別の講義で習いました）．

お答え： 講義で習うも何も，シュワルツの不等式の証明をみれば $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = |\boldsymbol{x}|^2$ を使っていますよね．というわけで｜・｜は内積から定まる「ベクトルの大きさ」です．ちなみに，ご質問の中の「違うノルム」はノルムになりません．max の中身に「絶対値」がいりますね．

質問： 複素数のときは $z = x + yi$, $w = X + Yi$ としたとき，$-\operatorname{Im} z\bar{w} = \begin{vmatrix} x & X \\ y & Y \end{vmatrix}$ でしたが，四元数は ξ, $\eta \in \operatorname{Im} \boldsymbol{H} = \{xi + yj + zk \,|\, x, y, z\}$ （原文ママ），$-\operatorname{Im} \bar{\xi}\eta = \xi \times \eta$ となることでしたが，行列式と外積は何か関係がありますか？

お答え： $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$, $\boldsymbol{z} = {}^t(z_1, z_2, z_3)$ とするとき，

$$\langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

が成り立ちます（スカラ三重積の公式）．

質問： 3 次元での外積は定義されたんですが，n 次元での外積という概念はあるのですか？もしあるとしたら，それはどのようになるのですか？

質問： 一般に $\boldsymbol{R}^n$ で外積は定義できますか．できるとしたらそれはどのような定義ですか．

お答え： ここでの「$\boldsymbol{R}^3$ の外積」の文脈で言えば，次のように定義されます：$n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ に対して，

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{x}) \qquad \text{for all } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$$

を満たす $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ がただ一つ存在する（行列式の余因子展開の式を用いればよい）．この $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ の外積という．$n = 3$ の場合はたまたま 2 個のベクトルの外積が定義されますが，一般次元の場合はそうはなりません．

質問： $\xi, \eta \in \operatorname{Im} \boldsymbol{H}$ に付いて $\bar{\xi}\eta$ の計算結果に内積とベクトル積の形が現れるのは図形的にはどのような意味があるのですか？

お答え： 4 次元の図形ですから，初等的に「意味」を説明するのは難しいと思います．むしろ，「内積と外積が現れる」ということを図形的な意味と見なしたほうがよいのでは？

質問： 回転行列が定める線型変換は，固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとし，原点を通る直線のまわりの θ 回転（その他の固有値を $e^{i\theta}$ としたとき）ということでしたが，固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $-\boldsymbol{v}$ も固有ベクトルなので，回転軸の方向は $\boldsymbol{v}$ 方向と $-\boldsymbol{v}$ 方向の 2 つであり，また回転角を $+\theta$ と見るか，$-\theta$ と見るかという問題が生じますが，そこのところはどうするのですか？

お答え： $e^{i\theta}$ が固有値なら $e^{-i\theta}$ も固有値になりますので，$\boldsymbol{v}$ を $-\boldsymbol{v}$ に変えたときは θ を $-\theta$ に取り替えてやれば良いのです．（この資料の「前回の補足」参照．$\boldsymbol{R}^3$ の基底の「向き」に関することです）．

質問： 回転行列の定める軸，回転角度のときに，固有値 1 に対する固有ベクトルが軸なのは理解できますが，回転する角度が $e^{i\theta}$，$e^{-i\theta}$ における θ だとするとそれは一意に定まりますか？

お答え： 上の質問と回答参照．

質問： 回転行列が定める線型変換のところで行列から軸，角度を求める方法がよくわかりませんでした．詳しく教えてください．

質問： 回転行列のときに「残りは $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ 倍」とおっしゃった気がしますがよく分かりませんでした．

質問： 回転行列 A の固有値が 1 以外に $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ にどうしてなるのか詳しく説明してもらえますか？

質問： $\det A = 1$ となる直交行列 A 回転行列と授業では言っていましたが，$\det A = -1$ となる直交行列はどんな行列になりますか．

質問： 直交行列 A が $\det A = +1$ のとき回転の変換を表すのに対し，$\det A = -1$ のときはどのような変換を表すのでしょうか？ 2 次元平面では折り返しを表すので，やはり $\boldsymbol{R}^3$ での折り返しなのですか？

質問： 今日の講義では直交行列の中で $\det A = 1$ となるものを回転行列といいましたが，$\det A = -1$ となる直交行列は A が 3×3 の場合どのような変換になるのですか？

お答え： 今回の授業で説明します．

質問： A: 直交行列の固有値が 1 つのときの固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ ですが，残りの $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ のときの固有ベクトルも表すことができるのか？

お答え： 意味がわかりません．前半は「固有値 1 に対応する固有ベクトル」のこと？後半の「表す」は何にかかる？

質問： A は回転行列（ここでは）とありますが，他に何かあるんですか．

質問： 「$\det A = +1$ となる直交行列をこの授業では回転行列という」と決めましたが，一般的には何か別のよび方（名前）がついているのですか？

質問： $\det A = +1$ となる直交行列を回転行列とここではいうとしましたが，回転行列という言葉は便宜上定義しただけで，一般的には使われないのでしょうか．

お答え： とくに名前を付けないことも多いようです．

質問： 授業にて $\det A = 1$ なる直交行列を回転行列と「ここでは」いうということしたが，$\det A = -1$ なる A を回転行列といたときとはどういった点で差異がでてくるのでしょうか？

お答え： $\det A = -1$ となる直交行列を回転行列と呼ぶことはありません．

質問： A が直交行列で，$\det A = 1$ になる A を回転行列といいましたが，$\det A = -1$ のときの A には名前は付いていないのですか？

お答え： あまり聞いたことがありません．

質問： 直交行列は折り返しも表しますか．

お答え： たとえば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ はどうでしょう．

質問： 「$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる行列 A を直交行列という」とのことですが，この定義から考えるとむしろ等角行列とでも名づけるべきだと思うのですが，なぜ直交行列というのでしょうか．各列ベクトルが直交しているというのは後から明らかになる性質だと思うのですが．

お答え： そうですね．昔からそういっているのでしようがないのですが．ちなみに「等角行列」はまずいです．長さも保っていますから．

質問： 内積を保つという部分は $x \mapsto Ax$ にしても内積がいっしょということですか？

お答え： 授業で説明したとおり，線型変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ が内積を保つとは，任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle$ が成り立つことです．

質問： $\forall x, y \in \boldsymbol{R}^n$, $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \Leftrightarrow {}^tAA = E$ と本当になるのでしょうか．

お答え： なるのです．
$$\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle = {}^t(A\boldsymbol{x})(A\boldsymbol{y}) = {}^t x^t AA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}$$
が任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して成り立つのだから，これらに $\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトルを代入してやればわかる．

質問： 内積を保つということは，直交行列は回転以外に折り返し（x 軸，y 軸に関して対称に）も表す行列と考えてもいいんでしょうか．

お答え： 2 次の場合ですか？いいです．

質問： A: 4×4（実行列）について $\det A = 1$ となる直交行列を回転行列と言ったりしますか．もし，言うとすると回転のイメージをすることはできますか．（$A: 2\times 2$,3×3 のように）

お答え： あまり言わないと思います．ちなみに
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \qquad (\theta,\varphi\in\boldsymbol{R})$$
はご質問のような行列の例です．この行列が定める $\boldsymbol{R}^4$ の線型変換はどんなものでしょう．

質問： 線型代数の教科書を見ると，3 次元空間の回転行列 T は
$$T = Z_\varphi Y_\theta Z_\psi = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
とありましたが，Z_φ, Z_ψ と z 軸まわりの回転が 2 つある必要はあるのでしょうか？上の行列の積の意味も含めて教えてください．

お答え： たぶんいくつかの説明の仕方があるのでしょうが：回転行列を $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ と列ベクトルに分解すれば，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ は正の向きの正規直交系になる．このことを用いて回転行列の一般型をつくる．

- まず $\boldsymbol{R}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ を一つとり，第 3 列にもつ回転行列を作ることにする．$\boldsymbol{v}$ は単位球面上の点の位置ベクトルと見なせるから $\boldsymbol{v} = {}^t(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$ と表すことができる．（注：経度 φ, 緯度 $\theta - \frac{\pi}{2}$ と思っている．結論の式に合わせたかったので，前期の幾何学 B で扱ったパラメータづけと少し違っている．また，$\theta = 0$, π のときはこの式は球面の正則なパラメータ表示は与えないが，単位ベクトルを表示していることには違いないので，一般形と思ってよい）．
- $\boldsymbol{v}$ は ${}^t(0,0,1)$ を y 軸を軸として角 θ 回転させたあと，z 軸を軸として角 φ だけ回転したものである．したがって
$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v})$$
は第 3 列を $\boldsymbol{v}$ にもつ回転行列である．
- 第 3 列を $\boldsymbol{v}$ にもつ回転行列の第 1 列，第 2 列は $\boldsymbol{v}$ の直交補空間の正規直交基底で，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を回転させただけの自由度がある．したがって第 3 列を $\boldsymbol{v}$ にもつ回転行列の一般形は，上の $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を用いて
$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v})\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
とかける．

質問： $\boldsymbol{R}^3$ の回転がなす群の例として，代数で巡回群，二面体群，正多面体群を学びました．これらは SO(3) の有限部分群と同型になるのですが，逆に SO(3) の有限部分群でその 3 つと同型にならないものは存在するのでしょうか．

お答え： 存在しない，というのがコンウェイの定理だったような気が．ちなみに「3 つ」ではありません．

質問： A による線型変換で読みとりにくい情報を四元数を導入したら，回転角などがぱっと見て判断するのに四元数はつくられたんですか．

お答え： 日本語がなんだか変ですが．たぶん，違います．結果としてそのようになったんだと思います．

質問： 複素数では $z = x + iy$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ とすると $\mathrm{Re}\, z = x$, $\mathrm{Im}\, z = y$ となりますが，四元数の場合は $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{H} = \{xi + yj + zk \,|\, x, y, z \in \boldsymbol{R}\}$ というように i, j, k がついているのはなぜですか．$\mathrm{Im}\, \boldsymbol{H} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \boldsymbol{R}\}$ のようにはならないのですか．もしそう定義したのなら $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{H} = \{(x, y, z) \,|\, x, yh, z \in \boldsymbol{R}\}$ とはなぜ定義しないのですか．（虚部とは i のついている項の実数部分と考えていました）

お答え： 虚部にも四元数の演算を行いたいからです．そうすることにより，内積と外積が自然に現れるので．

質問： 外積で，$-\mathrm{Im}\, \bar{\xi}\eta = \xi \times \eta$ としていましたが，左辺はスカラーで，右辺はベクトルというのはおかしくありませんか?

お答え： 左辺は $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{H}$ に値をとります．ここでは $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}^3$ と同一視しているのでおかしくありません．

質問： $-\mathrm{Im}\, \bar{\xi}\eta = \xi \otimes \eta$ ということは $-\mathrm{Im}\, \bar{\xi}\eta$ に方向があるんですか？

お答え： “$\otimes$” ではなく “$\times$” です．$\mathrm{Im}\, \boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}^3$ と同一視していますので方向はあります．

質問： 「$\xi \leftrightarrow \boldsymbol{\xi}$」でのそれぞれの対応で，$|\xi| \leftrightarrow \sqrt{\det(\xi)}$ となっていましたが，実際 $|\xi|^2 = \xi\bar{\xi}$ なので

$$
\begin{aligned}
|\xi|^2 \leftrightarrow \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^* &= \begin{pmatrix} t + iz & -i(x + iy) \\ i(x - iy) & t - iz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - iz & -i(x + iy) \\ -i(x - iy) & t + iz \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t^2 + x^2 + y^2 + z^2 & 0 \\ 0 & t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{1}
\end{aligned}
$$

となるのではないですか？つまり「$|\xi| \leftrightarrow \sqrt{\det(\xi)}\mathbf{1}$」ということです．

お答え： おっしゃる通りですね．一つ指摘し忘れていました：「実数体 $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{H}$ に含まれている，とくに，数 1 は行列 $\mathbf{1}$ に対応しているので，混乱の恐れがない場合は行列「$t\mathbf{1}$」を「t」と書いてしまう」このような約束のもとでないと，たしかにご質問の対応は得られないですね．

質問： 四元数 ξ の行列表示が $\begin{pmatrix} t + iz & i(x + iy) \\ i(x - iy) & t - iz \end{pmatrix}$ であることを学びましたが，この行列の固有値を求めることで，何か面白いことが分かったりするのでしょうか．

お答え： この行列を $\boldsymbol{\xi}$ と書けば，固有値（複素数）の実部は $\mathrm{Re}\, \xi$,& 虚部は $\pm|\mathrm{Im}\, \xi|$.

質問： 四元数の行列表示のところで $\begin{pmatrix} u & \zeta \\ -\bar{\zeta} & u \end{pmatrix}$ と u, ζ を使われてましたが，u, v (アルファベット同士) や ζ, ω (ギリシャ文字同士）にしなかったことに理由はありますか（後略）．

お答え： 特にありません．

質問： 四元数 $\xi = t + xi + yj + zk$ に対して $\mathrm{Re}\xi = t$, $\mathrm{Im}\, \xi = xi + yj + zk$ とおくとき，その行列表示 $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} t + iz & i(x + iy) \\ i(x - iy) & t - iz \end{pmatrix}$ とありましたが，なぜこう書けるのかが分かりません．具体的には j と k がどこにいったのか，という点と，どういう経緯でこう書くこうとができるのかその導出を教えてください．

お答え： それを授業で説明したつもり．複素数を成分とする 2 次行列（成分は複素数であって四元数ではない）を考え，

$$
1 \leftrightarrow \mathbf{1} = E, \quad i \leftrightarrow \boldsymbol{i} = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j \leftrightarrow \boldsymbol{j} = i\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad k \leftrightarrow \boldsymbol{k} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

と対応づける．この対応のもと, 四元数 $t+xi+yj+zk$ は複素数を成分とする 2 次行列 $t\mathbf{1}+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ と対応づけられる．この行列を計算するとご質問の式になります．

質問： 四元数の行列表示で x, y, z の位置変換はできますか．

$$\left(\begin{pmatrix} t+iz & i(x+iy) \\ i(x-iy) & t-iz \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} t+ix & i(y+iz) \\ i(y-iz) & t-ix \end{pmatrix} \qquad \text{など}\right)$$

お答え： できません．

質問： $\{t\mathbf{1}+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \,|\, t,y,x,z \in \boldsymbol{R}\}$ も $\boldsymbol{R}^4$ と同一視できるのですか．

お答え： $\boldsymbol{H}$ と同一視でき，さらに $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}^4$ と同一視できるのですから同一視できます．

質問： 今回 σ_1, σ_2, σ_3 を具体的において四元数が複素数の (2×2) 行列で表せることを示してましたが，他の σ_1, σ_2, σ_3 でも同じことがいえるのでしょうか？

質問： 講義で扱った行列以外の行列を用いて四元数を表すことはできますか？

お答え： そのような組み合わせを作ることができます．たとえば σ_1, σ_2, σ_3 を適当に並べ替えたらどうでしょう．

質問： 四元数の行列表示は定数倍を除いて一意的ですか？

お答え： いいえ．上の質問と回答参照.

質問： 何故 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を直接定義せず，σ_1, σ_2, σ_3 を用いて定義したんですか？

質問： 四元数の行列表示のときに σ_1, σ_2, σ_3 （パウリのスピン行列？）を使ったのはなぜですか．やはり $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となって計算しやすいからですか．

お答え： σ_j が「由緒正しい」気がしたからです．この講義の目的からいえば最初から $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を定義すれば十分です．

質問： 四元数の行列表示で $\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ の i は四元数の i ではなく複素数 $\boldsymbol{C}$ の i だといわれましたが「四元数の i」ではいけないのでしょうか？

お答え： そうすると，四元数を「四元数を成分とする行列」で表すことになって，なんだか無駄な感じがしませんか？

質問： 四元数の行列表示を 2 次の正方行列でしましたが，これは 3 次，4 次の正方行列でも表せるのですか？また，もしできるとしてもそのように表示しないのは成分が多くてめんどくさいからですか？

お答え： たとえば，実数を成分とする 4 次行列で表すこともできます．しかし，2 次行列の行列式や逆行列の公式はすぐに覚えられますが，4 次行列の公式は面倒くさいですよね．

質問： 講義中に四元数を複素数の 2×2 行列と対応させました．複素数は実数の 2×2 行列と対応させられるのですから，四元数は実数の 4×4 行列と対応させることができそうです．そこで，四元数の行列表示の 1 に $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$i$ に $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をあてはめて，そのまま実数の 4×4 行列に対応させてみようと思ったのですが，正しい四元数の表示になるでしょうか．

お答え： それでよいはずです．

質問： 四元数以上の数についても 4×4 行列などにすれば行列によって数による表示と同様に表せますか．（八元数なども行列変換できるんですか）

お答え： 日本語が変です．それから「行列変換」という語が何をさしているかわかりません．八元数も行列表示できます．

質問： 四元数体を複素数体上の 2 次元ベクトル空間とみなすことはできますか．

お答え： 授業でちょっと言いましたが，できます．$(t+xi, y+zi) \in \boldsymbol{C}^2$ に対して $t+xi+yj+zk=$

$(t+xi)+(y+zi)j \in \boldsymbol{H}$ を対応させればよいですね.

質問： 今回，空間を 3 次元で考えてましたが，n 次元でも考えられますか？もし考えられるなら固有値も n 個でてくると思いますがどのような形になるのでしょうか.

お答え： ご質問の意味がわかりません.「n 次元空間の固有値」というものはないと思います.

質問： シュヴァルツの不等式を示す（以下略）

お答え： 何が質問なのかわかりません.

質問： 3×3 行列で 3 次元数ベクトル空間を表せるのなら 4×4 行列で 4 次元数ベクトル空間を表すことができますか？

お答え： 3×3 行列で 3 次元数ベクトル空間を表す，とはどういうこと？

質問： 四元数の解釈として別のものはありますか？

お答え： よく使われるのは授業で紹介したもの.「解釈」ですから他にも作ることはできると思いますが.

質問： 四元数を 3 次元以外の n 次元ベクトルとして表すことは可能ですか？

お答え： 一般に 3 次元ベクトルとして表すことはできないと思いますが.

質問： 数の拡張は一意的ではない．例えば十六元数だと，円十六元数と錐十六元数と呼ばれるものがあるようですが，このようなことで不都合なことは起こらないのですか？

お答え： 常に何を取り扱っているのかが明確になっていれば不都合は起きません.

質問： 数の拡張と同様に，一般的に環や体などを拡張するのにどのような方法がありますか.

お答え： 質問が大きすぎてどう答えてよいかわかりません.

質問： $\boldsymbol{R}^3$ における直行行列（原文ママ）は何個でも存在しますか？（$\boldsymbol{R}^2$ だと 2 個ですが）

お答え： $\boldsymbol{R}^2$ でも無限個存在します.

質問： $\boldsymbol{R}^3$ に演算として外積を入れると体にならないのが，単位元がないから，割り算ができないからではわかりません，という質問が出てくると思います.（代数 A で習っている自分たちは体にならないことはわかりますが，この授業しかきいていない人にとっては体の定義がわからないと思います）

お答え： 出てきませんでした.

質問： 四元数以上の数についても $a^2=-1, b^2=-1\ldots$ のような表し方で定められるのですか？

お答え： ちょっと意味をとりかねますが，$\boldsymbol{R}^n$ の基底の間の関係式を与えることで定義します.

質問： $\{t\boldsymbol{1}+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \,|\, t,x,y,z\in\boldsymbol{R}\}$ の次元は 4 ですか.

お答え： $\boldsymbol{R}$ 上 4 次元です.

質問： 四元数の行列表示で

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}=i\sigma_1,\quad \text{であり}\quad \boldsymbol{i}=i\sigma_1=\sigma_2$$

であるから，$\boldsymbol{j}=i\sigma_2=i\boldsymbol{i}$ となって，$\boldsymbol{j}$ を $\boldsymbol{i}$ で表せるので，別に $\boldsymbol{j}$ をわざわざおかなくてもよいのでは？

お答え： 2 つめの等式が間違っています.

質問： 3 次元における回転行列の線形変換の時の軸は $(x,y,z)=t(1,1,1)$ になるんですか？（もし説明されていたのであれば聞き取れていませんでした）．そうなると 2 変数が変わるだけでおかしい気もしますが.

お答え： おかしいです.

質問： 次回やる内容だと言われましたが，$\bar{p}xp$, $|p|=1$, $p=\cos\theta+\sin\theta\boldsymbol{v}$ となる p は一体何なのかわかりませんでした．特に今回の授業と何がつながっているのかがわかりませんでした.

質問： $p = \cos\theta + \sin \boldsymbol{v}$ (原文ママ）は何を表しているのかよくわかりませんでした.

お答え： 「前回の訂正」を参照してください．詳しくは今回やります.

質問： $\bar{p}xp = (-\bar{p})x(-p)$ が成り立つのは p と $-p$ が同じ回転だから，という説明がよく理解できませんでした．教えてほしいです.

お答え： 「だから」の向きが逆です．$\bar{p}xp = (-\bar{p})x(-p)$（これは当たり前）だから p と $-p$ は同じ回転を表すのです.

質問： 回転行列が定める線形変換のとこで，図もあったのですがよく分かりませんでした.

お答え： どう答えればいいの？

質問： A: $n \times n$ 行列，$\varphi_A(\lambda)$: 固有多項式は $= \lambda^n + \bigcirc\lambda^{n-1} + \ldots \det A$ の部分がよく板書できませんでした.

お答え： $\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + \bigcirc\lambda^{n-1} + \cdots \pm \det A$.

質問： 四元数を行列で表すのは具体的にどのような時に約立つのですか（原文ママ).

質問： 四元数を行列表示して，どのような時に応用するのですか？

質問： 四元数を行列表示する利点ってなんですか.

お答え： 関係式を満たすようなものが「本当にあるんですか」という質問に答えられる.

質問： 四元数や八元数が初等幾何，群論，理論物理などさまざまな応用があるとのことですがさらに具体的にどのような問題に使うことができますか.

お答え： 一つは今回の授業内容．それ以外は調べてご覧なさい.

質問： ハミルトンの四元数とクレインの 4 群はどこか似ていませんか？（以下，4 群についての説明がありますが省略）

お答え： Klein の 4 元群のことでしょうか.「クライン」とドイツ語読みするのが普通のようです．クラインの四元群ともいうようですね．四元数は複素数体上の 2 次元ベクトル空間と思うことができますが，虚数単位の代わりに $j^2 = 1$ という関係をもつ j を用いた「パラ複素数 para complex number」を考えることがあります（ほかにも様々な言い方がありますが．もちろん体にはなりません)．パラ複素数から四元数と同様に作られた代数系のうち，1 と「虚数単位」3 つからなる群が四元群です.

質問： 山田先生の講義を聞くと，自分が日頃いかに言葉を正確に使えていないかがわかります．先生は僕達の歳のころ，どのような姿勢で日常を過ごしておられたんでしょうか．先生のような魅力のある喋りが出来るようになるためのアドバイスを一言ください.

お答え： おだてても何も出ません．すごし方が皆さんと大きく違うとは思わないのですが，勉強したことをできるだけ自分の言葉で理解するようにしていたと思います．たとえば教壇に立つとして，教える内容を自分で（そらで）詳しく再現できるようにしておくと，ある程度説明に説得力がつきます.