2008 年 11 月 11 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

数学科指導法 II 講義資料 5

おしらせ

- この授業での質問に対する「回答」で不愉快な思いを抱いた方がいらっしゃったようです．今後，なるべく配慮するようにいたします．
- 11 月 11 日は「確認テスト」を 60 分，その後，質問などに関するコメントに充てます．
- 今回は「確認テスト」以外の提出物はありません．
- 11 月 18 日の授業にて，いままでの講義内容および質問の内容に関するコメントをつけます．さらにそれらの内容の「高等学校 3.5 年生」向けの教材化の案を提示します。
- 11 月 25 日の授業にて，提案された教材に関する議論を行い，それにしたがって指示された内容の問題を作成していただきます（問題作成演習）

前回の講義の要約

■空間の回転　行列式が $+1$（-1）であるような直交行列による線形変換は，ある直線に関する回転（ある平面に関する折り返しと平面内の回転の合成）であることを示した（線型代数の復習）．とくに，回転行列 A の固有値 1 に対する固有ベクトルで単位ベクトルとなるものを $\boldsymbol{e}_3$，それに直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1$ とおけば，$A\boldsymbol{e}_1=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2$, $A\boldsymbol{e}_2=\sin\theta\boldsymbol{e}_1-\cos\theta\boldsymbol{e}_2$, $A\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3$ となる．これは，原点を通り $\boldsymbol{e}_3$ に平行な直線を軸とした，$\boldsymbol{e}_3$ の指し示す側から見て正の向きに角度 θ の回転を表している．

■四元数による空間の回転　座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ を $\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ と同一視したとき，写像

$$\varphi\colon \boldsymbol{R}^3=\operatorname{Im}\boldsymbol{H}\ni\xi\longmapsto p\xi\bar{p}\qquad p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_3$$

は上の節で述べた回転と同じものを表している．

質問と回答

質問： 「実数はすべての四元数と可換である」ということをあたりまえのように用いていますが，これは定理なのですか？それとも定義ですか？

お答え： 「定義」です．あまり陽には説明していませんが，前々回の資料あたりに「$\boldsymbol{R}^4$ にその線型空間としての構造と適合した体の構造」といったのはこのことです．

質問： 転置の記号は ${}^tA$, A^t のどちらでも良いのですか？

お答え： どちらの記号を使う人もいます．しかし，同じ文脈で両方を混用してはいけません．

質問： “一般に単位四元数は $p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ の形で書く” とことを証明しようと思いましたが取りかかり方が分かりませんでした．まず何から始めていけばよいのでしょうか．そしてどのような流れで証明すればよいのでしょうか．

お答え： まず「証明すべきことを正確に書く」ことから始めます．

四元数 p が $|p|=1$ を満たすならば，ある実数 θ と単位ベクトル $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3=\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ （$|\boldsymbol{v}|=1$）が存在して $p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ と表される．

質問： 「単位四元数は一般に $p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3,\ |\boldsymbol{v}|=1,\ \theta\in\boldsymbol{R})$ の形で表される」ということでしたが，十分性は理解できるものの必要性（なぜ p がこのような形になるのか）が分かりませんでした．説明をお願いします．

質問： $p=t+xi+yj+zk=t+\boldsymbol{w}$（$\boldsymbol{w}\in\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$）とおくと $t^2+|\boldsymbol{w}|^2=|p|^2=1$ だから $t=\cos\frac{\theta}{2}$, $|\boldsymbol{w}|=\sin\frac{\theta}{2}$ となる実数 θ が存在する．ここで $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}/|\boldsymbol{w}|$ とおけばよい．（注：ここで $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ の場合は考えていない．この場合はどうすればよいか．）

質問： 単位四元数の定義は絶対値が 1 の四元数でよろしいですか．（聞き逃しでしたらすみません）

お答え： よろしいです．

質問： 単位四元数は $p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ とありましたが，単位複素数や実数は何とかけますか？

質問： 単位四元数は $p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ という形で表されるが，単位複素数はどういう形で表されますか？ $p=\cos\theta+i\sin\theta$ の形ですか？

お答え： 単位複素数は $\cos\theta+i\sin\theta$, 単位実数は ±1 では？

質問： 虚四元数とは何ですか．虚四元数も空間の回転を表すのですか？

質問： 結局，虚四元数ってなんですか？

質問： 虚四元数とは何ですか．

質問： 虚四元数とは何ですか．

質問： 講義資料には今回「虚四元数と座標空間」と書いてありましたが，「虚四元数」とはどのようなものですか？授業でそのことについてふれてなかったと思いますが（勘違いだったらすいません）．

お答え： $\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ の元のことです．

質問： 今回の講義で単位四元数 p を $p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ $(\theta\in\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{v}\in\operatorname{Im}\boldsymbol{H},\ |\boldsymbol{v}|=1)$ と定義しましたが，$\frac{\theta}{2}$ でなく θ ではダメなのでしょうか．実際 p を θ を用いて定義しても $|p|=p\bar{p}=(\cos\theta+\sin\theta\boldsymbol{v})(\cos\theta-\sin\theta\boldsymbol{v})$ となって $|p|=1$ を満たすし，その後の空間の回転においても $\frac{\theta}{2}$ とおく理由はないと思います．

質問： なぜ $p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ とおいたのですか．$p=\cos\theta+\sin\theta\boldsymbol{v}$ だと何か都合が悪いのですか．

質問： この前は $p=\cos\theta+\sin\theta\boldsymbol{v}$ としていたのに，今回は $p=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ としてたけど，θ と $\frac{\theta}{2}$ で違いはありますか？

お答え： $p = \cos\theta + \sin\theta\boldsymbol{v}$ を用いて回転を表すこともできますが，その時の回転角は 2θ になります．回転角を θ にしたかったので $\frac{\theta}{2}$ とおきました．

質問： 最後に先生が $\bar{p}\boldsymbol{x}p$ を $p\boldsymbol{x}\bar{p}$ に訂正していましたが何がまずかったのでしょうか．

お答え： 回転角が $-\theta$ になってしまったので．

質問： 正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ をとるところで $V = \{v \in \boldsymbol{R}^3 \mid \langle e_3, v\rangle = 0\} \subset \boldsymbol{R}^2$ は $V = \boldsymbol{R}^2$ ではだめなのですか．（2 次元部分空間）の部分は $\boldsymbol{R}^3$ の部分という意味ですよね．

お答え： 書き損じかもしれません．$V \subset \boldsymbol{R}^3$ で $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間です．申し訳ない．（次元定理の議論をしましたね）．

質問： $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = -\overline{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_3 = -\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\rangle + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3$ のように，実部が内積のカタチに，虚部が外積のカタチに書けることがとても興味深いです．普通に計算すればごく当然のことのような気もしますが，内積，外積を定義した人はここまで考えていたのですか？それとも，内積や外積の形で掛けることには「計算したらこう書けた」という以外に深い意味があるのですか？

お答え： たぶん「計算したらこう書けた」感じなんだと思うのですがよく知りません．

質問： $A(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2) = e^{-i\theta}(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2)$ で $e^{-i\theta} \in \boldsymbol{R}$ だと値が定まらないというのがよくわからなかったので教えてください．

お答え： たぶん下の質問と回答のことだと思うのですが．あるいは $e^{-i\theta} \in \boldsymbol{R}$，すなわち，$e^{i\theta} = \pm 1$ の場合，直交行列の固有値は重根をもつので，固有ベクトルが任意性をもつことになる，ということでしょうか．いずれにせよ，質問の文章から推測するに，講義についていけていないようです．きちんと復習してください．

質問： $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は回転を表しますが， φ も行列として表すことができますか？

お答え： いきなり φ では文脈がないのでわかりませんが，推測するに，講義で述べたやつですね．回転行列による線型変換と同じものですから，もちろんそうです．といいますか，そういうことを講義したのです．

質問： $\boldsymbol{R}^3$ を $\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ と同一視したことで，$\varphi\colon \operatorname{Im}\boldsymbol{H} \ni \boldsymbol{x} \mapsto p\boldsymbol{x}\bar{p} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ ができましたが，もし同一視しなければ φ という写像はできず四元数による回転の表示はできないのですか？

お答え： そうです．同一視しなければ $\boldsymbol{R}^3$ の要素（ベクトル）に四元数を「掛ける」ことはできません．

質問： 空間の回転を一般的に捉えようとする場合，四元数を用意してそこから今回のような写像 φ を考えるしかないのですか．

お答え： 講義の前半で何をやりましたか？

質問： $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をとる際に，$\boldsymbol{e}_1$ に条件にあうものを勝手にひとつとってくるように見え，一意的なようでなくて気持ち悪くないか？といったことを話されていましたが，あれは結局その後にとる $\boldsymbol{e}_2 (= \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1)$ との組としてみたときに一意的にみられるから大丈夫，いう事で良いのでしょうか？（質問自体があいまいですみません）

お答え： そうではないのです．$\boldsymbol{e}_1$ は任意性があります．したがって $\boldsymbol{e}_1$ のとり方によって $\boldsymbol{e}_2$ も変化します．気持ち悪いといったのは次のこと：$\boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2$ は，考えている回転行列の固有値 $e^{i\theta}$ に関する固有ベクトルである．θ が π の整数倍でないとき，固有値は単根であるから，固有空間の次元は 1 次元．すると固有ベクトルに自由度がでてきてはまずいのでは？という疑問を述べたわけです．結論は「$\boldsymbol{e}_1$ を $\boldsymbol{a}_1$ に取り替え，$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{a}_1$ とすれば，$\boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{a}_1 - i\boldsymbol{a}_2$ は $\underline{\boldsymbol{C}\text{ 上}}$1 次従属だからおかしくない」ということでした．

質問： $\varphi\colon \boldsymbol{R}^3 = \operatorname{Im}\boldsymbol{H} \ni \vec{x} \mapsto p\boldsymbol{x}\bar{p} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^3$ が空間の回転をあたえていることを示すところで，$\boldsymbol{e}_3 = [V]$, $\boldsymbol{e}_1$: $\boldsymbol{v}$ に直交する単位ベクトル，$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1$ に対して $\varphi(\boldsymbol{e}_2)$ は

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{e}_2) &= p\boldsymbol{e}_2\bar{p}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_3\right)\boldsymbol{e}_2\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_3\right)\\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_2 - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 - \sin^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$ と，$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$ より，$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{e}_2 - 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_1$ でいいのですか.

お答え： いいのです.

質問： $\varphi(\boldsymbol{e}_2)$ を考えるときに $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$ で得た $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$ を使って (1) $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$ の両辺に右から $\boldsymbol{e}_3$ を掛けると $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3^2 = -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3, \therefore \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{3}_3 = \boldsymbol{e}_1$, (中略) として計算したのですが，これで良いですか.

お答え： よいです.

質問： 四元数による回転表示のところの $\varphi(\boldsymbol{e}_1)$ の計算についてです．$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = -\overline{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_3 = -\langle\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\rangle + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3$ というのがありましたが，なぜ $-\overline{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_3 = -\langle\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\rangle + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3$ となるのかわかりません.

お答え： 前回（前々回）やった：$\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{R}^3$ と同一視するとき $\operatorname{Re}(\bar{\xi}\eta) = \langle\xi, \eta\rangle$, $\operatorname{Im}(\bar{\xi}\eta) = -\xi \times \eta$.

質問： 前回の証明の最後の方に "$A\boldsymbol{e}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + b_1\boldsymbol{e}_3$ とかくと $b_1 = \langle A\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\rangle = 0$ から $b_1 = 0$" というところで，なぜ $b_1 = \langle A\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\rangle$ とできるのかイマイチ分かりませんでした.

お答え： 線型代数でやりませんでしたっけ.「両辺に $\boldsymbol{e}_3$ を内積する」.

質問： 四元数の回転表示は一意的ですか．もしそうなら証明の方針を教えてください.

お答え： 一意的ではありません．二つの単位四元数 p と $-p$ は同じ回転を表します．しかし，それだけです．すなわち $\pm$ の任意性を除いて一意になります.

質問： $\varphi\colon \boldsymbol{R}^3 = \operatorname{Im}\boldsymbol{H} \ni \boldsymbol{x} \mapsto p\boldsymbol{x}\bar{p} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^3$ この φ が空間回転を表していることは証明から分かったのですが，なぜ $\varphi(\boldsymbol{x}) = p\boldsymbol{x}\bar{p}$ とすれば回転が表せると分かったのですか？ $\varphi(\boldsymbol{x} = p\boldsymbol{x}\bar{p}$ とすれば良いと分かるまでの過程を教えてください.

お答え： 最初に考えた人がどう考えたかは分かりません．結論だけ書いて「回転だ」ということを示してしまえばいいのですから，論文や書物に発見した経過を書くことはあまりないのです．この形を「再発見」する，ということはよい経験になるでしょうが，その過程も人それぞれ，個性のようなものがでるところだと思います.

一つの道だけ：$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ の「四元数としての 1 次変換」を考える．四元数の積が可換でないことに注意して任意の $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ に対して $a\boldsymbol{x}b \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ となるような四元数 a, b の組を考えると $ab \in \boldsymbol{R}$ でなければならない．適当に a, b に実数を掛けることで $b = \bar{a}$ としてよい．さらに，ベクトルの大きさを保つためには $|a| = 1$ でなければならない．すると $\boldsymbol{x} \mapsto a\boldsymbol{x}\bar{a}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の直交変換を与えている．この固有ベクトルを頑張って求めてみれば，講義で扱った p の形が現れる.

質問： $\varphi\colon \boldsymbol{R}^3 = \operatorname{Im}\boldsymbol{H} \ni \boldsymbol{x} \mapsto p\boldsymbol{x}\bar{p} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^3$ という写像 φ は 3 次直交行列 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ をもとにしてつくられたのですか.

お答え： なにをもって「もとにしてつくられた」というのでしょうか.

質問： 3 次回転行列 A, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$: $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底,

$$A\boldsymbol{e}_1 = \cos\theta\boldsymbol{e}_1 - \sin\theta\boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{e}_2 = \cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2, \qquad A\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$$

でした．上より

$$\varphi(\boldsymbol{e}_1) = \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{e}_1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_2,$$
$$\varphi(\boldsymbol{e}_2) = -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{e}_2, \quad \varphi(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3$$

A と φ はもう少し似ていていいのではないかと思いました．φ の方が計算間違いですか？

お答え： 文章になっていません．形が違いすぎるといったって倍角公式を使えば似てるでしょう．ちなみに A の方が計算間違いのようです．

質問： 四元数による回転のイメージがまったく浮かばないのですが，どんな感じなのですか.

お答え： どういうものを「イメージ」と思っていますか？イメージが浮かばない場合はたくさん実例をつくって計算してください．そのうちにイメージが浮かんできます．じっとしていてもだめです.

質問： $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{H})$ ですか？

お答え： 未定義用語がいっぱいでてきていますが，φ は講義で紹介した空間の回転ですね．ここでの Aut の定義は何ですか？

質問： 3 つの固有値が実のとき, (中略) の 4 通りというところの説明がききとれませんでした．申し訳ありませんが，もう一度説明お願いします.

お答え： 3 次直交行列の 3 つの固有値が実のとき，固有値は ± 1 のいずれかであるから，(1) 行列式が $+1$ のとき，固有値の組み合わせは $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$ の 2 通り，(2) 行列式が -1 のとき，固有値の組み合わせは $(1,1,-1)$, $(-1,-1,-1)$ の 2 通りとなる.

質問： n 次直交行列について，その固有値は偶数では $e^{i\theta_1}$, $e^{-i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$, $e^{-i\theta_2}$, ... 奇数では ± 1, $e^{i\theta_1}$, $e^{-i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$, $e^{-i\theta_2}$, ... となるという旨のことをおっしゃっていました．前回分の質問と回答にあった

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \theta, \varphi \in \boldsymbol{R}$$

を参考にして考えると，偶数 $n = 2m$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の線型変換は，各原点を基準に x_1-x_2 平面に対して θ_1 回転，x_3-x_4 平面に対して θ_2 回転，... x_{2m-1}-x_{2m} 平面に対して θ_m 回転させることを表していそうです．奇数 $n = 2m+1$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の線型変換はある軸を基準に x_1-x_2 平面に対して θ_1 回転，... と回転させることを表していそうですが，これでいいでしょうか？

お答え： 少し正確ではありません．最初の「偶数のとき」は「n が偶数のとき」,「線型変換」は「直交変換」ですね．その上で，n が偶数のとき，行列式が正の直交行列で表される直交変換は，適当に座標軸を取り替えれば ご質問にあるような回転の合成となる... ということです.

質問： A: 4 次直交の場合は少なくともひとつ実根をもつのですか？ 4 つとも虚根の場合もあるんですか？

お答え： 上の質問の中程にある 4 次行列についてしらべてごらんなさい.

質問： $\boldsymbol{R}^n$ における「回転」や「折り返し」はどの様に定義されているのですか.

お答え： 一般には定義しません．上の事情によります.

質問： $p\boldsymbol{x}\bar{p}$ という形は行列の対角化の形と似ていますが，何か関係があるのですか？

お答え： 四元数を行列表示すると，p の共役は「共役転置」行列 p^* になります．とくに p が単位四元数であると，対応する行列はユニタリ行列になり，共役転置は逆行列になります．したがって，ご質問の形は $p\boldsymbol{x}p^{-1}$ の形になり，相似（共役）な行列を求めていることになります．

質問： 単位四元数 p の行列表示を $P \in \mathrm{M}_2(\boldsymbol{C})$ すると，p が単位四元数 $\Leftrightarrow p\bar{p} = 1 \Leftrightarrow p^t\bar{p} = E \Rightarrow P \in \mathrm{U}(2) = \{2$ 次ユニタリ行列全体 $\}$ であり，さらに $\det P = p\bar{p} = 1$ なので $p \in \mathrm{SU}(2) = \{2$ 次ユニタリ行列で行列式 1 のもの全体 $\}$ であることがわかります．一方，今回の講義で $A \in \mathrm{SO}(3)$ の固有値を 1，$e^{\pm i\theta}$, 1 に対する A の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると，$p = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ は単位四元数でかつ $\boldsymbol{x} \mapsto p\boldsymbol{x}\bar{p}$ と $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ は等しいことを学びました．ということは SU(2) と SO(3) の間にも何か深いつながりがあるのでしょうか．

お答え： あるのです．単位四元数 p による回転は，直交行列に対応しているので，写像 $\mathrm{SU}(2) \mapsto \mathrm{SO}(3)$ ができたことになる．とくに，これは全射な群準同型で，その核は $\pm E$ となることが（すこしだけ頑張れば）証明できる．したがって SO(3) は $\mathrm{SU}(2)/\pm E$ と同型である．

質問： 単位四元数 p によって定まる写像 $\varphi_p\colon \mathrm{Im}\,\boldsymbol{H} \to \mathrm{Im}\,\boldsymbol{H} : x \mapsto px\bar{p}$ が空間の回転を表すということは講義で確認しましたが，逆に回転を表す写像はすべてこの形で書けるということは言えるのですか？

質問： 今回の授業で $\varphi_p(x) = px\bar{p}$ が四元数による回転の表示だということがわかりましたが，逆に四元数で回転を表示する場合はこの形しかないのですか？もし証明をしなければならない場合はヒントください．

お答え： 次のことを実行することで示せます：(1) $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換が回転であるための必要十分条件は，右手系の正規直交系を右手系の正規直交系に移すことである。(2) 回転の線形変換で $\boldsymbol{R}^3$ の基本ベクトルがなす正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が右手系の正規直交系 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に移るとする．このとき，$p\boldsymbol{e}_j\bar{p} = \boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ となるような $p \in \boldsymbol{H}$ $(|p| = 1)$ を見つける．

質問： 空間の回転と言われているものは，実質的には x と y が回転し，z はそのままか対称移動している，平面の回転と同じであるように感じました．x, y, z がすべて回転するような四元数はないのでしょうか．

お答え： 適当に座標軸をとればある座標（ご質問のように z 座標にとる）を不変にできます．（回転，すなわち行列式が正であるような直交行列で表される変換）であれば $z \mapsto -z$ にはなりません）<u>必ずそうなる</u>のは，回転行列の固有値の 1 つが 1 であるということによっています．

質問： 四元数の回転とは何か，という問いを計算によって求めていきましたが，行列の様に考えると，φ の回転は図で書くと k 軸を中心に θ 回転させたもの，で間違ってはいませんか？最後の部分が聞き取りづらかったのでお願いします．

お答え： まず「四元数の回転とは何か」なんてことはやっていません．「空間の回転を四元数で表示してみよう」ということだと思いますが．後半は間違っています．原点を通り $\boldsymbol{v}$ に平行な直線を軸とする回転です．ところで「行列の様に考えると」といってどこにも行列がでていないのですが．

質問： $\varphi\colon \boldsymbol{R}^3 = \mathrm{Im}\,\boldsymbol{H} \ni \boldsymbol{x} \mapsto p\boldsymbol{x}\bar{p} \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^3$ が $(*)$ の性質をもつから回転を表すとの結論ですが，ということは φ が回転を表す $\Leftrightarrow (*)$ ということですよね．

お答え： $(*)$ というのは正規直交基底の変換公式ですよね．それならそういうことです．回転行列の変換の際にそのように説明しましたね．

質問： $A(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} & B & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （ただし A は 3×3 直交行列，$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ は正規直交

基底で $\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{R}^3$，$B$ は 2×2 行列）で B も直交行列になる，という証明で，先生は一瞬で分かるとおっしゃいましたが，私はどうしても以下のような証明を時間を掛けてやっていみないとわかりませんでした．（中略）もっと良い方法があったら教えてください．

お答え： (1) 直交行列の積は直交行列 (2) 直交行列の逆行列は直交行列 (3) $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底を並べてできる行列は直交行列．これだけですぐにわかると思いますが．

質問： 次元定理は，授業では 3 次元から 1 次元の写像について考えましたが，n 次元についてこの次元定理を考えることができるのですか．

お答え： 1 年生で使った線型代数の教科書参照．

質問： 1 次元は直線，2 次元は平面，3 次元は空間，4 次元は 3 次元プラス時間ですか？ n 次元って具体的にどういうものですか？

お答え： $\boldsymbol{R}^n$ はあくまでも n 個の実数の組全体の集合であって，数学としてはそういうものに意味や物語をつけません．$\boldsymbol{R}^3$ であっても，それはあくまでも 3 つの実数の組全体の集合であって，「空間」が $\boldsymbol{R}^3$ で表すことができるから，直線とか平面という言葉を使っているだけです．注意です：空間を $\boldsymbol{R}^3$ で表すことができる，といっています．$\boldsymbol{R}^3$ は空間である，などとは言っていませんし，言うべきではありません．「数学としては」というわけで，考える問題によって $\boldsymbol{R}^n$ にどんな意味をつけても構わないわけです．通常，世界（時空）を考えるならば，ご質問の通り，空間次元 3 に時間軸を加えて「4 次元時空」を考えるのがよいでしょう．相対性理論の舞台はそれ．一方，ニュートンの運動方程式を考える場合，質点点の座標 (q_1, q_2, q_3) と運動量 (p_1, p_2, p_3) を合わせた 6 次元空間を考えるのが自然と思われます．だからといって 6 次元空間とはそういうものに限るわけではないので，数学的な理論を扱う場合は，変に意味づけをしないほうがよいのです．

ところで $\boldsymbol{R}^n$ は n 個の実数の組全体の集合である，というのは十分に具体的に見えます．具体的に見えないようだと，この先の数学の学習が難しくなると思います．

質問： 上の証明で（山田注：略．回転行列が表す線型変換のの，ある正規直交系に関する行列表示のこと）

$$A(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{で} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

が直交で $\det = 1$ だから $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ だと講義では言ってましたが，$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ じゃダメなのですか？

お答え： だめじゃありませんが，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

なので，どちらかを標準とすればもう一方は不要ですね．「反時計まわり」の回転を表したかったのでご質問の形に統一しています．

質問： 四元数 p による回転に引き続いて四元数 q という回転を行うときに，その回転は四元数 pq という回転になるのではないでしょうか．

お答え： 惜しいです．四元数 qp です（四元数の積は可換ではなかったことを思いだしましょう）．

$$q(p\boldsymbol{x}\bar{p})\bar{q} = (qp)\boldsymbol{x}\bar{p}\bar{q} = (qp)\boldsymbol{x}(\overline{qp})$$

です．ここで，四元数の公式 $\overline{xy} = \bar{y}\,\bar{x}$ を用いました．

質問： $\varphi\colon \operatorname{Im}\boldsymbol{H} \ni \boldsymbol{x} \mapsto p\boldsymbol{x}\bar{p} \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ $(p = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v})$ は 3 次直交行列の $\det = +1$ の場合に対応していますが，$\det = -1$ の場合の折り返しなども四元数によって表示できますか．

お答え： 複素数による平面の折り返しの真似をしてご覧なさい．$\boldsymbol{x} \mapsto \overline{\boldsymbol{x}}$ を用いればできます．

質問： 四元数による回転の表示で $p = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{v}$ とおいているのですが，これは $z = \cos\theta + i\sin\theta$ の形と似ているように思います．何か関係はあるんでしょうか．

お答え： たとえば z 軸に関する回転，すなわち $\boldsymbol{v} = k$ の場合を考えてごらんなさい．とくにこれは xy 平面上の回転ですから，複素数で表したものと比べることができますね．

質問： 実際に高校生向けに四元数の演習問題をつくるにあたって行列式や固有値を用いた問題は避けるべきですか．

お答え： それはコース（教科書？）をどう作るかによります．次回提示しますが，固有値や行列式を避けるような形で教科書らしきものを作る予定です（いろいろと工夫がいりますが）．

質問： 四元数による回転表示は $\operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{R}^3$ と同一視していうのでわざわざ四元数で回転させることは有用なのでしょうか．

お答え： 実際に 3DCG などでは使われています，ということを言ったつもりでしたが．

質問： 四元数での回転表示はどのような時に便利なのでしょうか．

お答え： 軸と回転角を指定して回転行列を求めてみればわかる．

質問： $\bar{p}\boldsymbol{x}p$ は $-\theta$ 回転を表すと講義中におっしゃいましたが，どうして $-\theta$ 回転を表すのですか？

お答え： $p\boldsymbol{x}\bar{p}$ が θ 回転を表す，という理由は納得していますか？その説明に相当することをそのまま $\bar{p}\boldsymbol{x}p$ に対してやってみればすぐにわかります．

質問： 四元数の虚部を $\boldsymbol{R}^3$ とみなしたときに，実部は何か役に立つときがあるんですか．

お答え： たとえば $\boldsymbol{R}^3 = \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$ の元 ξ, η に対して $\bar{\xi}\eta$ の実部は「内積」と解釈できる，というのは何回も言ったけれど．

質問： 最初間違って $\bar{p}\boldsymbol{x}p$ と板書されたのは “物理屋流” ですか？数学屋の端くれでも $\varphi\colon \boldsymbol{x} \mapsto \bar{p}\boldsymbol{x}p$ で考えることもあるということですか？

お答え： 単なる間違いです．

質問： $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, \dots, v_n) \in \boldsymbol{C}$ （原文ママ）に対して $|\boldsymbol{v}| = \cdots = \sqrt{{}^t\boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{v}}}$ これに対して ${}^t\boldsymbol{v}$ と $\overline{\boldsymbol{v}}$ の順番が数学屋と物理屋で異なるそうですが，他に同様のものに対して違う分野で書き方が異なるものはありますか？

お答え： ${}^t\boldsymbol{v}$ と $\overline{\boldsymbol{v}}$ の順番が違うのではなく共役をつける場所が違う．ご質問に関しては，たとえば電気屋さん（とくに交流理論）では虚数単位を j と書きます．

質問： $\operatorname{Im}\xi = \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})$ とありましたが，共役と虚部はどちらを先に定義するのが一般的ですか？

お答え： わかりません．定義されてしまえば渾然一体なので．

質問： $\operatorname{Im}\bar{\xi} = \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi}) = xi + yj + zk$ ですが，$\operatorname{Re}\bar{\xi}$ は $\operatorname{Re}\bar{\xi} = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}) = t$ でよいでしょうか．

お答え： 前半が違います．$\operatorname{Im}\bar{\xi} = \frac{1}{2}(\bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}}) = \frac{1}{2}(\bar{\xi} - \xi) = -\operatorname{Im}\xi$ です．

質問： 複素数の場合は，$z = 2 + 3i$ に対して $\operatorname{Im} z = 3$ のように虚数単位は書かずに “3” だけ書きますが，四元数の場合は $\xi = 2 + 3i + 4j + 5k$ に対して $\operatorname{Im}\xi = 3i + 4j + 5k$ ですよね．四元数の i-成分，j-成分，k-成分まで細かく見ず，虚部は虚部としかとらえていない（各成分 1 つだけ取って見ることを重要だと思っていない）のでしょうか？複素数の場合は “虚数単位” は i しかないから $\operatorname{Im} z = 3i$ の i を省略していうのでしょうか．

お答え： $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{H}$ の「各成分」を見るというよりそれを $\boldsymbol{R}^3$ とみなしたいということです．少なくとも今回の話題にはそれが最適（前回もそういう質問があったような気がします）．

質問： $\det A = -1$ の時は $\det A = 1$ の時と逆になるだけのような気がするんですが，違うんですかね？

お答え： 何が逆になるのかわからないのでお答えできません．

質問： p が $\boldsymbol{R}^3$ の回転を表していることは分かりました．$\boldsymbol{R}^2$ の回転は $\boldsymbol{C}$ の回転と見れば，$e^{i\theta} \in \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}$ の回転の作用素，と見れば $e^{i\theta}$ は $\boldsymbol{C}$ の中に入っていますが，p を $\boldsymbol{R}^3 = \mathrm{Im}\,\boldsymbol{H}$ の回転の作用素と見たときは，p は $\boldsymbol{R}^4 \in \boldsymbol{H}$ の中に入っていますが，$\boldsymbol{R}^3$ の中には収まりません．これは不思議な感じ—＼がするのですが，どういうことですか．

お答え： どういうこと，といってもそうなるだけではあるのですが...2 次の回転行列全体は 1 パラメータで表される図形（業界用語では 1 次元多様体，点を 1 つのパラメータで指定できる）で $\boldsymbol{R}^2$ の単位円と対応づけることができました．ところが 3 次の回転行列全体は 3 パラメータで表される図形です（前回の質問のどこかにありましたね）．とくに $\boldsymbol{R}^4$ の中の単位球面（の対蹠点を同一視したもの；業界用語では 3 次元実射影空間）と同一視されます．作用する空間は $\boldsymbol{R}^3$ なのですが，同じ 3 次元でも 3 次元球面は $\boldsymbol{R}^3$ の中に入らないので，ご質問のようなことになる，ということでしょうか．

質問： 四元数の回転の表示も結局は 3 次元での話のようにしか理解できないのですが...四元数なのに 4 次元での回転の表示はできないのですか？

お答え： 一つの四元数では $\boldsymbol{R}^4$ のすべての回転を表すことはできません．実際，4 次の直交行列は 6 次元分の自由度がありますので，パラメータの数がたりないのです．二つの四元数を用いて表すことはできます．

質問： $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^3$ とみなすと虚四元数をベクトルにおくことができ便利ですが，$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^4$ とみて，ベクトルと四元数そのものを同等とみるようなことはないのですか．

お答え： あります．

質問： 四元数を使って空間の回転を与える写像が作れることを学びましたが，他にどういう場面で使われますか？個人的に，$t + xi + yj + zk$ の t が時間を表しているようで，気になります．

お答え： 特殊相対性理論の舞台である “Minkowski 空間” と対応つけることはできます．そのときは t を時間座標と思います．

質問： 外積は 1 次元，3 次元，7 次元で定義できる．これは二元数，四元数，八元数と関係あるらしいのですが，1 次元の場合の外積はどのように定義されますか？

お答え： 先週の質問と回答とは違う意味の外積ですね．どういう意味の外積であるか説明できますか？

質問： 8 元数も行列表示できるそうですが，8 元数による回転表示はできますか．

質問： 2^n 元数も回転表示できるんですか．

質問： 2^n 元数が行列表示できるとおっしゃっていましたが，回転表示も考えられますか？

質問： 他の元数 (2^n 元数 $(n \in \boldsymbol{Z})$) でも回転表示できるんですか？

質問： 他の元数や四元数以外でも回転表示できるものはどのくらいありますか？

お答え： 回転表示とはどういうもののことなのか，きちんと書いてください．

質問： 複素数，四元数で回転について考えてますけど，他の〇元数でも回転の表示はキレイな形で書けるんですか．

質問： 四元数によって空間の回転を表示することができることは分かったのですが，では八元数でも空間の回転を表示することはできるのでしょうか？もし，できたらそれはどのような表示になるのでしょうか？

お答え： キレイに書ける（特別な）回転（直交変換）がありますが，任意の直交変換が今回やったように表示できるわけではありません.

質問： 八元数にも回転を定義することは可能ですか.

お答え： 今回の授業では「四元数に回転を定義する」ということはやっていませんが，「にも」というのはどういう意味ですか.

質問： もし A が複素数の 3 次行列だった場合はどんな変換を表すのでしょうか？

お答え： $\boldsymbol{C}^3$ の線型変換.

質問： 3 次元での回転って原点からの距離を変えない写像のことですか？

お答え： いいえ．ここでは回転行列で与えられる線型変換のことです.

質問： 単位四元数の実部は回転によって変化しないのか？

お答え： 単位四元数を回転する，っていうのはどういうことでしょう.

質問： 先生はブラインドタッチが得意なんですか？（いつもプリント数が多いので）

お答え： 普通です．ちなみに「ブラインド（盲目）タッチ」は差別用語らしいです．Touch typing といいます.

質問： 質問に対する採点基準はどのようなものですか．例えばどのような質問をすれば高得点を得られますか.

お答え： 基本的に「印象点」，興味深い（とこちらに伝わった）質問の評価は高いのですが，

評価の高い質問：講義の復習をし，自分の手と頭を使って確かめた上で出された質問.

評価の低い質問：手を動かしてみれば簡単にわかる質問，1 年生の微積分・線型代数で学ぶ程度の内容の質問，文になっていないもの.

質問： 四元数の行列表示で $\sigma_1 = \ldots$ (中略) を用いて $\boldsymbol{i} = i\sigma_1$ (中略) と対応させましたが，$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 \ldots$ であり，これらは i, j, k たちの性質と一致しているので，$t + xi + yj + zk$ に $t\mathbf{1} + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$ を対応させてもよいと思うのですがだめですか.

お答え： だめです．$\sigma_j^2 = E$ となり，$i^2 = -1$ のような関係を満たしていません.