

1 平面ベクトルと空間ベクトルの外積

数学 B では、平面ベクトルや空間ベクトルの計量—長さ・角度—に関する内積の性質と使い方を学んだ。この節では、ベクトルの計量に関わるもう一つの積である外積の性質について学ぶ。

1.1 平面ベクトルの外積

■ **平行四辺形の面積と外積** 平行でない 2 つの平面ベクトル \vec{a}, \vec{b} に対して、 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ となる平面上の点 O, A, B をとるとき、線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形 OACB を \vec{a}, \vec{b} が張る平行四辺形という。(図 1.1)。

この平行四辺形の面積 S を求めよう。角 AOB の大きさを θ とすれば、数学 I で学んだように

$$\begin{aligned} S &= OA \times OB \sin \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、最後の“.” は平面ベクトルの内積である。とくに、成分を用いて $\vec{a} = (x_a, y_a), \vec{b} = (x_b, y_b)$ と表せば、

図 1.1: \vec{a}, \vec{b} が張る平行四辺形

$$S = \sqrt{(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2) - (x_a x_b + y_a y_b)^2} = |x_a y_b - x_b y_a|$$

である。

平面ベクトルの外積

平面ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a), \vec{b} = (x_b, y_b)$ に対して

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_a y_b - x_b y_a$$

をこれらの外積という。

外積の定め方から、次が成り立つ：

平面ベクトルの外積の性質 1

- \vec{a}, \vec{b} のなす角を θ とすると $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ である。
- $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ 。
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は \vec{a}, \vec{b} が張る平行四辺形の面積である。

二つのベクトルのなす角が 0 または π であることから、それらのベクトルが平行であることは同値であることから、

平行性と外積

二つの零ベクトルでない平面ベクトル \vec{a}, \vec{b} が平行であるための条件は $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ となることである。

■外積の符号 平面ベクトルの外積の絶対値は平行四辺形の面積としての意味をもつが、さらに、その符号について考えよう。

零ベクトルでない平面ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a)$ を正の向きに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したベクトル \vec{a}' を成分で表すと $\vec{a}' = (-y_a, x_a)$ となるので、もう一つの平面ベクトル $\vec{b} = (x_b, y_b)$ に対して

$$\vec{a}' \cdot \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$$

が成り立つ。このとき、 \vec{b} が \vec{a} の向きに対して左向きであるための条件は \vec{b} と \vec{a}' のなす角が鋭角となることである (図1.2)。二つのベクトルのなす角が鋭角であるための条件は内積が正となることから、次が成り立つ。

外積の符号と向きの関係

零ベクトルでない平面ベクトル \vec{a} の向きに対して、平面ベクトル \vec{b} が左向き (右向き) であるための条件は $\vec{a} \times \vec{b} > 0$ となることである。

図 1.2: \vec{a} と \vec{b} の位置関係

1.2 空間ベクトルの外積

■空間の平面 座標空間上に点 $A(x_A, y_A, z_A)$ と零でないベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ が与えられているとき、 \vec{AP} が \vec{n} と垂直になるような空間の点 P 全体の集まりは点 A を通り \vec{n} に垂直な平面となる (図1.3)。点 $P(x, y, z)$ がこの平面上にあるための条件は

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = (\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot \vec{n}$$

図 1.3: 平面と法線ベクトル

となることである。このことを成分で表すと次がわかる。

平面の方程式

点 $A(x_A, y_A, z_A)$ を通り、零でないベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ に垂直な平面の方程式は

$$p(x - x_A) + q(y - y_A) + r(z - z_A) = 0$$

である。

平面に垂直なベクトルをその平面の**法線ベクトル**という。二つの平面の法線ベクトルが平行ならばそれらの平面は平行である。この意味で法線ベクトルは平面の「方向」を与えている。

■空間ベクトルの外積 平行でない空間ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\text{vec } b = (x_b, y_b, z_b)$ に対して、平面の場合と同様に \vec{a}, \vec{b} が張る平行四辺形を考えることができる。この平行四辺形を含む平面を \vec{a}, \vec{b} が張る平面とよぶ。この平面の法線ベクトルを求めよう。法線ベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ は \vec{a}, \vec{b} に垂直であるから

$$(1) \quad x_a p + y_a q + z_a r = 0$$

$$(2) \quad x_b p + y_b q + z_b r = 0$$

となる. $z_b \times (1) - z_a \times (2)$ および $y_b \times (1) - y_a \times (2)$ から

$$(x_a z_b - x_b z_a)p + (y_a z_b - y_b z_a)q = 0, \quad (x_a y_b - x_b y_a)p + (z_a y_b - z_b y_a)r = 0$$

が成り立つ. したがって

$$p : q : r = (y_a z_b - z_a y_b) : (z_a x_b - x_a z_b) : (x_a y_b - y_a x_b)$$

を得る. 一般に二つのベクトルに対して, 次のように定める.

空間ベクトルの外積

空間ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a), \vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ に対して, それらの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を

$$\vec{a} \times \vec{b} = y_a z_b - z_a y_b, z_a x_b - x_a z_b, x_a y_b - y_a x_b$$

で定める.

注意. 平面ベクトルの外積は実数 (スカラー) であったが, 空間ベクトルの外積はまた空間ベクトルである.

外積の定め方から次のことがわかる:

外積と直交性

二つの空間ベクトル \vec{a}, \vec{b} に対して

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

が成り立つ.

さらに成分を計算することにより, 次のことがわかる:

外積と内積, 平行四辺形の面積

空間ベクトル \vec{a}, \vec{b} に対して

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

が成り立つ. とくに \vec{a}, \vec{b} が零ベクトルでないならば, それらのなす角を θ としたとき

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

となる. さらに

- 零ベクトルでない空間ベクトル \vec{a}, \vec{b} が平行であるための条件は $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ となることである.
- 平行でない2つのベクトル \vec{a}, \vec{b} が張る平行四辺形の面積は $|\vec{a} \times \vec{b}|$ である

外積は, 数の乗法と似た性質をもっている.

外積の代数的性質

空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 s, t に対して

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (交代性)
- $\vec{a} \times (s\vec{b} + t\vec{c}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) + t(\vec{a} \times \vec{c})$ (分配法則)
- $(s\vec{a} + t\vec{b}) \times \vec{c} = s(\vec{a} \times \vec{c}) + t(\vec{b} \times \vec{c})$ (分配法則)

しかし, 乗法の交換法則, 結合法則は成り立たない. すなわち, 一般に

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ と } \vec{b} \times \vec{a}, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \text{ と } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

は等しくない.

■ **外積の向き** ベクトル \vec{a} と \vec{b} の外積は, それらが張る平行四辺形の面積を大きさにもち \vec{a}, \vec{b} に垂直なベクトルである. そのような性質をもつベクトルは正反対の向きをもつ2つがあるが, $\vec{a} \times \vec{b}$ がそのうちどちらになるかを調べよう.

いま、平行でない二つのベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ が張る平面が z 軸に平行でないとする。すると、この平面の法線ベクトル $\vec{a} \times \vec{b}$ は xy 平面に平行ではないからその z 成分は 0 でない: $x_a y_b - x_b y_a \neq 0$ 。ベクトル \vec{a}, \vec{b} を xy 平面上に正射影すると平面ベクトル $\vec{a}_1 = (x_a, y_a)$, $\vec{b}_1 = (x_b, y_b)$ を得るが、これは仮定より $\vec{0}$ でなく、さらに平面ベクトルとしての外積 $\vec{a}_1 \times \vec{b}_1$ は $\vec{a} \times \vec{b}$ の z 成分と一致する。ここで、1.1 で見た平面ベクトルの外積の符号をの性質を用いれば、 \vec{b}_1 が xy 平面上で \vec{a}_1 に対して左向き (右向き) であることと $\vec{a} \times \vec{b}$ の z 成分が正 (負) であることは同値である。いずれの場合も $\vec{a} \times \vec{b}$ が指す方向から \vec{a}, \vec{b} が張る平面をみたとき \vec{b} が \vec{a} に対して左向きであることがわかる (図 1.4)。

図 1.4: 空間ベクトルの外積の向き

ベクトル \vec{a}, \vec{b} が張る平面が z 軸に平行なときは xz 平面、または yz 平面に正射影することにより同様のことが言えるから

空間ベクトルの外積の図形的な意味

平行でない二つの空間ベクトル \vec{a}, \vec{b} の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は次の性質をみたす唯一の空間ベクトルである。

- $\vec{a} \times \vec{b}$ は \vec{a}, \vec{b} に垂直である。
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は \vec{a} と \vec{b} が張る平行四辺形の面積である。
- $\vec{a} \times \vec{b}$ が指し示す方向から \vec{a}, \vec{b} が張る平面を見ると、 \vec{b} は \vec{a} に対して左向きである。

■ **右手系とスカラ三重積** 一般に、同一平面上にない3つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が性質

\vec{c} が指し示す方向から \vec{a}, \vec{b} が張る平面を見ると、 \vec{b} は \vec{a} に対し

図 1.5: 右手系

て左向きである

を持っているとき、 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ はこの順で**右手系**をなす、あるいは**正の向きである**という。図1.5で見えるように

右手系

同一平面上にない3つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が右手系をなすための条件は

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$$

が成り立つことである。

ここで、関係式

スカラ三重積の公式

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

が成り立つので、 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ が右手系をなすなら $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}, \{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$ も右手系をなす。

■ **空間の枠** 空間の、互いに直交する3つの単位ベクトルの組 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ を空間の**枠**という。とくに、これらが右手系をなしているとき、**右手系の枠**と呼ぶことにする。

たとえば、基本ベクトルの組

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \quad \text{ただし } \vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

は右手系の枠を与えている。

右手系の枠

三つのベクトルの組 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ が右手系の枠をなすための条件は

- $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1,$
- $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0,$
- $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$

である。

とくに、二つの直交する単位ベクトル \vec{e}_1, \vec{e}_2 に対して $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ とおけば、右手系の枠を作ることができる。

空間の枠 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ が与えられたとき、任意の空間ベクトル \vec{a} は

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad (a_1, a_2, a_3 \text{ は実数})$$

と表すことができる。実際、

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2, \quad a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3$$

とおけばよい。これらは、 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ の方向に x 軸、 y 軸、 z 軸をとりなおしたときの \vec{a} の成分になっている。

2 複素数と四元数

2.1 複素数と複素平面

数学 II で学んだ複素数について、いくつかの記号と用語を追加しておく。

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対して

$$\bar{z} = x - iy, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

をそれぞれ、 z の**共役複素数**、**実部**、**虚部**、**絶対値**という。

■**複素平面** 実数は数直線上の点とみなすことができる。同様に、座標平面上の点 (x, y) に対して複素数 $x + iy$ を対応させることにより、座標平面を複素数全体の集合とみなすことができる。このようにみなした座標平面のことを**複素平面**といい、複素平面の横軸を**実軸**、縦軸を**虚軸**という。複素数 z を複素平面上の点とみなすとき、 0 (座標原点) と z を結ぶ線分 $0z$ の長さは $|z|$ である。さらに、 $z \neq 0$ のとき、線分 $0z$ が実軸上の正の部分となす角 θ のことを z の**偏角**といい、 $\arg z$ で表す (図2.1)。複素数 z を、絶対値と偏角を用いて

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r = |z|, \theta = \arg z)$$

と表すことができる。とくに

$$E(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

とおくと、これは絶対値 1 の複素数である。逆に絶対値 1 の複素数は $E(\theta)$ の形で表される。この記号を用いて、

複素数の極表示

複素数 z は $z = rE(\theta)$ ($r \geq 0, \theta$ は実数) の形に表すことができる。

図 2.1: 複素平面

■複素数の積の極表示と平面の回転 正弦・余弦の加法定理を用いれば

$$E(\alpha + \beta) = E(\alpha)E(\beta)$$

が成り立つことがわかる。したがって、極表示された複素数 $z = rE(\alpha)$, $w = sE(\beta)$ の積は

$$zw = (rs)E(\alpha + \beta)$$

となる。すなわち

複素数の積

二つの複素数の積の絶対値は絶対値の積、積の偏角は偏角の和である。

したがって、

複素数の積と平面の回転

複素数 z に対して、 $E(\theta)z$ は、複素平面上の点 z を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点を表す。

とくに点 (x, y) を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点を (X, Y) とすると

$$X + iY = E(\theta)(x + iy) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy)$$

であるから、右辺を計算して実部・虚部をとれば、次のことがわかる (図2.2)。

図 2.2: 複素平面上の回転

平面の回転

座標平面上の点 (x, y) を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点は

$$(\cos \theta x - \sin \theta y, \sin \theta x + \cos \theta y)$$

である。

■平面ベクトルの内積・外積 複素数 $z = x + iy$ を平面ベクトル (x, y) とみなすとき、

複素数と内積・外積

二つの複素数 z, w に対して

$$\bar{z}w = z \cdot w + i(z \times w), \quad \text{すなわち} \quad z \cdot w = \operatorname{Re} \bar{z}w, \quad z \times w = \operatorname{Im} \bar{z}w$$

が成り立つ。ただし、右辺の“ \cdot ”は平面ベクトルの内積, “ \times ”は平面ベクトルの外積を表す。

2.2 四元数

数学 II では、実数に記号“ i ”を付け加えることによって数を複素数まで拡張した。ここでは複素数をさらに拡張することを考えよう。

■四元数とその演算 三つの記号 i, j, k を考え、

$$\xi = t + ix + jy + kz \quad (t, x, y, z \text{ は実数})$$

の形の「数」を四元数という。複素数の場合と同様に、四元数の相等を次のように定める：

四元数の相等

二つの四元数 $\xi = t + ix + jy + kz$ と $\xi' = t' + ix' + jy' + kz'$ が等しいとは

$$t = t', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'$$

が成り立つことである。

とくに、実数 t は $t + i0 + j0 + k0$ 、複素数 $z = t + ix$ は $z = t + ix + j0 + k0$ とすることで四元数とみなすことができる。

四元数の加法、減法、および実数倍は複素数の演算と同様に定める。

四元数の加法・減法・実数倍

二つの四元数 $\xi = t + ix + jy + kz, \eta = s + iu + jv + kw$ および実数 c に対して

- $\xi \pm \eta = (t \pm s) + i(x \pm u) + j(y \pm v) + k(z \pm w)$ (複号同順),
- $c\xi = \xi c = ct + i(cx) + j(cy) + k(cz)$.

■四元数の乗法 四元数同士の乗法を次のように定める：

四元数の乗法

四元数の乗法は、記号 i, j, k が

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

をみたすとして、 i, j, k の多項式とみなして計算する。

その際、

$$ji = (ki)(jk) = k(ij)k = kkk = k^2k = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

に注意する。

すると、

四元数の乗法の性質

四元数 ξ, η, ζ と実数 c に対して次が成り立つ：

- $(\xi\eta)\zeta = \xi(\eta\zeta)$ (乗法の結合法則),
- $(\xi + \eta)\zeta = \xi\zeta + \eta\zeta$ (分配法則),
- $\xi(\eta + \zeta) = \xi\eta + \xi\zeta$ (分配法則),
- $(c\xi)\eta = \xi(c\eta) = c(\xi\eta)$,
- $\xi\eta = 0$ ならば $\xi = 0$ または $\eta = 0$.

しかし、複素数とちがって乗法の交換法則は成立しない。すなわち、一般に $\xi\eta$ と $\eta\xi$ は一致しない。

四元数 $\xi = t + ix + jy + kz$ (t, x, y, z は実数) に対して

$$\bar{\xi} = t - ix - jy - kz$$

を ξ の共役四元数という。積の順序に注意して、次が成り立つことがわかる

四元数の積の共役

任意の四元数 ξ, η に対して

$$\overline{\xi\eta} = \eta\bar{\xi}$$

が成り立つ。

とくに ξ と $\bar{\xi}$ の積は

$$\xi\bar{\xi} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$\bar{\xi}\xi = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

となり、負でない実数となる。そこで

$$|\xi| = \sqrt{\xi\bar{\xi}} = \sqrt{\bar{\xi}\xi}$$

を四元数 ξ の絶対値という。

四元数の絶対値の性質

四元数 ξ, η に対して

- $|\xi| \geq 0$,
- $|\xi| = 0$ となるための必要十分条件は $\xi = 0$ である,
- $|\xi\eta| = |\xi||\eta|$.

■ 虚四元数と空間ベクトル 四元数 $\xi = t + ix + jy + kz$ に対して

$$\operatorname{Re} \xi = t = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}), \quad \operatorname{Im} \xi = ix + jy + kz = \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})$$

をそれぞれ ξ の実部, 虚部という。とくに実部が 0 であるような四元数を虚四元数とよぶ。

複素数に平面ベクトルを対応させたように, 虚四元数 $ix + jy + zk$ (x, y, z は実数) に対して空間ベクトル (x, y, z) を対応させることができる。以下,

$$\vec{a} = (x, y, z) = ix + jy + kz$$

などと表すことにする。一般の四元数は, 実数と虚四元数の和でかけるので,

$$\xi = t + ix + jy + kz = t + \vec{a}$$

と書く。

虚四元数と空間ベクトルの内積・外積

空間ベクトル \vec{a}, \vec{b} を虚四元数とみなすと,

$$\operatorname{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad \operatorname{Im}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$$

が成り立つ。ただし, 左辺の積は四元数の積である。

3 四元数と空間の回転

3.1 空間の回転

座標空間の原点を通る直線 l を軸とした回転を考えよう。 l に平行な単位ベクトルを一つとって、それを \vec{e}_3 とし、それに直交する単位ベクトル \vec{e}_1 をとる。このとき、 $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$ とすれば $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ は、1.2 で説明した意味で、空間の右手系の枠を与えている。これを軸 l に適合した枠という (図3.1)。

空間の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル \vec{OP} を軸 l に適合した枠 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ で

$$\vec{OP} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3 \quad (p_j = \vec{OP} \cdot \vec{e}_j, j = 1, 2, 3)$$

と表すとき、直線 l を軸として、点 P を \vec{e}_3 が指し示す方向から見て正の向きに角度 θ だけ回転させた点 Q は

$$\vec{OQ} = (\cos \theta p_1 - \sin \theta p_2)\vec{e}_1 + (\sin \theta p_1 + \cos \theta p_2)\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3$$

で与えられる。すなわち、回転によって \vec{e}_1, \vec{e}_2 成分は 2.1 で与えた平面の回転と同様に変換され、 \vec{e}_3 成分は変わらない (図3.2)。

注意. 直線 l に平行な単位ベクトル \vec{e}_3 のとり方は 2 通りあるが、 \vec{e}_3 を反対の向きにとると、同じ回転の回転角も -1 倍になる。

図 3.1: 回転軸に適合した枠

図 3.2: 空間の回転

3.2 四元数と空間の回転

複素数で平面の回転を表したように、空間の回転を四元数で表してみよう。この節では座標空間を虚四元数全体の集合と見なし、空間ベクトル同士を四元数とみなして積をとることにする。

■空間の枠と四元数 空間の右手系の枠 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ を虚四元数とみなすと、

$$\begin{aligned} (\vec{e}_1)^2 &= -(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = -1, & (\vec{e}_2)^2 &= (\vec{e}_3)^2 = -1 \\ \vec{e}_1\vec{e}_2 &= -(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, & \vec{e}_2\vec{e}_1 &= \vec{e}_3, \\ \vec{e}_2\vec{e}_3 &= -\vec{e}_3\vec{e}_2 = \vec{e}_1, & & \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 &= -\vec{e}_1\vec{e}_3 = \vec{e}_2 & & \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし“ \cdot ”は内積，“ \times ”は外積、記号なしの積は四元数としての積である。

■単位四元数 四元数 $q = t + ix + jy + kz$ の絶対値が 1 であるとき q を単位四元数という。実数 t と虚四元数 \vec{w} を用いて $q = t + \vec{w}$ と表すと、

$$|q|^2 = t^2 + |\vec{w}|^2$$

だから、単位四元数 ξ に対して $t = \cos \delta, |\vec{w}| = \sin \delta$ となる実数 δ が存在する。したがって

単位四元数

単位四元数 q は

$$q = \cos \delta + \sin \delta \vec{v} \quad (\delta \text{ は実数, } \vec{v} \text{ は空間の単位ベクトル})$$

と表すことができる。

虚四元数 \vec{v} と単位四元数 q に対して $q\vec{v}q$ を考えると、

$$q\vec{v}q = \vec{v}q^2 = q(-\vec{v})q = -q\vec{v}q$$

であるからこれは虚四元数である。したがって、空間ベクトル \vec{v} に対して、空間ベクトル $q\vec{v}q$ が対応する。

■ **単位四元数と空間の回転** ここでは次のことを確かめる：

空間の単位ベクトル \vec{v} と実数 θ に対して

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \vec{v}$$

とする。空間の点 P の位置ベクトル $\vec{p} = \vec{OP}$ を虚四元数とみなすとき、

$$\vec{OP}' = \vec{p}' = q\vec{p}\bar{q}$$

となる点 P' は、原点を通り \vec{v} に平行な直線を軸として、点 P を \vec{v} が指し示す方向から見たとときに正の向きに角度 θ だけ回転したものである。

原点を通り \vec{v} に平行な直線を l とする。まず $\vec{e}_3 = \vec{v}$ とおき、 l に適合した右手系の枠 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ をとる。すると

$$q\vec{e}_1\bar{q} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2,$$

$$q\vec{e}_2\bar{q} = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2,$$

$$q\vec{e}_3\bar{q} = \vec{e}_3$$

となるので、

$$q(p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3)\bar{q} = (\cos \theta p_1 - \sin \theta p_2)\vec{e}_1 + (\sin \theta p_1 + \cos \theta p_2)\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

となり、結論が得られた。