数学科指導法 II 実習用テキスト案

空間の回転と四元数

山田光太郎

2008 年 11 月 25 日

1　平面ベクトルと空間ベクトルの外積

数学 B では，平面ベクトルや空間ベクトルの計量—長さ・角度—に関係する**内積**の性質と使い方を学んだ．この節では，ベクトルの計量に関わるもう一つの積である**外積**の性質について学ぶ．

1.1　平面ベクトルの外積

■平行四辺形の面積と外積　平行でない 2 つの平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ となる平面上の点 O, A, B をとるとき，線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形 OACB を $\boldsymbol{\vec{a}}, \boldsymbol{\vec{b}}$ **が張る平行四辺形**という．（図 1.1）．

この平行四辺形の面積 S を求めよう．角 AOB の大きさを θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすれば，数学 I で学んだように

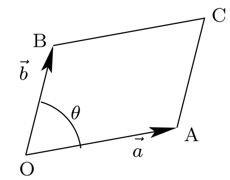

図 1.1: $\vec{a}, \vec{b}$ が張る平行四辺形

$$
\begin{aligned}
S &= (\mathrm{OA})(\mathrm{OB})\sin\theta = |\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\sin\theta \\
&= \sqrt{|\,\vec{a}\,|^2\,|\,\vec{b}\,|^2\sin^2\theta} = \sqrt{|\,\vec{a}\,|^2\,|\,\vec{b}\,|^2(1-\cos^2\theta)} \\
&= \sqrt{|\,\vec{a}\,|^2\,|\,\vec{b}\,|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，最後の “$\cdot$” は平面ベクトルの内積である．とくに，成分を用いて $\vec{a} = (x_a, y_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b)$ と表せば，

$$S = \sqrt{(x_a^2 + y_a^2)(x_b^2 + y_b^2) - (x_a x_b + y_a y_b)^2} = |\,x_a y_b - x_b y_a\,|$$

である．

平面ベクトルの外積

平面ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a)$，$\vec{b} = (x_b, y_b)$ に対して

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_a y_b - x_b y_a$$

をこれらの外積という．

外積の定め方から，次が成り立つ：

平面ベクトルの外積の性質

- $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$ である．とくに $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，これらが張る平行四辺形の面積は $|\vec{a} \times \vec{b}|$ である．
- $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は $\vec{a}, \vec{b}$ が張る平行四辺形の面積である．

二つの零ベクトルでないベクトルが平行であるための必要十分条件は，それらがなす角が 0 または π となることである．したがって，

平行性と外積

零ベクトルでない平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行であるための必要十分条件は $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ となることである．

■外積の符号　平面ベクトルの外積の絶対値は平行四辺形の面積としての意味をもつが，さらに，その符号について考えよう．

零ベクトルでない平面ベクトル $\vec{a}$ を正の向きに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したベクトル $\vec{a'}$ とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{a'} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ となるように点 A, A′ をとると，平面は直線 OA によって 2 つの領域に分けられる．そのうち A′ を含む方を直線 OA の**左側**，もう一方を**右側**とよぶ．いま $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 B が OA の左側（右側）にあるとき，$\vec{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の向きに対して**左向き**（**右向き**）であるということにする．

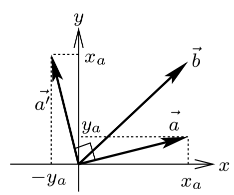

図 1.2: $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の位置関係

成分を用いて $\vec{a} = (x_a, y_a)$ と表すと，$\vec{a'} = (-y_a, x_a)$ となるので，$\vec{b} = (x_b, y_b)$ に対して

$$\vec{a'} \cdot \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$$

が成り立つ．このとき，$\vec{b}$ が $\vec{a}$ の向きに対して**左向き**であるための必要十分条件は $\vec{b}$ と $\vec{a'}$ のなす角が鋭角となることである（図 1.2）．二つのベクトルのなす角が鋭角であるための条件は内積が正となることだから，次が成り立つ．

外積の符号と向きの関係

零ベクトルでない平面ベクトル $\vec{a}$ の向きに対して，平面ベクトル $\vec{b}$ が左向き（右向き）であるための条件は $\vec{a} \times \vec{b} > 0$ （$\vec{a} \times \vec{b} < 0$）となることである．

1.2　空間ベクトルの外積

■空間の平面　座標空間上に点 $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ と零ベクトルでないベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ が与えられているとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が $\vec{n}$ と垂直になるような空間の点 P 全体の集まりは**点 A を通り $\vec{n}$ に垂直な平面**となる（図 1.3）.

点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ がこの平面上にあるための条件は

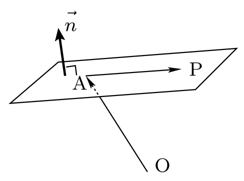

図 1.3: 平面と法線ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot \vec{n} = 0$$

となることである．このことを成分で表すと次がわかる.

平面の方程式

点 $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ に垂直な平面の方程式は

$$p(x - x_\mathrm{A}) + q(y - y_\mathrm{A}) + r(z - z_\mathrm{A}) = 0$$

である.

平面に垂直なベクトルをその平面の**法線ベクトル**という．二つの平面の法線ベクトルが平行ならばそれらの平面は平行である．この意味で法線ベクトルは平面の「方向」を与えている.

■空間ベクトルの外積　平行でない空間ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a), \vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ に対して，平面の場合と同様に $\vec{a}, \vec{b}$ が張る平行四辺形を考えることができる．この平行四辺形を含む平面を **$\vec{a}, \vec{b}$ が張る平面**とよぶ．この平面の法線ベクトルを求めよう．法線ベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ は $\vec{a}, \vec{b}$ に垂直であるから

(1)　$$x_a p + y_a q + z_a r = 0$$

(2)　$$x_b p + y_b q + z_b r = 0$$

となる．$z_b \times (1) - z_a \times (2)$ および $y_b \times (1) - y_a \times (2)$ から

$$(x_a z_b - x_b z_a)p + (y_a z_b - y_b z_a)q = 0, \qquad (x_a y_b - x_b y_a)p + (z_a y_b - z_b y_a)r = 0$$

が成り立つ．したがって

$$p : q : r = (y_a z_b - z_a y_b) : (z_a x_b - x_a z_b) : (x_a y_b - y_a x_b)$$

を得る．一般に二つのベクトルに対して，次のように定める.

空間ベクトルの外積

空間ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a), \vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ に対して，それらの**外積 $\vec{a} \times \vec{b}$** を

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_a z_b - z_a y_b, z_a x_b - x_a z_b, x_a y_b - y_a x_b)$$

で定める.

注意. 平面ベクトルの外積は実数（スカラ）であったが，空間ベクトルの外積はまた空間ベクトルである.

外積の定め方から次のことがわかる：

外積と直交性

二つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0, \qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

が成り立つ.

さらに成分を計算することにより，次のことがわかる：

外積と内積，平行四辺形の面積

空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

が成り立つ．とくに $\vec{a}, \vec{b}$ が零ベクトルでないならば，それらのなす角を θ としたとき

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\sin\theta|$$

となる．さらに

- 零ベクトルでない空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が平行であるための必要十分条件は $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ となることである．
- 平行でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が張る平行四辺形の面積は $|\vec{a}\times\vec{b}|$ である

外積の定義から直接計算によって次が成り立つことがわかる:

外積の代数的性質

空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 s, t に対して

- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$（交代性），
- $\vec{a}\times(s\vec{b}+t\vec{c}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) + t(\vec{a}\times\vec{c})$（分配法則），
- $(s\vec{a}+t\vec{b})\times\vec{c} = s(\vec{a}\times\vec{c}) + t(\vec{b}\times\vec{c})$（分配法則）．

とくに，分配法則は数の乗法と同様に成り立つが，乗法の交換法則，結合法則は成り立たない．すなわち，一般に

$$\vec{a}\times\vec{b} \quad と \quad \vec{b}\times\vec{a}, \qquad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \quad と \quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

は等しくない．

■外積の向き　ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積は，それらが張る平行四辺形の面積を大きさにもち $\vec{a}, \vec{b}$ に垂直なベクトルである．そのような性質をもつベクトルは正反対の向きをもつ 2 つがあるが，$\vec{a}\times\vec{b}$ がそのうちどちらになるかを調

べよう．

空間ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ に対して，平面ベクトル $\vec{a_1} = (x_a, y_a)$ をその xy 平面への**正射影**という．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とし，点 A から xy 平面に下ろした垂線の足の座標は $\mathrm{A}_1(x_a, y_a, 0)$ であるから，$\vec{a_1}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$ に対応する平面ベクトルである．同様にして yz 平面への正射影 $\vec{a_2} = (y_a, z_a)$, zx 平面への正射影 $\vec{a_3} = (z_a, x_a)$ も定義される．

平行でないベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ が張る平面が z 軸に平行でないとする．すると，この平面の法線ベクトル $\vec{a}\times\vec{b}$ は xy 平面に平行ではないからその z 成分は 0 でない：$x_a y_b - x_b y_a \neq 0$. ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の xy 平面への正射影を $\vec{a_1} = (x_a, y_a)$, $\vec{b_1} = (x_b, y_b)$ とすれば，これらは $\vec{0}$ ではなく，さらに平面ベクトルとしての外積 $\vec{a_1}\times\vec{b_1}$ は $\vec{a}\times\vec{b}$ の z 成分と一致する．ここで，1.1節で見た平面ベクトルの外積の符号の性質を用いれば,，$\vec{b_1}$ が xy 平面上で $\vec{a_1}$ に対して左向き（右向き）であるための必要十分条件は $\vec{a}\times\vec{b}$ の z 成分が正（負）であることは同値である．いずれの場合も $\vec{a}\times\vec{b}$ が指す方向から $\vec{a}, \vec{b}$ が張る平面をみたとき $\vec{b}$ が $\vec{a}$ に対して左向きであることがわかる（図 1.4）．

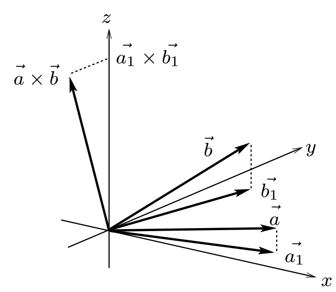

図 1.4: 空間ベクトルの外積の向き

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が張る平面が z 軸に平行なときは xz 平面，または yz 平面に正射影することにより同様のことが言えるから

空間ベクトルの外積の図形的な意味

平行でない二つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は次の性質をみたすただ一つの空間ベクトルである.

- $\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ に垂直である.
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積である.
- $\vec{a} \times \vec{b}$ が指す方向から $\vec{a}$, $\vec{b}$ が張る平面を見るとき, $\vec{b}$ は $\vec{a}$ に対して左向きである.

■右手系とスカラ三重積　一般に, 同一平面上にない 3 つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が性質

> $\vec{c}$ が指す方向から $\vec{a}$, $\vec{b}$ が張る平面を見るとき, $\vec{b}$ は $\vec{a}$ に対して左向きである

を持っているとき, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ はこの順で**右手系**をなす, あるいは**正の向きである**という.

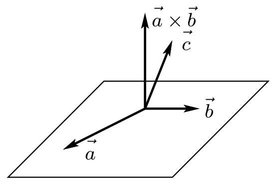

図 1.5: 右手系

図 1.5で見るように

右手系

同一平面上にない 3 つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が右手系をなすための必要十分条件は

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$$

が成り立つことである.

ここで, $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, $\vec{c} = (x_c, y_c, z_c)$ に対して

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= x_a y_b z_c + x_b y_c z_a + x_c y_a z_b - x_a y_c z_b - x_b y_a z_c - x_c y_b z_a \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

より

スカラ三重積の公式

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

を得る. したがって $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ が右手系をなすなら $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$, $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$ も右手系をなす.

■空間の枠　空間の, 互いに直交する 3 つの単位ベクトルの組 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ を空間の**枠**という. とくに, これらが右手系をなしているとき, **右手系の枠**とよぶことにする.

たとえば, 基本ベクトルの組

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \qquad \text{ただし} \qquad \vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

は右手系の枠を与えている.

右手系の枠

三つのベクトルの組 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ が右手系の枠をなすための条件は

- $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$,
- $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$,
- $\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$

である.

とくに, 二つの直交する単位ベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ に対して $\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}$ とおけば, 右手系の枠を作ることができる.

空間の枠 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ が与えられたとき, 任意の空間ベクトル $\vec{a}$ は

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} \qquad (a_1,\, a_2,\, a_3 \text{ は実数})$$

と表すことができる. 実際,

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e_1}, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e_2}, \quad a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e_3}$$

とおけばよい. これらは, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ の方向に x 軸, y 軸, z 軸をとりなおしたときの $\vec{a}$ の成分になっている.

2 複素数と四元数

2.1 複素数と複素平面

数学 II で学んだ複素数について，いくつかの記号と用語を追加しておく．複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対して

$$\bar{z} = x - iy, \quad \mathrm{Re}\, z = x, \quad \mathrm{Im}\, z = y$$

をそれぞれ，z の**共役複素数**，**実部**，**虚部**という．とくに $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geqq 0$ であることに注意して

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と定め，z の**絶対値**とよぶ．

■複素平面　実数は数直線上の点とみなすことができる．同様に，座標平面上の点 (x, y) に対して複素数 $x+iy$ を対応させることにより，座標平面を複素数全体の集合とみなすことができる．このようにみなした座標平面のことを**複素平面**といい，複素平面の横軸を**実軸**，縦軸を**虚軸**という．複素数 z を複素平面上の点とみなすとき，0（座標原点）と z を結ぶ線分 $0z$ の長さは $|z|$ である．さらに，$z \neq 0$ のとき，線分 $0z$ が実軸上の正の部分となす角 θ のことを z の**偏角**といい，$\arg z$ で表す（図 2.1）．複素数 z $(\neq 0)$ の偏角は 2π の整数倍の任意性を持っている．たとえば，正の実数の偏角は 0 といえるが 2π，-4π などともいえる．一般に 0 でない複素数 z を，絶対値と偏角を用いて

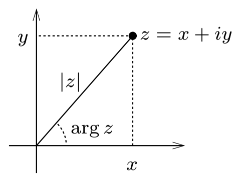

図 2.1: 複素平面

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r = |z|, \theta = \arg z)$$

と表すことができる．とくに

$$E(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

とおくと，これは絶対値 1 の複素数である．逆に絶対値 1 の複素数は $E(\theta)$ の形で表される．この記号を用いて，

複素数の極表示

複素数 z は

$$z = rE(\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r \geqq 0,\ \theta \text{ は実数})$$

の形に表すことができる．とくに $z \neq 0$ ならば，θ は 2π の整数倍だけの差を除いて一通りに定まる．
このような複素数の表し方を**極表示**という．

■複素数の積の極表示と平面の回転　正弦・余弦の加法定理から

$$E(\alpha + \beta) = E(\alpha)E(\beta)$$

が成り立つ．
したがって，極表示された複素数 $z = rE(\alpha)$, $w = sE(\beta)$ の積は

$$zw = (rs)E(\alpha + \beta)$$

となる．
すなわち

複素数の積

二つの複素数の積の絶対値は絶対値の積，積の偏角は偏角の和となる．とくに $|\,zw\,| = |\,z\,|\,|\,w\,|$ である．

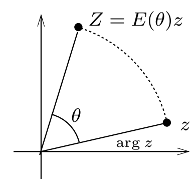

図 2.2: 複素平面上の回転

したがって，

複素数の積と平面の回転

複素数 z に対して，$E(\theta)z$ は，複素平面上の点 z を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点を表す．

とくに点 (x,y) を原点のまわりに正の向きに
θ だけ回転して得られる点を (X,Y) とすると

$$X+iY=E(\theta)(x+iy)=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)$$

であるから，右辺を計算して実部・虚部をとれば，次のことがわかる（図 2.2）．

平面の回転

座標平面上の点 (x,y) を原点のまわりに正の向きに θ だけ回転して得られる点 (X,Y) は

$$(X,Y)=(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta)$$

すなわち $$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

であたえられる．

■平面ベクトルの内積・外積　複素数 $z=x+iy$ を平面ベクトル (x,y) とみなすとき，

複素数と内積・外積

二つの複素数 $z,\ w$ に対して

$$\bar{z}w=z\cdot w+i(z\times w)\quad \text{すなわち}\quad z\cdot w=\mathrm{Re}\,\bar{z}w,\quad z\times w=\mathrm{Im}\,\bar{z}w$$

が成り立つ．ただし，左辺の “ · ” は平面ベクトルの内積，“×” は平面ベクトルの外積を表す．

2.2　四元数

数学 II では，実数に記号 “i” を付け加えることによって数を複素数まで拡張した．ここでは複素数をさらに拡張することを考えよう．

■四元数とその演算　三つの記号 $i,\ j,\ k$ を考え，

$$\xi=t+ix+jy+kz\qquad (t,x,y,z \text{ は実数})$$

の形の「数」を**四元数**という．複素数の場合と同様に，四元数の相等を次のように定める：

四元数の相等

二つの四元数 $\xi=t+ix+jy+kz$ と $\xi'=t'+ix'+jy'+kz'$ が等しいとは

$$t=t',\qquad x=x',\qquad y=y',\qquad z=z'$$

が成り立つことである．

とくに，実数 t は $t+i0+j0+k0$，複素数 $z=t+ix$ は $z=t+ix+j0+k0$ とすることで四元数とみなすことができる．複素数を考える際に $i^2=-1$ という関係を考えたように，$i,\ j,\ k$ の積の定義が重要だが，それは後に述べることにして，まず，四元数の加法，減法，および実数倍を複素数の演算と同様に次のように定める:

四元数の加法・減法・実数倍

二つの四元数

$$\xi=t+ix+jy+kz,\qquad \eta=s+iu+jv+kw$$

（t,x,y,z,s,u,v,w は実数）および実数 c に対して

- $\xi\pm\eta=(t\pm s)+i(x\pm u)+j(y\pm v)+k(z\pm w)$ (複号同順),
- $c\xi=\xi c=ct+i(cx)+j(cy)+k(cz)$.

■四元数の乗法　四元数同士の乗法を次のように定める：

四元数の乗法

四元数の乗法は，記号 i, j, k が

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

をみたし，これらが結合法則をみたすとして，i, j, k の多項式とみなして計算する．

結合法則が成り立つことから

$$ji = (ki)(jk) = k(ij)k = kkk = k^2k = -k, \qquad kj = -i, \quad ik = -j$$

に注意する．

すると，

四元数の乗法の性質

四元数 ξ, η, ζ と実数 c に対して次が成り立つ：

- $(\xi\eta)\zeta = \xi(\eta\zeta)$（乗法の結合法則），
- $(\xi + \eta)\zeta = \xi\zeta + \eta\zeta$（分配法則），
- $\xi(\eta + \zeta) = \xi\eta + \xi\zeta$（分配法則），
- $(c\xi)\eta = \xi(c\eta) = c(\xi\eta)$,
- $\xi\eta = 0$ ならば $\xi = 0$ または $\eta = 0$.

しかし，複素数とちがって乗法の交換法則は成立しない．すなわち，一般に $\xi\eta$ と $\eta\xi$ は一致しない．

四元数 $\xi = t + ix + jy + kz$（t, x, y, z は実数）に対して

$$\bar{\xi} = t - ix - jy - kz$$

を ξ の**共役四元数**という．積の順序に注意して，次が成り立つことがわかる

四元数の積の共役

任意の四元数 ξ, η に対して

$$\overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi}$$

が成り立つ．

とくに ξ と $\bar{\xi}$ の積は

$$\xi\bar{\xi} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2, \qquad \bar{\xi}\xi = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

となり，負でない実数となる．そこで

$$|\xi| = \sqrt{\xi\bar{\xi}} = \sqrt{\bar{\xi}\xi}$$

を四元数 ξ の**絶対値**という．

四元数の絶対値の性質

四元数 ξ, η に対して

- $|\xi| \geqq 0$,
- $|\xi| = 0$ となるための必要十分条件は $\xi = 0$ である，
- $|\xi\eta| = |\xi|\,|\eta|$.

■四元数の逆数　共役四元数の性質から，0 でない四元数 ξ に対して，

$$\xi\left(\frac{1}{\xi\bar{\xi}}\bar{\xi}\right) = \left(\frac{1}{\xi\bar{\xi}}\bar{\xi}\right)\xi = 1$$

が成り立つ．すなわち，この式のかっこの中は ξ の「逆数」の性質をもつ：

逆四元数

零でない四元数 ξ に対して

$$\xi^{-1} = \frac{1}{\xi\bar{\xi}}\bar{\xi}$$

を ξ の**逆四元数**という．ただし，右辺の積は実数と四元数の積である（一般に四元数の商はまだ定義されていない）．すると

$$\xi\xi^{-1} = \xi^{-1}\xi = 1$$

が成り立つ．

とくに，四元数 $\xi\ (\neq 0)$，η に対して

$$\xi\zeta_1 = \eta, \qquad \zeta_2\xi = \eta$$

を満たす四元数 ζ_1, ζ_2 は

$$\zeta_1 = \xi^{-1}\eta, \qquad \zeta_2 = \eta\xi^{-1}$$

で与えられる．

■虚四元数と空間ベクトル　四元数 $\xi = t + ix + jy + kz$（t, x, y, z は実数）に対して

$$\mathrm{Re}\,\xi = t = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}), \qquad \mathrm{Im}\,\xi = ix + jy + kz = \frac{1}{2}(\xi - \bar{\xi})$$

をそれぞれ ξ の**実部**，**虚部**という．とくに実部が 0 であるような四元数を**虚四元数**とよぶ．

虚四元数の判定条件

四元数 ξ が虚四元数であるための必要十分条件は

$$\bar{\xi} = -\xi$$

となることである．

複素数に平面ベクトルを対応させたように，虚四元数 $ix + jy + kz$（x, y, z は実数）に対して空間ベクトル (x, y, z) を対応させることができる．以下，

$$\vec{a} = (x, y, z) = ix + jy + kz$$

などと表すことにする．一般の四元数は，実数と虚四元数の和でかけるので，

$$\xi = t + ix + jy + kz = t + \vec{a}$$

と書く．

虚四元数と空間ベクトルの内積・外積

空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を虚四元数とみなすと，

$$\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b}), \qquad \mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$$

$$\text{すなわち} \qquad \vec{a}\vec{b} = -(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{a}\times\vec{b}$$

が成り立つ．ただし，左辺の積は四元数の積，右辺の “$\cdot$”, “$\times$” はそれぞれ空間ベクトルの内積，外積である．

3　四元数と空間の回転

3.1　空間の回転

座標空間の原点を通る直線 l を軸とした回転を考えよう．l に平行な単位ベクトルを一つとって，それを $\vec{e_3}$ とし，それに直交する単位ベクトル $\vec{e_1}$ をとる．このとき，$\vec{e_2} = \vec{e_3} \times \vec{e_1}$ とすれば $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ は，1.2 で説明した意味で，空間の右手系の枠を与えている．これを**軸 l に適合した枠** という（図 3.1）．

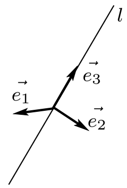

図 3.1: 回転軸に適合した枠

空間の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を軸 l に適合した枠 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ で

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p_1\vec{e_1} + p_2\vec{e_2} + p_3\vec{e_3} \qquad (p_j = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{e_j},\ j = 1, 2, 3)$$

と表すとき，直線 l を軸として，点 P を $\vec{e_3}$ が指す方向から見て正の向きに角度 θ だけ回転させた点 Q は

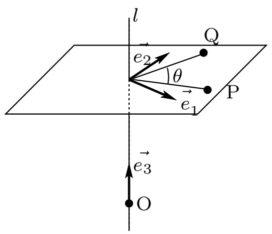

図 3.2: 空間の回転

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} =& \big((\cos\theta)p_1 - (\sin\theta p_2)\big)\vec{e_1} \\ &+ \big((\sin\theta)p_1 + (\cos\theta p_2)\big)\vec{e_2} \\ &+ p_3\vec{e_3}\end{aligned}$$

で与えられる．すなわち，回転によって $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ 成分は 2.1 で与えた平面の回転と同様に変換され，$\vec{e_3}$ 成分は変わらない（図 3.2）．

注意． 直線 l に平行な単位ベクトル $\vec{e_3}$ のとり方は 2 通りあるが，$\vec{e_3}$ を反対の向きにとると，同じ回転の回転角も (-1) 倍になる．

3.2　四元数と空間の回転

複素数で平面の回転を表したように，空間の回転を四元数で表してみよう．この節では座標空間を虚四元数全体の集合と見なし，空間ベクトル同士を四元数とみなして積をとることにする．

■空間の枠と四元数　空間の右手系の枠 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ を虚四元数とみなすと，2.2節で見た虚四元数の積と空間ベクトルの内積・外積との関係から

$$\begin{aligned}(\vec{e_1})^2 &= -(\vec{e_1} \cdot \vec{e_1}) + \vec{e_1} \times \vec{e_1} = -1, \qquad (\vec{e_2})^2 = (\vec{e_3})^2 = -1 \\ \vec{e_1}\vec{e_2} &= -(\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}) + \vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}, \qquad \vec{e_2}\vec{e_1} = -\vec{e_3}, \\ \vec{e_2}\vec{e_3} &= -\vec{e_3}\vec{e_2} = \vec{e_1}, \\ \vec{e_3}\vec{e_1} &= -\vec{e_1}\vec{e_3} = \vec{e_2}\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし“ $\cdot$ ”は内積，“$\times$”は外積，記号なしの積は四元数としての積である．

■単位四元数　四元数 $q = t + ix + jy + kz$ の絶対値が 1 であるとき q を**単位四元数**という．実数 t と虚四元数 $\vec{w}$ を用いて $q = t + \vec{w}$ と表すと，

$$|q|^2 = t^2 + |\vec{w}|^2$$

だから，単位四元数 q に対して $t = \cos\delta$, $|\vec{w}| = \sin\delta$ となる実数 δ が存在する．したがって

単位四元数

単位四元数 q は

$$q = \cos\delta + (\sin\delta)\vec{v} \qquad (\delta \text{ は実数，} \vec{v} \text{ は空間の単位ベクトル})$$

と表すことができる．

虚四元数 $\vec{v}$ と単位四元数 q に対して $q\vec{v}\bar{q}$ を考えると，

$$\overline{q\vec{v}\bar{q}} = \bar{\bar{q}}\,\bar{\vec{v}}\,\bar{q} = q(-\vec{v})\bar{q} = -q\vec{v}\bar{q}$$

であるからこれは虚四元数である．したがって空間ベクトル $\vec{v}$ に対して，$q\vec{v}\bar{q}$ もまた空間ベクトルである．

■単位四元数と空間の回転　ここでは次のことを確かめる：

空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と実数 θ に対して単位四元数

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}$$

とする．空間の点 P の位置ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を虚四元数とみなすとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \vec{p'} = q\vec{p}\bar{q}$$

となる点 P′ は，原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を軸として，点 P を $\vec{v}$ が指す方向から見たときに正の向きに角度 θ だけ回転したものである．

原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を l とする．まず $\vec{e_3} = \vec{v}$ とおき，l に適合した右手系の枠 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ をとる．すると

$$\begin{aligned} q\vec{e_1}\bar{q} &= (\cos\theta)\vec{e_1} + (\sin\theta)\vec{e_2}, \\ q\vec{e_2}\bar{q} &= -(\sin\theta)\vec{e_1} + (\cos\theta)\vec{e_2}, \\ q\vec{e_3}\bar{q} &= \vec{e_3} \end{aligned}$$

となるので，

$$q\big(p_1\vec{e_1} + p_2\vec{e_2} + p_3\vec{e_3}\big)\bar{q} = (\cos\theta p_1 - \sin\theta p_2)\vec{e_1} + (\sin\theta p_1 + \cos\theta p_2)\vec{e_2} + p_3\vec{e_3}$$

となり，結論が得られた．