# 数学科指導法 II
# 提出された問題へのコメント

山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

九州大学教育学部

2008 年 12 月 9 日



## 使用上の注意

- 各答案のすべての問題点を個々に指摘してはいません．
- 再提出いただく問題は，今回のものと異なります
- 今回は解答例の詳細のチェックはしていません．





## 一般的な注意

- 正しい日本語の文章にすること．
- 意味が明確に定まるよう，言い回しに気をつけること．
- 記号などの誤解がないように丁寧に書くこと．たとえば $p$ と P などの区別は明確につけること．
- 記号，用語，基本的な言い回しはテキストにしたがうこと．
- 「範囲外」に注意.
- 何を求めているかが問題文から明確にわかるように.
- 想定していた解答と異なる解答に注意.
- 答えの数字が汚くならないように調整する．





## 問題 0 (1)

2.2 節：四元数の乗法および除法の定義を確認するための具体的な計算問題

1. $\xi=2+i-j+2k$, $\eta=1-i+3j+k$ に対して
(1) $\xi\eta$ (2) $\dfrac{\eta}{\xi}=\xi^{-1}\eta$ を求めよ．
2. $\xi=3+i+j+k$, $\eta=2+3i+2j+k$ とする．(i) $\xi\eta$ を計算せよ．(ii) $\xi^{-1}\eta$ を計算せよ． ⇒





## 問題 0 (2)

3. $\xi=2+i+j-k$, $\eta=1-i+j+2k$, $\zeta=3-i-j-k$ に対して
$(\xi\eta)\zeta=\xi(\eta\zeta)\ldots(1)$
$(\xi+\eta)\zeta=\xi\zeta+\eta\zeta\ldots(2)$
$\xi(\eta+\zeta)=\xi\eta+\xi\zeta\ldots(3)$
さらに $\xi\eta\neq\eta\xi\ \ldots(4)$
を確認せよ．
4. $\xi=1+2i-j+3k$, $\eta=2-i+3j+k$
$\xi\eta$, $\eta\xi$ を求めよ / $\xi^{-1}$ を求めよ．
除法
⇒





## 問題 0 (3)

4. $(i-j)^{-1}(1-i)^{-1}(j-k)(k-1)$ を計算せよ．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1}{2}(j-i)\frac{1}{2}(1+i)(j-k)(k-1)\\
&= \frac{1}{4}(j-k-i+1)(i-j+1+k)=\cdots=1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(i-j)^{-1}(1-i)^{-1}(j-k)(k-1)\\
&\quad=(i-j)^{-1}(1-i)^{-1}(j-ij)(k-1)\\
&\quad=(i-j)^{-1}(1-i)^{-1}(1-i)j(k-1)\\
&\quad=(i-j)^{-1}j(k-1)=(i-j)^{-1}(jk-j)\\
&\quad=(i-j)^{-1}(i-j)=1.
\end{aligned}
$$
⇒





## 問題 0 (4)

5. $\xi=2+i-j+2k$, $\eta=1-2i-j-k$ のとき，$\xi\eta$, $\eta\xi$, $\xi^{-1}$, $\xi^{-1}\eta$, $\eta\xi^{-1}$ を求めよ．
ただし，$i$, $j$, $k$ は $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$ を満たす．$\xi^{-1}\eta\neq\eta\xi^{-1}$ となることにより，四元数の除法が定義できないことがわかる．
6. $\xi=1+i+j+k$, $\eta=1+2i+3j+k$ について
(1) $\xi\eta$ を求めよ．
(2) $\xi^{-1}$ を求めよ．
(3) $\xi\delta_1=\eta$, $\delta_2\xi=\eta$ となる $\delta_1$, $\delta_2$ を求めよ．
⇒





## 問題 0 (5)

8. 次の $\xi$, $\eta$ に対して $\xi\eta$, $\eta\xi$ を計算し，$\xi t=\eta$, $t'\xi=\eta$ を満たす $t$, $t'$ を求めよ.（以下略）
9. 次の式を計算しなさい.
(1) $\{(2+i-3j-k)(-1+i+2j-2k)\}(1-i+3j+k)$ (以下略)
10. 次の問題を解きなさい.
$(2+3i+k)(2j+3k)$ (以下略)
11. $\xi=2+3j$, $\eta=i+5k$ とする．$\xi\eta$ を計算しろ.（以下略）
12. 次の $\varepsilon$, $\eta\in\mathbb{H}$ について $\xi\times\eta$, $\xi\div\eta$ を計算せよ.（以下略）
⇒

## 問題 1 (1)

2.2 節: 四元数と空間ベクトルの内積・外積を確認するための具体的な計算問題.

1. $\vec{a} = i - 2j + 4k = (1, 2, 4)$, $\vec{b} = -i - j + k = (-1, -1, 1)$ として，四元数として $\vec{a}\vec{b}$ を計算し，
$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) & = -(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ \mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) & = \vec{a}\times\vec{b} \end{cases}$$
を確かめよ．ただし右辺の “$\cdot$”, “$\times$” はそれぞれ空間ベクトルの内積，外積である．
17 ページの枠囲い
$\Rightarrow$





## 問題 1 (2)

2. 2 つの虚四元数 $a = 2i + 3j - 2k$, $b = 3i - 4j + k$ をそれぞれ $\vec{a} = (2, 3, -2)$, $\vec{b} = (3, -4, 1)$ のように空間のベクトル表示で表すことができる．このとき $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ を求めよ．また $ab$ を虚四元数の積として直接計算によって求めよ．
3. (1) $\vec{a} = xi + yj + zk$, $\vec{b} = x'i + y'j + z'k$ として $\vec{a}\vec{b} = -(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{a}\times\vec{b}$ となることを確認せよ．
(2) $\vec{a} = 3i - j - 2k$, $\vec{b} = 2i - 3j + k$ のとき $\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b})$, $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b})$ をそれぞれ求めよ．
p. 17
$\Rightarrow$





## 問題 1 (3)

4. 空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を虚四元数とみなし，$\vec{a}\vec{b}$ を $\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$ であることを用いて求めよ．
   1. $\vec{a} = i + j + k$, $\vec{b} = i + 2j + 3k$.
   2. $\vec{a} = -i + 3j - 2k$, $\vec{b} = 3i - j - k$.
   3. $\vec{a} = i + 2k$, $\vec{b} = j - 3k$.
   4. $\vec{a} = 2i + 3j + k$, $\vec{b} = \frac{1}{14}(-2i - 3j - k)$.

   複数問題それぞれの意図 $\Rightarrow$





## 問題 1 (4)

5. 空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を虚四元数とみなすと，$\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$ すなわち $\vec{a}\vec{b} = -(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{a}\times\vec{b}$ であることを用いて次を計算せよ．
問．$\vec{a} = 3i + 2j + k$, $\vec{b} = i + 2j + 3k$ を用いて上を計算せよ．
6. (前略) 答えは実数もしくは四元数で答えよ．
7. 空間ベクトルとして $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, 四元数として $\vec{a} = i + j$, $\vec{b} = i + k$ として $(\vec{a}, \vec{b})$, $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$ を計算して $\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$ をたしかめよ
8. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について $(\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3)$ (以下略)
9. $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ を実数，$i$, $j$, $k$ を虚数単位とする.(以下略)
$\Rightarrow$





## 問題 1 (5)

10. 次の虚四元数 $\xi, \eta$ をそれぞれ空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ とみなしたとき，虚四元数と空間ベクトルの内積と外積の関係を確認しよう．
(i) $\vec{a} = (-1, 2, 2)$ として $\xi = -i + 2j + 2k$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$ として $\eta = i - j + 2k$.
(ii) $\vec{a} = (3, 2, -1)$ として $\xi = 3i + 2j - k$. $\vec{b} = (-2, 3, -5)$ として $\eta = -2i + 3j - 5k$.
何をする問題か
11. 答えの大きさ？
12. 内積・外積の図形的な意味を用いて？
$\Rightarrow$





## 問題 2 (1)

3.2 節: 四元数を用いた空間の回転の表示を確認するための具体的な計算問題

1. 点 $\mathrm{A}(-2\sqrt{6}, -2\sqrt{2}, -2)$ を，原点を通り空間ベクトル $(2\sqrt{6}, -2\sqrt{2}, -2)$ に平行な直線を軸として $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転させて得られる点の座標を求めよ．
2. 点 P の位置ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = i + 2j + 3k$ とする．単位ベクトル $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ とし，原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を軸としたとき，点 P を $\vec{v}$ が指す方向を正としたとき，$\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたときの点 $\mathrm{P}'$ の位置ベクトル $\vec{p}'$ を求めよ．
$\Rightarrow$





## 問題 2 (2)

3. 原点を通り，次のベクトルに平行な直線を軸として，ベクトルが指す方向から見たときに正の向きに次の角度だけ回転させる．回転後の $\mathrm{P} = (2, 1, 0)$ の座標を求めよ．
(1) $\vec{v}_1 = (0, 0, 1)$, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$.
(2) $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\theta_2 = \frac{3}{2}\pi$.
3. 原点を通り，ベクトル $\vec{v}$ に平行な直線を軸として，$\vec{v}$ が指す方向から見たときに正の向きに点 $\mathrm{P}(2, 1, 0)$ を角度 $\theta$ だけ回転させて得られる点の座標を，次のそれぞれの場合に求めよ
(1) $\vec{v} = (0, 0, 1)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$.
(2) $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

$\Rightarrow$





## 問題 2 (3)

4. $q = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}k$: 単位四元数とする．$p = 2i - j + k$: 四元数を $q$ によって回転させたとき，得られる四元数が $p' = i + 2j + k$ であることを確かめよ．ただし，原点を通りベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に適合した右手系の枠を $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ とする．

$\Rightarrow$

## 問題 2 (4)

5. 点 $(1,0,0)$ を，原点を通り $\vec{e}=(1,0,0)$ に平行な直線を軸として $\vec{e}$ が指す方向から見たときに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた点を求めよ．
6.
   1. 空間に於いて原点を通りベクトル $\vec{u}=(1,0,1)$ に平行な直線を軸として点 $\mathrm{P}(1,3,1)$ を $\vec{u}$ が指す方向から見たときに正の向きに角度 $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点の座標を求めよ．
   2. 空間の点 $(1,-1,0)$ を，原点を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,0,0)$ に平行な直線を軸として $\vec{v}$ が指す方向からた見たときに正の向きに $\pi$ だけ回転した点が $(1,1,0)$ となることを確認せよ．

$\Rightarrow$





## 問題 2 (5)

7. 原点 $(0,0,0)$ を通り，$\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を中心に，点 $\mathrm{P}(2,1,0)$ を $\pi$ だけ回転させた $\mathrm{P}'$ の座標を以下のように求める．
   1. $\mathbf{R}^3 \simeq \operatorname{Im} H$ とみなすことで $q=\cos\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}$ となる単位四元数 $q$ を求めよ．
   2. (i) の結果を用いて $\mathrm{P}'$ の座標を求めよ．

   上の変換は $x$-$y$ 平面上での直線に関する点の対称移動となっている．
   3. $x$-$y$ 平面上での対称移動を考えることで $\mathrm{P}'$ の座標を求め (ii) の結果と一致しているか確認せよ．

$\Rightarrow$





## 問題 2 (6)

8. $z$ 軸を軸とした $90^\circ$ の回転を表す写像を求めよ．また，その写像によって $xz$ 平面の全ての点は $yz$ 平面に移ることを確かめよ．
9. $\ell$ 2 点 $(0,0,0)$ $(3,4,5)$ を通る直線．点 $\mathrm{P}\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}, 1-\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ を $\ell$ を軸として $60^\circ$ 回転させた点を示せ．
10. 原点を通り $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を中心に点 $\mathrm{P}(0,1,1)$ を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた $\mathrm{P}'$ の座標を求める問題．
11. 原点を通り向きが $q=(q_x,q_y,q_z)$ ベクトル $Q$ のまわりの $\theta$ の回転が $(v_x,v_y,v_z)\mapsto(v_x',v_y',v_z')$ という写像になるとき，$(v_x',v_y',v_z')$ を求めよ．

$\Rightarrow$





## 問題 0 (1)

2 節「複素数と四元数」の節末問題．ただし四元数に関わるもの．

1. 0 でない四元数 $\xi,\eta$ について

$$\xi\eta=\eta\xi \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\operatorname{Im}\xi}//\overrightarrow{\operatorname{Im}\eta}$$

を示せ．ただし $\overrightarrow{\operatorname{Im}\xi}$ は $\xi$ の虚部を 3 次元ユークリッド空間の点と同一視したとき，その点における位置ベクトルを表す．

1. 虚部が 0 でない四元数 $\xi,\eta$ が $\xi\eta=\eta\xi$ を満たすための必要十分条件は，空間ベクトル $\operatorname{Im}\xi$，$\operatorname{Im}\eta$ が平行となることである．このことを示せ．

解答：成分計算が必要？

$\Rightarrow$





## 問題 0 (2)

2. 四元数 $\xi=a+bi+cj+dk$, $\eta=p+qi+rj+sk$ について次の問いに答えなさい（$a,b,c,d,p,q,r,s\in\mathbf{R}$）
   1. $\operatorname{Re}\xi\eta=\operatorname{Re}\eta\xi$ であることを示しなさい．
   2. $\xi\eta=\eta\xi$ となるための条件を求めなさい．
   3. 一般に可換となるとき $\xi,\eta$ はどのような形をしているか求めなさい．

2. 四元数 $\xi=a+bi+cj+dk$, $\eta=p+qi+rj+sk$（$a,b,c,d,p,q,r,s$ は実数）について，次の問いに答えなさい．(以下略)
   - 主語がない
   - どういう解答を期待しているか

$\Rightarrow$





## 問題 0 (3)

3. $\xi=(1+3i+aj+k)$, $\eta=(3+bi+4j+2k)$ について $\xi\eta=\eta\xi$ となる $a$, $b$ を求めよ．

3. $\xi=1+3i+aj+k$, $\eta=3+bi+4j+2k$ が $\xi\eta=\eta\xi$ を満たすような実数 $a$, $b$ を求めよ．

$\Rightarrow$





## 問題 0 (4)

4. 記号 $i,j,k$ には $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$ が成立している．
   $a$ を実数定数とする．$x$ についての方程式
   $$(1+i+j+k)x^2+(-2a-4i-k)x+a^2+3i-j=0 \qquad (*)$$
   について以下の問いに答えよ．
   1. 方程式 $(*)$ が実数解を 1 つもつとき，$a$ の値と実数解を求めよ．
   2. $a$ が (1) で求めた値のとき，もう 1 つの四元数解を求めよ．

4. 四元数 $x$ についての方程式
   $$(1+i+j+k)x^2+(-2a-4i-k)x+a^2+3i-j=0 \qquad (a\text{ は実数の定数})\ (*)$$
   について以下の問いに答えよ．
   1. 方程式 $(*)$ が実数解を一つもつとき，$a$ の値と実数解を求めよ．
   2. $a$ が (1) で求めた値のとき，$(*)$ の解を全て求めよ．

   解が 2 つであることは自明ではない

$\Rightarrow$





## 問題 0 (5)

5. $\xi,\eta$ を四元数とし，$\xi=t+xi+yj+zk$ と表すこととする（ただし $t,x,y,z$ は実数）このとき次の問いに答えよ．
   1. $\xi^2$ を $t,x,y,z$ を使った式で表せ．
   2. $\eta^2=1+i+j+k$ となる $\eta$ を全て求めよ．
   3. $\eta^2=1+2i+3j+4k$ なる $\eta$ を全て求めよ．
   4. $\xi^2=-1$ となる $\xi$ の満たす条件を $t,x,y,z$ を使ってもとめよ．また，そのときの $(x,y,z)$ を図示せよ．

5. 次の問いに答えよ．
   1. $\eta^2=1+i+j+k$ となる四元数 $\xi$ を全て求めよ．(2 個)
   2. $\eta^2=1+2i+3j+4k$ なる四元数 $\xi$ を全て求めよ．(0 個)
   3. $\xi^2=-1$ となる四元数 $\xi$ を全て求めよ．($\infty$ 個)

$\Rightarrow$

## 問題 0 (6)

6. 1. 四元数 $\xi = t + xi + yj + tz$ に対し，$\xi^2$ を $t, x, y, z$ を用いて表せ.
   2. 未知数 $\xi$ が四元数であるような 2 次方程式
   $$\xi^2 = a \qquad (a\text{: 実数})$$
   を考える．上の方程式は
   - $a > 0$ ならば実数解 2 つのみ,
   - $a = 0$ なら実数解 1 つのみ
   - $a < 0$ なら無限個の純虚四元数解をもつことを示せ.

6. 未知数 $\xi$ が四元数であるような 2 次方程式
$$\xi^2 = a \qquad (a \text{ は実数})$$
の解は
- $a > 0$ ならば異なる 2 つの実数,
- $a = 0$ ならただ 1 つの実数,
- $a < 0$ なら無限個の純虚四元数

からなることを示せ.

$\Rightarrow$





## 問題 0 (7)

7. 1. $a, b, c$ 実数，ただし $a \geq 0, b \geq 0$ とする．このとき $c =\leq 2\sqrt{ab}$ ならば $a + b + c \geq 0$ であって，かつ $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ が成り立つことを示せ.
   2. 四元数 $\xi, \eta$ に対して三角不等式 $|\xi + \eta| \leq |\xi| + |\eta|$ が成り立つことを示せ.
   3. 四元数列 $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ と四元数 $\xi$ に対して，$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ を $\lim_{n\to\infty} |\xi_n - \xi| = 0$ で定める．$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ ならば $\lim_{n\to\infty} |\xi_n| = |\xi|$ を示せ.

- シュワルツの不等式？
- 「 補充知識」が多すぎない？

$\Rightarrow$





## 問題 0 (8)

8. 次の命題の真偽を調べ，真なら証明し，偽なら反例を挙げよ．
   1. $\xi\eta = \eta\xi$ のとき，$\xi^{-1}\eta^{-1} = \eta^{-1}\xi^{-1}$ である．
   2. $\xi$ は四元数とする．方程式 $\xi^2 = \xi$ を満たすのは $\xi = 0, 1$ のみである．

8. 次の命題の真偽を調べ，真なら証明し，偽なら反例を挙げよ．
   1. 四元数 $\xi, \eta$ が $\xi\eta = \eta\xi$ を満たすとき，$\xi^{-1}\eta^{-1} = \eta^{-1}\xi^{-1}$ である．
   2. 等式 $\xi^2 = \xi$ を満たす四元数 $\xi$ は $0, 1$ のみである．

9. 1. $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2})^2$, $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2})^3$ を求めよ．
   2. $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2})^n$ を推測し，それを証明せよ．

9. 1. $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2})^2$, $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2})^3$ を求めよ．
   2. 自然数 $n$ に対して $(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{j}{2} - \frac{k}{2})^n$ を推測し，それを証明せよ．

$\Rightarrow$





## 問題 0 (9)

10. 虚四元数 $xi + yj + zk$ $(x, y, z$ は実数$)$ に対して空間ベクトル $(x, y, z)$ を対応させるとき，$i + j + k$, $-i + \frac{1}{2}j - k$, $i + \frac{1}{4}j$, $\frac{3}{2}j + k$ がすべて同一平面上にあることを空間の外積の性質を用いて示せ.

10. 虚四元数 $xi + yj + zk$ $(x, y, z$ は実数$)$ に対して座標空間の点 $(x, y, z)$ を対応させるとき，$i + j + k$, $-i + \frac{1}{2}j - k$, $i + \frac{1}{4}j$, $\frac{3}{2}j + k$ がすべて同一平面上にあることを空間の外積の性質を用いて示せ.

むしろ 1 節の演習問題？

$\Rightarrow$





## 問題 0 (10)

11. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{i} = \sigma_1$, $\mathbf{j} = i\sigma_2$, $\mathbf{k} = i\sigma_3$ としたとき，$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ が四元数の $i, j, k$ の関係式と同様の式が成立することを確かめよ．

どういう答えを求めているか？

12. 任意の四元数 $\xi, \eta$ に対して $\overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi}$ が成立する（ p. 15 四元数の共役）が成立することを証明せよ.（ ただし $\bar{\eta}\bar{\xi}$ を直接計算してはならない）

何をどう限定しているのか？

$\Rightarrow$





## 問題 0 (11)

13. $\xi = t + xi + jy + kz$, $\eta = 1 + 3i - 2j + 4k$, $\zeta = \frac{7}{30} - \frac{1}{30}i - \frac{1}{5}j - \frac{4}{15}k$ とする．$\xi\eta\zeta = 3 + 6i + 3j - k$ を満たす実数 $t, x, y, z$ を求めよ．

先に $(\eta\zeta)^{-1}$ を計算？

14. $\xi = a + bi + cj + dk$, $\eta = a' + b'i + c'j + d'k$ として $\xi\eta \neq \eta\xi$ を確かめよ.（ $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a', b', c', d' \in \mathbf{R}$）

問題が正しくない

$\Rightarrow$





## 問題 0 (12)

15. 四元数 $\xi = 4 - 2i + 2j + k$ が与えられていて，2 つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を虚四元数とみなすと，以下の関係式が得られる．
$$\xi\vec{a} = i - 18k + 5, \qquad \eta\vec{b} = 9i + 21j + 9k - 8.$$
   1. 虚四元数 $\vec{a}, \vec{b}$ を求めよ．
   2. 空間ベクトルの内積と外積を利用して，2 つのベクトルの積 $\vec{a}, \vec{b}$ を求めよ．

- 単純計算？
- 虚四元数であることの必然性
- 2 つのベクトルの積 $\Rightarrow$ 四元数の積？

$\Rightarrow$





## 問題 1 (1)

3 節「 四元数と空間の回転」の節末問題.

1. 空間の点 P$(1, 2, 3)$ を原点を通り，$\vec{v} = (1, 1, 1)$ に平行な直線を軸として $\vec{v}$ が指す方向から見たときの正の向きに $\theta$ だけ回転すると，点 P は
$$\mathrm{P}'\left(-\frac{\sqrt{6}}{3} + 2, \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} + 2, \frac{\sqrt{6}}{3} + 2\right)$$
に移った．このときの回転角 $\theta$ を求めよ．ただし $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．

1. 空間の，原点を通り $\vec{v} = (1, 1, 1)$ に平行な直線を軸として $\vec{v}$ が指す方向から見て正の向きに角度 $\theta$ 回転させる変換によって点 P$(1, 2, 3)$ は P$'(\ldots)$ に移った．回転角 $\theta$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を求めよ．

- 問題の P$'$ の座標がもう少しシンプルになるように調整せよ

$\Rightarrow$

## 問題 1 (2)

② 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と実数 $\theta$ に対して，単位四元数を $q=\cos\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\vec{v}\right)$ とすると，すべての空間ベクトル $\vec{w}$ に対して

$$q\vec{w}\bar{q}=(\cos\theta)\vec{w}+(\sin\theta)(\vec{v}\times\vec{w})+(1-\cos\theta)\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\cdot\vec{v}$$

が成立することを示せ．

② 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と実数 $\theta$ に対して，単位四元数を $q=\cos\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\vec{v}\right)$ とすると，すべての空間ベクトル $\vec{w}$ に対して

$$q\vec{w}\bar{q}-(\cos\theta)\vec{w}+(\sin\theta)(\vec{v}\times\vec{w})+(1-\cos\theta)(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{v}$$

が成立することを示せ．

- この式の図形的な意味を問いたい

$\Rightarrow$





## 問題 1 (3)

③ 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と実数 $\theta$ に対して，単位四元数 $q$ を $q=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\vec{v}$ とする．
空間の点 P の位置ベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を虚四元数とみなすとき，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\vec{p}'=q\vec{p}\bar{q}$ となる点 P′ は原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を軸として点 P を $\vec{v}$ が指す方向から見たときに正の向きに $\theta$ 回転を表した．このとき
$\overrightarrow{\mathrm{OP}''}=\vec{p''}=\bar{q}\vec{p}q$ はどのような回転を表すか？

③ 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と実数 $\theta$ に対して，単位四元数 $q$ を $q=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\vec{v}$ とする．空間の点 P の位置ベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を虚四元数とみなすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}''}=\vec{p''}=\bar{q}\vec{p}q$ はどのような回転を表すか．

- 図形的な意味から明らか，という解答への対処

$\Rightarrow$





## 問題 1 (4)

④ 空間の単位ベクトルを $\vec{v}$ とする．まず $\vec{e}_3=\vec{v}$ とし，$\vec{v}$ に平行な直線 $l$ に適合した右手系の枠を $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ とする．ここで，単位四元数を $q=\cos\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}$ とおいた時，$q\vec{e}_3\bar{q}=\vec{e}_3$ となることを示せ．

④ 空間の単位ベクトルを $\vec{v}$ に平行な直線 $l$ に適合した右手系の枠を $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ とする．このとき，単位四元数 $q=\cos\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}$（$\theta$ は実数）に対して $q\vec{e}_3\bar{q}=\vec{e}_3$ となることを示せ．

- $l$ は回転だから軸上の点を固定する，という解答は？

$\Rightarrow$





## 問題 1 (5)

⑤ 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と実数 $\theta$ に対して単位四元数

$$q=\cos\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}\qquad とする．$$

原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を $l$，$\vec{e}_3=\vec{v}$ とした時，$l$ に適合した右手系の枠 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ をとる．次の等式を示せ．

$$q\vec{e}_1\bar{q}=(\cos\theta)\vec{e}_1+(\sin\theta)\vec{e}_2,\quad q\vec{e}_2\bar{q}=-(\sin\theta)\vec{e}_1+(\cos\theta)\vec{e}_2,\quad q\vec{e}_3\bar{q}=\vec{e}_3$$

⑤ 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と実数 $\theta$ に対して単位四元数 $q=\cos\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}$ をとる．原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線 $l$ に適合した右手系の枠 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ に対して，次の等式を示せ.（以下略）

- テキスト本文で説明すべきこと？（大学の教科書との違い）

$\Rightarrow$





## 問題 1 (6)

⑥ p. 18 の注意の内容を $l$ 方向の単位ベクトル $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, P $=(1,2,1)$, 回転角 $\theta=\frac{\pi}{2}$ に対して確かめよ．

⑥ 18 ページの注意の内容を $l$ 方向の単位ベクトル $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, P$(1,2,1)$, 回転角 $\theta=\frac{\pi}{2}$ に対して確かめよ．

- 本文の問いで確かめるべき

$\Rightarrow$





## 問題 1 (7)

⑦
- (i) 座標空間 $R^3$ 上の点 P$(1,2,2)$ を，原点 O を通りベクトル $(1,1,1)$ に平行な直線 $l$ を軸として正の向きに $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転させた点 P′ の座標を求めよ．
- (ii) (i) の P を $l$ を軸に一回転させてできる円を底面とし，原点を頂点とするような円錐の体積 $V$ を求めよ．

⑦
- (i) 座標空間の点 P$(1,2,2)$ を，原点 O を通りベクトル $\vec{v}=(1,1,1)$ に平行な直線 $l$ を軸として，$\vec{v}$ が指す方向から見て正の向きに $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転させた点 P′ の座標を求めよ．

- (ii) は何の理解を測る問題か

$\Rightarrow$





## 問題 1 (8)

⑧ 3 点 A$(2,1,-3)$, B$(1,3,-2)$, C$(3,2,-1)$ に対して $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ と置く．そして，原点を通り $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行な直線を軸として，点 D$(1,-1,1)$ を $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が指す方向からみたときに正の向きに $2\theta$ だけ回転させた点の座標を D′ とする．このとき三角形 BDD′ の面積 $S$ を求めよ．

⑧ 3 点 A$(2,1,-3)$, B$(1,3,-2)$, C$(3,2,-1)$ に対して $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ $(0\le\theta<\pi)$ とおき，原点を通り $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行な直線を軸として，点 D$(1,-1,1)$ を $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が指す方向からみたときに正の向きに $2\theta$ だけ回転させた点を D′ とする．このとき三角形 BDD′ の面積を求めよ．

- 条件が不自然
- 答えがシンプルになるように係数を調整せよ
（$\frac{1}{4}\sqrt{289-190\sqrt{2}}$）

$\Rightarrow$





## 問題 1 (9)

⑨ 四元数を $\mathbf{R}^3$ 上の空間で考える．$\mathbf{R}^3$ 上の点 P$(2,4,-2)$ を，原点と $(1,1,0)$ を通る直線 $l$ の周りで左回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し，その点をさらに $y$ 軸の周りで左回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点 Q の座標を求めよ．

無意味な文

⑩ $\mathbf{R}^3$ 上の点 A が点 B へ原点中心の回転で移ったとする．この回転軸，回転角度，この回転を表す四元数を求めよ．

答えの一意性がない

⑪ 直線 $2x+y-z=0$ を軸としたとき，点 P$(2,1,-1)$ が回転角 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ で移される点 P′ の座標を求めよ．

これは直線ではない

$\Rightarrow$