2009 年 1 月 6 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

数学科指導法 II 講義資料 9

おしらせ

- あけましておめでとうございます.
- 本日返却した答案を受け取れなかった方は，数理学研究院事務室（理学部本館 4 階）にて受け取って下さい.
- 1 月 13 日の授業は今回のコメントの続きになります.

一般的な注意

前回の「一般的な注意」が実行できていない人が多いようです.

- 正しい日本語の文章にすること.
- 意味が明確に定まるよう，言い回しに気をつけること.
- 記号などの誤解がないように丁寧に書くこと．たとえば p と P などの区別は明確につけること.
- 記号，用語，基本的な言い回しはテキストにしたがうこと.
- 「範囲外」に注意.
- 何を求めているかが問題文から明確にわかるように.
- 想定していた解答と異なる解答に注意.
- 答えの数字が汚くならないように調整する.

提出された問題（抜粋）

課題 1

問題 (2)

2.2 節：四元数の乗法および除法の定義を確認するための具体的な計算問題

(1) $\xi = 1 - i + 2j + 3k$, $\eta = 2 + 3i - j + 4k$ として次を計算せよ
 (i) $\xi' = \xi\eta$, $\eta' = \eta\xi$ となる ξ', η'. (ii) $\xi''\xi = \eta$, $\eta''\eta = \xi$ となる ξ'', η''.
 （コメント：計算せよ？）

(2) $\xi = 1 + mi + 3j + 4k$, $\eta = 3 + 4i + nj + 6\sqrt{5}k$ とする.
 (1) $\xi\eta = (-20 - 24\sqrt{5}) + xi + yj + (10 + 6\sqrt{5})k$ となるとき整数 m, n および実数 x, y の値を求めよ．(2) (1) のとき η^{-1} を求めよ.
 (コメント：非可換性；問題としてはおもしろいが)

(3) $\xi = 3 + i - j + 2k$, $\eta = -1 + 3i - 2j + k$ とする．このとき次の問いに答えよ．(1) $\xi\eta$, $\eta\xi$ を求めよ.

(2) $\xi\eta = \eta\xi$ を満たす四元数 ζ を求めよ.

（コメント：一般式？検算）

(4) (i) $\{(i+j+k)(i+j)i-i(i+j)(i+j+k)\}\{(j+k+i)(j+k)j-j(j+k)(j+k+i)\}\{(k+i+j)(k+i)k-k(k+i)(k+i+j)\}$ を計算せよ（以下略）

（コメント：(i,j,k) はサイクリックなので？）

(5) $\xi = 1-2i+3j+2k$, $\eta = 5-i-j-3k$ とする．(1) $\xi\eta = \eta\xi$ を求めよ．(2) ξ^{-1}, η^{-1} を求めよ．(3) $\eta\xi^{-1}$, $\xi\eta^{-1}$, $\eta\xi^{-1}\xi\eta^{-1}$ を求めよ.

（コメント：(3) の別解？）

(6)「任意の四元数 ξ, η に対し，$\overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi}$ が成りたつ」を実際に証明せよ.

（コメント：一般的な公式の証明は高等学校の教科書の問いとして適当か）

(7) $\xi_1 = 1-i-2j+k$, $\eta_1 = 2-3i+j+3k$ として次を求めよ．(i) $\xi_2 = \xi_1\eta_1$, $\eta_2 = \eta_1\xi_1$ を満たす四元数 ξ_2, η_2．(ii) $\xi_3\xi_1 = \eta_1$, $\eta_3\eta_1 = \xi_1$ を満たす四元数 ξ_3, η_3.

（コメント：すべての文字に添字をつけるのはいかがなものか？）

問題 (0)

2.2 節：四元数と空間ベクトルの内積・外積の関係を確認するための具体的な計算問題

(1) 虚四元数 $\xi = -i+j-k$, $\eta = 3i-j+2k$ がある．$\vec{a} = (-1,1,-1)$, $\vec{b} = (3,-1,2)$ とする．$\xi\cdot\eta$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算することにより,

$$\mathrm{Re}(\xi\cdot\eta) = -\vec{a}\cdot\vec{b}, \qquad \mathrm{Im}(\xi\cdot\eta) = \vec{a}\times\vec{b}$$

であることを確かめよ.

（コメント：四元数の積に "·" を使うのはまずいのでは？;「$\vec{a}$ は ξ に対応する空間ベクトル」でよいのでは？）

(2) 空間ベクトル $\vec{a} = (2,5,3)$, $\vec{b} = (1,-1,3)$ を虚四元数とみなし，$\vec{a} = 2i+5j+3k$, $\vec{b} = i-j+3k$ と書く．このとき，次の問いに答えなさい．(i) $\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b})$, $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b})$ を計算しなさい．(ii) (i) を用いて $\vec{a}\vec{b}$ を計算しなさい.

（コメント：文脈を外れてみると，問題の順番が逆なのでは？）

(3) (1) 虚四元数 $\vec{a} = x_1i+y_1j+z_1k$, $\vec{b} = x_2i+y_2j+z_2k$ に対し，空間ベクトルを $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2)$ とすると，$\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$ であることを確めよ.（以下略）

（コメント：一般的な公式の証明は教科書の問いには馴染まない；「虚四元数と対応する空間ベクトル」という言い回しは嫌い？）

(4) 空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を虚四元数として見なし，次の場合について $\vec{a}\vec{b}$ を求めよ．(1) $\vec{a} = (3,-2,3)$, $\vec{b} = (4,1,2)$ (以下略)

（コメント：「虚四元数として見なし」は「虚四元数とみなし」だと思う；内積・外積との関係を理解しているかどうか，どうやってチェックするか）

(5) 空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を虚四元数とみなしたとき，$\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$ であることを用いて $\vec{a} = -i+2j+k$, $\vec{b} = 3i-j-2k$, $\vec{c} = -i+2j+k$ に対して積 $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ を求めよ.

（コメント：$\vec{c} = \vec{a}$ となっているのがわざとらしい気がする；答えが虚四元数になるのは偶然？）

(6) $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b} = (0,2,1)$ $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}-\vec{a}| = 3$, $\mathrm{Im}\,\vec{a}\vec{b} = (-4,2,4)$ とする．このとき $\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b})$ と

$\vec{a}$ を求めよ．

（コメント：$\vec{a}$ の成分表示は問題文に必要？）

問題 (1)

3.2 節：四元数を用いた空間の回転の表示を確認するための具体的な計算問題

(1) $\vec{\xi}=(3,5,7)$, $\vec{v}=(1,0,0)+t(1,0,0)$ $(t\in\boldsymbol{R})$ とするとき，$\vec{v}$ のまわりで ξ を π 回転した点の座標を求めよ．（但し四元数を使って求めよ）

(解答：$(\frac{19}{5},\frac{4}{5},-2)$?)

（コメント：「但し」以下は不要；言い回しがおかしい）

(2) 原点を通り $\vec{v}=(0,1,0)$ に平行な直線 l を軸として点 $\mathrm{P}(-\frac{5\sqrt{2}}{2},4+2\sqrt{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2})$ を $\vec{v}$ が指す方向から見たときに正の向きに $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転させる．このとき点 P が移された先の点 P' の座標を求めよ．

(解答：$(1,1,4)$?)

（コメント：問題の数字が「問い」としては適当ではない；半角の公式を使うところはおもしろい）

(3) $q=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}k$ とすると，q は単位四元数である．$p=2i-j+k$ を q によって回転させたとき得られる四元数を求めよ．

（コメント：回転の図形的意味をとわないと，ただの四元数の計算問題？）

(4) $\vec{e}=k\in\mathrm{Im}\,\boldsymbol{H}$, $\frac{\pi}{2}$, $\boldsymbol{e}_1=i\in\mathrm{Im}\,\boldsymbol{H}$ を回転させよ．

（コメント：意味不明）

(5) 点 $\mathrm{P}(1,2,1)$ を，原点を通り，空間ベクトル $(1,1,1)$ に平行な直線を軸として正の方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させて得られる点 A の座標を求めよ．

（コメント：「正の方向」？）