2009 年 1 月 13 日 (2009 年 1 月 20 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

数学科指導法 II 講義資料 10

おしらせ

- 次回 1 月 20 日が最後の授業となります．この時間に最終レポート課題を出します．この課題では「節末問題」を 2 問つくってもらうことになる予定です．

提出された問題（抜粋）

課題 2

問題 (1)

2 節「複素数と四元数」の節末問題．ただし四元数に関わるもの．

問題 1： (1) ξ を四元数とするとき $\xi+\xi^{-1}$ が実数となるための条件を求めよ．($\xi\neq 0$)

(2) ξ を四元数とするとき $\xi+\xi^{-1}$ が虚四元数となるための条件を求めよ．($\xi\neq 0$)

(3) ξ を四元数とするとき $\xi^2+\xi^{-2}$ が実数となるための条件を求めよ．($\xi\neq 0$)

修正案： 次を満たす 0 でない四元数 ξ はどんな四元数か：

(1) $\xi+\xi^{-1}$ が実数である．

(2) $\xi+\xi^{-1}$ が虚四元数である．

(3) $\xi^2+\xi^{-2}$ が実数である．

コメント：
- 各小問に同じことを書くなら，まとめた方がよいのでは？
- 括弧書きは本当に必要な場合に限るべき．
- $\xi+\xi^{-1}$ が実数となる条件は「$\xi+\xi^{-1}$ が実数」は正解か？
- うるさいことを言えば ξ^{-2} は何を意味するか？

問題 2： $\xi=2+i-j-2k$ とする．$\xi\eta=\eta\xi=1-bi+2j+ak$ となるような実数 a, b と四元数 η を求めよ．

修正案： $\xi=2+i-j-2k$ とするとき，$\xi\eta=\eta\xi=1+ai+2j+bk$ となるような実数 a, b と四元数 η を求めよ．

コメント：
- なぜ b が a より先？
- 別解：ξ, η の可換性から $\eta=t+s(i-j-2k)$ (s, t は実数) と書ける．

問題 3： $\xi=1+2i+bj+7k$ ($b\in\boldsymbol{R}$), $\eta=a+8+i+4j$ ($a\in\boldsymbol{R}$) とする．このとき，$\xi\cdot\eta=-23-29i+6j+k$ となるような $a,b\in\boldsymbol{R}$ の値を求めなさい．

修正案： 実数 a, b に対して $\xi=1+2i+aj+7k$, $\eta=b+i+4j$ とするとき，$\xi\eta=-23+29i+6j+k$ となったという．a, b の値を求めよ．

コメント：
- なぜ b が a より先？

- a でなく $a+8$ とした意図は？
- $a \in \boldsymbol{R}$ のような言い回しは高等学校では使わない.
- 四元数の積の記号に "·" は使わない（同じ文脈で内積を考えることがある).

問題 4： 四元数 $\xi = t + xi + yj + zk$, $\eta = T + Xi + Yj + Zk$ (t, x, y, z, T, X, Y, Z は実数) について，次の問いに答えなさい.

(1) $\xi\eta = \eta\xi$ となるとき，$\mathrm{Re}\,\xi\eta = \mathrm{Re}\,\eta\xi$ であることを示し，x, y, z, X, Y, Z が満たす関係式を求めよ.

(2) $\zeta_1 = 1 + 2i + aj + 2k$, $\zeta_2 = 3 + bi + 12j + 3k$ のとき，$\zeta_1\zeta_2 = \zeta_2\zeta_1$ を満たす実数 a, b を求めよ.

修正案： (1) 2 つの四元数 ξ, η が $\xi\eta = \eta\xi$ を満たすための必要十分条件は，$\mathrm{Im}\,\xi$, $\mathrm{Im}\,\eta$ が空間ベクトルとして平行なことである．このことを示しなさい.

(2) 実数 a, b に対して $\zeta_1 = 1 + 2i + aj + 2k$, $\zeta_2 = 3 + bi + 12j + 3k$ とするとき，$\zeta_1\zeta_2 = \zeta_2\zeta_1$ が成りたつという．a, b の値を求めよ.

コメント：
- $\xi\eta = \eta\xi$ でなくても $\mathrm{Re}\,\xi\eta = \mathrm{Re}\,\eta\xi$ は成立するはず.
- 可換性の条件に t，T が入らないのは当たり前だが，最初から "$x, y, z,\ X, Y, Z$" としてよいものか.
- 条件は $\mathrm{Im}\,\xi \times \mathrm{Im}\,\eta = 0$ であることに気づけば暗算だが.

問題 5： 四元数 ξ, η が，次の 2 つの等式を満たすとする.

$$\eta^2 + \bar{\xi} = \eta(\bar{\xi} + 1) \qquad \ldots[1]$$
$$\xi^{-1} + 1 = \eta \qquad \ldots[2]$$

(1) [1] をみたす η を求めよ.

(2) ξ は実数であることを示せ.

(3) η を虚四元数とする．このとき $\xi^3 = 1$ を示せ.

修正案： 関係式

$$\eta^2 + \bar{\xi} = \eta(\bar{\xi} + 1) \qquad \xi^{-1} + 1 = \eta$$

を同時に満たす四元数 ξ, η を求めよ.（答え："$\xi = \eta = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$"）

コメント：
- 問題の条件が強すぎて，解がない：[1] より $\eta = 1$ または $\eta = \bar{\xi}$．とくに $\eta = \bar{\xi}$ を [1] に代入し，両辺に左から ξ をかけると $1 + \xi = |\xi|^2$ なので，ξ は実数．したがって $\eta = \bar{\xi}$ も実数となり，η が純虚数になることはありえない.
- [1], [2] を満たすという仮定のもと (1) の問いはおかしい.
- [1] だけでは η は求まらないはず.
- 純粋に問題文だけを見ると，(1) で求めた η に (3) であとから条件を付け加えたことになっている.
- ξ は実数なのだから $\xi^3 = 1$ から $\xi = 1$ となるのでは？

問題 6： (1) $\vec{a} = i + xj + 2k$, $\vec{b} = -i + 3j + yk$ は $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, $\vec{a} \times \vec{b} = -7i - 3j + 2k$ を満たしている．このとき x, y を求めよ.

(2) $\xi = t + \vec{a}$，$\eta = 1 + \vec{b}$ とする．$\xi\eta = t' - 8i - 2j + 6k$ となるような t, t' を求めよ.

修正案： 実数 x, y に対して

$$\vec{a} = i + xj + 2k, \qquad \vec{b} = -i + 3j + yk$$

とおくと，$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, $\vec{a} \times \vec{b} = -7i - 3j + 2k$ が成りたっているという．このとき，

(1) x, y を求めよ.

(2) 次を満たす実数 t, t' を求めよ：$\xi = t + \vec{a}, \eta = 1 + \vec{b}$ とおくとき $\xi\eta = t' - 8i + 2j + 6k$.

コメント：
- x, y, t, t' は実数でないと解が確定しない.
- (2) は (1) の条件を継承しているのか.
- (2) は条件が強すぎて，係数を少し変えると解が存在しない（オプション）

問題 7： 2 つの虚四元数 ξ, η を空間ベクトルと同一視して，$\xi = \vec{a}, \eta = \vec{b}$ $(\vec{a}//\vec{b}, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$ とする．t, s を実数として，四元数 $\xi' = t + \vec{a}$, $\eta' = s + \vec{b}$ を考える．このとき $\xi'\eta(\xi')^{-1} = x$ となるような実数 x は存在しないことを証明せよ.

修正案： 零でない虚四元数 ξ に対して $(t + \xi)(s + \xi)(t - \xi)$ が実数となるような実数 s, t は存在しないことを証明せよ.

コメント：
- つぎのような質問がありました：本当は，上の 2 の問題は，$\xi\eta\xi^{-1} = x$ となる ξ, η を与え，x を求めさせ，最終的に η^n $(= \xi^{-1}x\xi)$ を求めさせる問題にするつもりでしたが，うまく ξ と η と x がとれませんでした．この場合の ξ や η の見付け方，決め方でうまい方法は何かありませんか？
回答：単位四元数 ξ_0 で実ベクトル x を回転させたものを η とし，ξ' としては $\overline{\xi_0}$ の実数倍をとればよい.
- 虚四元数と空間ベクトルの記号をわざわざ別にするのなら，$\xi' = t + \vec{a}$ はおかしい.
- $\vec{a}, \vec{b}$ は平行なのだから，この問題は「$(t + \vec{a})(s + \vec{a})(t - \vec{a})$ が実数になるような実数 s, t が存在しない」ことと同じ.

問題 8： 虚四元数 ξ を $\xi = xi + yj + zk$ とする．ただし $\xi \neq 0$．このとき，$\xi = -\xi^{-1}$ となるときの x, y, z の条件を考えよ．また，領域 $S = \{(x, y, z) \,|\, \xi = -\bar{\xi}\}$ を図示せよ.

修正案： 等式

$$\xi = -\xi^{-1} \tag{*}$$

を満たす虚四元数 ξ はどのようなものか．さらに虚四元数を空間の点とみなすとき，(**??**) を満たす点 ξ 全体の集合を図示せよ.

コメント：
- 問題の日本語が変．たとえば「このとき ...なるときの...」音読してみよ.
- 問題前半の条件と S の定義式の条件が違うのはどういう意図？
- x, y, z を問題に書く必要はあるか.

問題 9： 四元数 $\xi = a + bi$ に対し，x についての方程式 $\xi x = ck$ を考える.

(1) x を求めよ.

(2) $|\xi| = 1, c = 1$ のとき x^n を求めよ.

修正案： 四元数 $\xi = a + bi$ $(a, b$ は実数）に対して，$\xi x = k$ となる四元数 x の n 乗（n は自然数）を求めよ.

コメント：
- 条件不足．a, b は実数，c は？
- c は与えられた定数？

問題 10： $\xi = t_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k, \eta = t_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$ $(t_l, x_l, y_l, z_l$ $(l = 1, 2)$ は実数）とする．このとき，次の問いに答えよ.
- $\xi\eta$ を求めよ.
- $|\xi\eta|^2$ を (1) で求めた $\xi\eta$ を用いて計算することにより $|\xi\eta|^2 = |\xi|^2|\eta|^2$ を示せ.
- 2 個の自然数 m, n がともに 4 個の平方数の和で書けるとき，積 mn もまた 4 個の平方数の和で書けることを示せ.

修正案： 四元数 ξ, η に対して $|\xi\eta|^2 = |\xi|^2|\eta|^2$ が成りたつこと利用して，次を証明せよ：
2 個の自然数 m, n がともに 4 個の平方数の和で書けるとき，積 mn もまた 4 個の平方数の和で書けることを示せ.

コメント：
- (3) は最初の条件と（直接は）関係ない.

問題 11： 四元数 $\xi, \eta,\ \zeta$ が $\xi + \eta + \zeta = 0,\ |\xi| = |\eta| = |\zeta| = 1$ を満たすとき，次の値を求めよ：

$$|\xi - \eta|^2 + |\eta - \zeta|^2 + |\zeta - \xi|^2$$

問題 (0)

3 節「四元数と空間の回転」の節末問題.

問題 1： 座標空間の点 $\mathrm{A}(0,0,3)$, $\mathrm{B}(2\sqrt{2},0,-1)$, $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\sqrt{6},-1)$, $\mathrm{D}(-\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$ とする．原点を通り空間の単位ベクトル $\vec{v}$ に平行な直線を軸として，$\vec{v}$ が指す方向から見て正の向きに角度 θ の回転をさせると，点 A, B, C, D はそれぞれ回転させる前の B, A, C，D の位置に移った．$\vec{v}$ 及び θ の値を求めよ（$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする）.

修正案： 座標空間のある回転によって，点 $\mathrm{A}(0,0,3)$, $\mathrm{B}(2\sqrt{2},0,-1)$, $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\sqrt{6},-1)$, $\mathrm{D}(-\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$ がそれぞれ B, A, C，D に移った．この回転はどのような回転か.

コメント：
- A, B, C，D がひとつの正四面体の頂点となることを（解答例では）利用しているが，それは気づくべきことか．あるいはどのようにして気づくのか.
- 図形的な意味を考えれば四元数を使わなくてもよい？
- 「とする」は変.「移る前の」は必要ないのでは？

問題 2： 空間の点 P の位置ベクトルを $\vec{p} = (1,-1,2)$ とする．原点 O を通り，$\vec{v} = (1,1,1)$ に平行な直線 l を軸として，点 P を $\vec{v}$ が指す方向から見たときに正の向きに $\frac{4}{3}\pi$ だけ回転させた点を P'，また，点 P から直線 l に下ろした垂線と直線 l の交点を A とする．点 P', A の座標，及び，三角錐 $\mathrm{OPP'A}$ の体積を求めよ.

コメント：
- 「垂線の足」という言葉は使わない？
- 垂線の足を求めるのに，2 次関数の最小を用いているが，線形代数だけで求まらないか？

問題 3： 原点を通り，単位ベクトル $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ に平行な直線を軸として $\vec{v}$ がさし示す方向から正の向きに $\frac{2\pi}{n}$ だけ回転する操作を考える.
$q = \cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\vec{v}$ について，どんな空間の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ に対しても $q^n\vec{p} = \vec{p}q^n$ となることを示せ.（ヒント：点 P を n 回上の操作で回転させるとどうなるのか.

修正案： 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ を虚四元数と見なし，$q = \cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\vec{v}$ とおくとき，$q^n = -1$ であることを証明せよ.

コメント：
- 前半と後半の関係が「よく読まないと」分からない.
- 前半やヒントを知らなくても

  $$q^k = \cos\frac{k\pi}{n} + \sin\frac{k\pi}{n}\vec{v}$$

  であることが数学的帰納法で簡単に証明できるので，「ヒント」などはむしろ邪魔になるのでは？
- さらに，上のことから $q^n = -1$ となることがわかってしまうので，示したい結論は弱すぎる.
- ベクトル $\vec{v}$ が特別なものである必要はない.
- 修正案のようにするとすっきりするが，回転を用いなくても証明できてしまう.

問題 4： $\alpha=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, $\beta=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, とする．$\xi=\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta i+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta j+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta k$ として，次の問いに答えよ．

(1) ξ^2 を求めよ．

(2) ξ は単位四元数であることを示せ．

(3) ξ^n（n は自然数）が i) $\xi^n \in \operatorname{Im}\boldsymbol{H}$, ii) ξ^n が実数となる最小の n をそれぞれ求めよ．

修正案： $\alpha=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, $\beta=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, とする．$\xi=\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta i+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta j+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta k$ として，次の問いに答えよ．

(1) ξ^2 を求めよ．

(2) ξ は単位四元数であることを示せ．

(3) 次の条件を満たす最小の自然数 n をそれぞれ求めよ：(i) ξ^n は虚四元数 (ii) ξ^n は実数．

(4) 単位四元数 ξ が表す空間の回転はどのようなものか説明せよ．

コメント：
- 次の質問がありました：本当は (4) として $\alpha=\cos\frac{\pi}{8}$, $\beta=\sin\frac{\pi}{8}$ を導き出すことを目的としたのですが（回転角 $\frac{\pi}{8}$）どう問題として与えてよいか分かりませんでした．ξ 自体は何らかの回転を表すなどの条件を明記したりしたら良いのでしょうか？

  回答：たとえば上のようにしたらどう？

問題 5： 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{v'}$，実数 θ, θ' に対して，単位四元数 q, q' を $q=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\vec{v}$, $q'=\cos\frac{\theta'}{2}+\sin\frac{\theta'}{2}\vec{v'}$ とする．空間の点 P を $\vec{v}$ が指す方向から見たときに θ 回転させた後，$\vec{v'}$ が指す方向から見たときに θ' 回転させて移る点 P$'$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\vec{p'}$ としたとき，$\vec{p'}=(q'q)\vec{p}(\overline{q'q})$ をみたすことを示せ．

修正案： 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{v'}$ に対して，原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を l, 原点を通り $\vec{v'}$ に平行な直線を l' とする．

実数 θ, θ' をとり，空間の点 P を，直線 l を軸として $\vec{v}$ が指す方向から見たときに θ 回転させた後，直線 l' を軸として，$\vec{v'}$ が指す方向から見たときに θ' 回転させて移る点 P$'$ は,

$$\vec{p'}=(q'q)\vec{p}(\overline{q'q}) \qquad (\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad \vec{p'}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}})$$

を満たすことを示せ．ただし,

$$q=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\vec{v}, \qquad q'=\cos\frac{\theta'}{2}+\sin\frac{\theta'}{2}\vec{v'}$$

である．

コメント：
- 回転の合成と四元数の結合法則だけ？
- 回転軸が指定されていない．

問題 6： 点 P$(0,1,1)$ を，原点を通るある直線を軸として，その直線に沿う単位ベクトルの指す方向からみて正の向きに $\frac{2}{3}\pi$ 回転させると点 P$'(-1,0,1)$ に移った．この単位ベクトルを求めよ．

修正案： 空間の点 P$(0,1,1)$ を，原点を通るある直線を軸として，その直線に平行なある単位ベクトル $\vec{v}$ の指す方向からみて正の向きに $\frac{2}{3}\pi$ 回転させると点 P$'(-1,0,1)$ に移った．$\vec{v}$ を求めよ．

コメント：
- 沿う → 平行？
- その直線に平行な単位ベクトルは 2 つある．

問題 7： 空間上の点 A$(1,0,-1)$ が点 B$(1,1,0)$ へ原点中心の回転で移ったとする．この回転軸，回転角度，そしてこの回転を表す四元数を求めよ．また，ある点 C$(1,1,1)$ がこの回転で移る先とその四元数を求めよ．

修正案： 空間の点 A$(1,0,-1)$ が，原点を通る直線を軸とするある回転によって B$(1,1,0)$ に移ったとする．

この回転軸，回転角，そしてこの回転を表す四元数を求めよ．さらに点 $\mathrm{C}(1,1,1)$ にこの回転を施して移る点を求めよ．

コメント：

- われわれのテキストでは「原点中心の回転」という言葉を使っていない．
- 「ある点」という割には具体的に指定されている．
- 「その四元数」とは何か

質問と回答

■問題内容について：四元数の演算

質問： 今さらですが，結局，四元数の除法は定義されないんですよね!? レポートで「四元数の乗法および除法の定義を確認するための具体的な計算問題」とありましたが，これは $\eta\xi^{-1}$, $\xi^{-1}\eta$ が一般に等しくないことを確かめて，除法が定義されないことを分からせるための問題を作る，という意図でかかれたんですか.

お答え： 言葉としてあげていないのですが，逆四元数を掛ける演算を「右除法」「左除法」（右から割る，左から割る）ということがあります．それが頭にあったので，問題のような文言にしました.

質問： 12 月 9 日，課題 2 の問題 (0) の (7) で,「シュワルツの不等式が出てしまった．本当は一変数でできる」ってコメントされていましたが，一変数ではどうやったらいいのですか？

お答え： 一変数ですか？一発でっていったのかな．四元数の三角不等式の証明ですね．四元数 ξ, η に対して

$$\bar{\bar{\xi}} = \xi, \qquad \overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\,\bar{\xi}, \qquad 2\,\mathrm{Re}\,\xi = \xi + \bar{\xi}, \qquad \mathrm{Re}\,\xi \leqq |\,\mathrm{Re}\,\xi| \leqq |\xi|, \qquad |\xi\eta| = |\xi|\,|\eta|$$

が成りたつことに注意すれば

$$\begin{aligned} |\xi+\eta|^2 &= (\xi+\eta)(\bar{\xi}+\bar{\eta}) = \xi\bar{\xi} + \xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} \\ &= |\xi|^2 + \xi\bar{\eta} + \overline{\xi\bar{\eta}} + |\eta|^2 = |\xi|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\xi\bar{\eta}) + |\eta|^2 \\ &\leqq |\xi|^2 + 2|\xi\bar{\eta}| + |\eta|^2 = |\xi|^2 + 2|\xi|\,|\eta| + |\eta|^2 = (|\xi|+|\eta|)^2 \end{aligned}$$

である.

質問： 2 次方程式 $\xi^2 = a$ ($a \in \boldsymbol{R}$, ζ: 四元数) を考えるとき，a の条件によって解の個数や種類（実数解，純虚四元数解）が変わるという問題がありましたが，$\xi^2 = a$ のところを $\xi^n = a$ ($n \in \boldsymbol{N}$) と変えた場合はどうなるのでしょうか.

お答え： ということを自分で試してみて問題にしてみたらいかがでしょうか.

質問： 四元数の 2 次方程式で解が 2 つ以上ある場合に，解をちょうど 2 つにするためにはどんな条件を加えればいいのでしょうか？それともどんな条件を加えても解を 2 つにするのは不可能なんですか？

お答え： 少し考えればわかるはず．実数体は四元数体の部分体ですよね.

■問題内容について：内積・外積

質問： 1/6 の講義プリント p.2 問題 (0) の (4) のコメントですが,「内積，外積との関係を理解しているかをチェックする」ことがこの類の問題の目的ではなくて「関係を『確認させる』」ことが目的ではないのですか.（問題 (0) の定義より）

お答え： すなわち，自分で理解しているかを「チェック」することですよね．たとえば「2^2 を求めよ」という問題に「4」という正解を出したとして，（問題の解答をみて正解だと判断した）この人がべき乗の意味を理解している，と考えてよいわけではありません（ということを前回の授業で説明しました）．たとえば「内積」は通常の高等学校の教科書では長さと角度を用いて定義します．その「図形的な性質」と四元数の「代数的な性質」との関係の理解を確かめるべきではないか，というのがコメントの意味です．

質問： 1 月 6 日の問題 (0) の (4) のコメントで「内積・外積との関係を理解しているかどうか」とありますが，この節での問題の意図がいまいちつかめませんでした．結局，『空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，それぞれ虚四元数とみなすことで $\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b}), \mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) = -\vec{a}\times\vec{b}$ となる』ということを確認させるような問題を作ればよかったのでしょうか？

お答え： 上の質問と回答参照.

質問： 12 月 9 日，課題 1 の問題 (1) の (4) について，(1) + のみの計算の確認，(2) + と − が混ざった計算の確認 (3) i, j, k のいずれかがない計算の確認 (4) 逆四元数を含めた計算という意図で配置したのですが，これはくどすぎるでしょうか．レベルの低い生徒のためには練習問題にこれくらいの “くどさ” が必要だと思ったのですが.

お答え： ご質問のような意図で並べるのは「四元数の計算」の問いだと思います．ここでの課題は「内積・外積との関係」なので，図形的な意味を含めて配置するのが適当であると思います.

質問： 1 月 6 日の問題 (0) の (2) のコメントで「問題の順番が逆」と書かれていますが，「逆」の意味がいまいちわかりませんでした．どうだったらよかったのでしょうか.

お答え： これは「内積・外積との関係」の問題ですね．虚四元数 $\vec{a}, \vec{b}$ に対して (1) $\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}), \mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b})$ を計算して (2) $\vec{a}\vec{b}$ を計算する，という問題ですが，$\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b})$ を計算するには（空間ベクトルを忘れて四元数の積の計算問題と思えば）$\vec{a}\vec{b}$ という四元数を求めて，その 1 の係数を取り出せばよいのです．同様に $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b})$ を求めたければ $\vec{a}\vec{b}$ からその実部を取り去ればいいだけです．したがって (2) をといて (1) をとくのが（四元数の計算と思えば）自然な順番だ，ということです.

■問題内容について：四元数と空間の回転

質問： 12 月 9 日の講義資料 6 ページ (2) 「四元数と空間の回転」の節末問題の図形的意味を考えてみたのですが，分かりませんでした．どのような意味があるのですか（2 名）

お答え： 空間の枠 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ を $\vec{v} = \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 = \vec{w}$ の $\vec{v}$ に直交する平面への正射影に平行なもの，ととってやるとわかります.

質問： 12 月 9 日の講義資料，課題 2 の問題 (1) の (3) (6 ページ) で “図形的な証明” ということをおっしゃいました．出題意図としては，テキストと同様の手順でしてほしいと思ったのですが，問題文中に「20 ページの空間の回転と同様の手順で」といれたら大丈夫でしょうか？

お答え： $\bar{q} = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}$ であるから，$\vec{p''} = \bar{q}\vec{p}\bar{q}$ は，点 P を，原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を軸として $\vec{v}$ が指す方向から見たときに正の向きに $-\theta$ (負の向きに θ) 回転させて得られる点の位置ベクトルである，という解答がでることが予想されますね．想定した解答（基底を使って回転を表す）は，基本公式の証明（あるいは説明）に近いのでどうかなとは思いますが，うまく小問による誘導をつければ問題としてまとめられるかもしれません.

質問： 回転で軸の大きさを 1 にしなくてはいけないのは何でですか．講義では少し分かりにくかったです.

お答え： 軸は直線だから大きさは定義されない．$\vec{v}$ の大きさ（これでは説明にも何もなっていませんが）のことですね．回転の式の証明をよく見てごらんなさい．$\vec{e}_3 = \vec{v}$ ととっていますね．もしこの大きさが 1 でなかったら何がおきるのか，証明を追って見てご覧なさい．

質問： 四元数を用いた空間の回転の表示を確認する問題として，四元数と単位ベクトルと右手系の枠を与えていた問題を紹介していたと思うのですが，なぜ右手系を与える必要がないのですか．

お答え： 与えなくても答えが出せるからです．

質問： 四元数を用いた空間の回転でかけ算の仕方がよく分かりません．

お答え： ベクトルを虚四元数とみなして掛ける．

■問題の表現について

質問： 1 月 6 日の講義資料，問題 (1) の (3) (3 ページ) で「$q = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}k$ とすると q は単位四元数である」とありますが，問題文に「q は単位四元数」と入れる必要はあるのでしょうか？

お答え： 意見が分かれるかもしれません．回転を表すのは単位四元数ですから「q による回転」と言うときには「q は単位四元数」であることが必要です．そのことを陽に言わずに察しなさい，というのも一つの考え方ですが，教科書練習問題程度なら入れるのもよいと思います．

質問： 「計算せよ」or「求めよ」について，今回計算問題を作るように指定されたので計算せよとしたのでは

お答え： 計算問題はつねに「計算せよ」にしなければいけませんか？

質問： 計算せよと求めよの違いは何ですか．

質問： 「計算せよ」と「求めよ」の違いがわかりません．

お答え： 計算は手段，求めるのは目的．

質問： 「文章の最初が文字 (a, b, t など) で始まるのは気持ちが悪い」ということでした，いまいちその感覚が理解できませんでした．具体的な説明をお願いします．

お答え： 文章ではなく文ですね．英文の場合の気持ちわるさは授業で説明しました．このことは technical writing のいくつかの書物では規則として挙げられていますし，我々が欧文で論文を書く際も編集者に修正されることもあります．たとえば “n is an odd integer.” は “The number n is an odd integer.” と言い換えるわけです．日本語でも，たとえば文頭が小文字で始まるのは気持ち悪くないですか．

質問： 1 月 6 日に配られたプリントの 2 ページ (7) についてですが，すべての文字に添字をつけないようにしたほうがいいとは，ξ_1, ξ_2, ξ_3 を使っていたのを ξ, ξ_1, ξ_2 と，1 つ添字を減らした方がいいということですか？この方が統一感がない気がするのですが．

お答え： 問題に与えられた量と，求める量は異なった種類の記号を使った方がよいでしょう．この問題では ξ_1 が問題に与えられた量で，ξ_2 が求める量ですが，ξ_1, ξ_2 と並ぶと同種の量に見えてしまいます．対策として (1) 問題に必要のない文字は使わない．この問題の場合は ξ_2, η_2 は不要．(2) 小問ごとの局所的な記号を用いる，などの工夫が必要です．

質問： 添字を減らした方がいい理由を教えてください．

お答え： 見間違いやすいこと，同じ系列の文字は同じ性質をもつという印象を与えやすいこと．

質問： 添字のつけ方に関してですが，$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ という添字のつけ方と $\delta, \delta_1, \delta_2$ という添字のつけ方ありますが，どちらの方が好ましいのでしょうか．

お答え： 文脈による．上の質問の回答参照．

質問： 1 月 6 日の講義資料，課題 1 の問題 (0) (3) について，$\vec{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k, \vec{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ と

いうふうに（左辺）は添字を使わず，（右辺）は添字を使うのは気持ち悪くないでしょうか．もしそうするのではれば，$\vec{a} = x_a i + y_a j + z_a k$, $\vec{b} = x_b i + y_b j + z_b k$ とした方がよいのではないでしょうか．

お答え： 山田もそちらの方が好きです．

質問： 山田先生のコメントや講義資料では，,「虚四元数 $xi + yj + zk$ を空間ベクトル $\vec{a} = (x, y, z)$ に対応させて $\vec{a} = (x, y, z) = xi + yj + zk$ と書く」ということでした．
そこで，表記上の問題ですが，虚四元数 ξ, η を空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対応させるとき，すなわち $\xi = \vec{a}$ $\eta = \vec{b}$ のとき，$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ とせずに $\xi \cdot \eta$, $\xi \times \eta$ と欠いても問題ないのでしょうか．四元数としての積 $\xi\eta$ を $\vec{a}\vec{b}$ と書かれているので大丈夫かな，と考えました．もし，問題ないなら $(\cdot, \cdot, \cdot)(\star, \star, \star)$ という表記もいいことになりますし，問題あるとしたらその判断基準は何なのでしょうか．

お答え： 少なくとも，今回の文脈ではどちらの記法もありだと思います．余計な誤解をしなければよいのですが，最後の「成分表示の積」は少々説明が必要かもしれません．たとえば「行列の積」に見えないこともない（型が合わないからかけられませんが）．ただ，前回提出していただいた問題の中で，「ξ」と「$\vec{a}$」を一生懸命分けて記述していたものがあり，それは必要ないのではないか，というコメントをしました．問題の中に不要な記号を増やすのはいかがなものか，と考えたので．

質問： 中学，高校の数学では，点の座標を例えば $\mathrm{P} = (0, 1, 2)$ ではなく $\mathrm{P}(0, 1, 2)$ のように書かねばならないのはどうしてですか．

お答え： 理由は知りませんが，ほとんどの教科書はご質問のような書き方ですね．「点と座標の同一視」の度合いが弱い，という立場をとっているせいかもしれません．「点 P を $(0, 1, 2)$ とする」のではなく「点 P の座標を $(0, 1, 2)$ とする」と書くのが普通のようですから．

質問： 「正の向き」とい「正の方向」は意味が違うのか．

お答え： 「正の方向の回転」という言い方はあまりしないと思います．理由は知りませんが．ちなみに，「表裏の区別」のことを「向きづけ」orientation というのは数学の用語です．これを「方向付け」とはいいません．このことと関わっているように思います．

質問： 「(i, j, k) はサイクリックなので」という文脈をとりあげていましたが，どのように表現し直せばよかったのかがよく分かりませんでした．先生が一番適切だと思われる表現を教えて下さい．

お答え： 標語的にかかれていて，実際に「何を説明したいのか」が読み取れませんでしたので，代筆することはできません．「説明したいこと」をちゃんと述べればよいのだと思います．

質問： 「サイクリック」という言葉がでてきましたが，これは 3 つの文字 に規則性があるということを表しているだけですか？

お答え： 3 つの文字 (a, b, c) のサイクリックな置き換えとは巡回置換 $(a, b, c) \mapsto (c, a, b)$ のことだと思います．したがって「サイクリックなので」という言葉の使い方はおかしいです．

質問： 12 月 9 日の資料，課題 (1)，問題 (1) の (6) “答えは実数もしくは四元数で答えよ” $\to$ “～ で表せ” と言い換えたほうがよいと言われていましたが，表すだけでは式を整理しなくても答えとしてしまう可能性がないでしょうか．

お答え： そこを気にするのなら「. . . であるような四元数を求めよ」ではいかがでしょう．オリジナルの言い回しの問題点は 2 点 (1)「答えは . . . 答えよ」が日本語の言い回しとしておかしい (2)「実数もしくは四元数」は間違ってはいないが $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{H}$ なので余計なことを言っている．

質問： 空間の回転の方向を説明する文が長すぎると思います．だから，原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を軸として $\vec{v}$ が指す方向から見たときに正の向きの回転を「空間における正の向きの回転」としてしまえば，毎回長い文章を書かなくてもいいと思うのですが，そうしていない理由が何かあるのですか．

お答え： あるのです．原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線は原点を通り $-\vec{v}$ に平行な直線でもあります．そして $\vec{v}$ の指す方向から見て正の向きに θ だけ回転することは $-\vec{v}$ の指す方向から見て負の向きに θ だけ回転することと同じです．「原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線」と書いてあると向き $\vec{v}$ が指定されているように見えますが，「原点を通り，平面 $x+y+z=0$ に垂直な直線」といったら向きが指定されていませんね．面倒くさい書き方をしているのです．このような場合でも回転の向きを指定する必要がありますが，ご質問のような言い方だと「どちらから見るか」の情報が入っていませんので，まずいわけです．

質問： 有向直線という単語が出てきたのですが，一般には「直線」に「向き」というのはどうやってつけるものなのですか？（どういったものを「向き」というのですか？と聞いた方がいいかもしれません）その直線上をベクトルを 1 つ指定し，そのベクトルがさし示す方向を正とする，という方法でやってきましたが，もっと一般的な方法はないのですか？

お答え： 上のご質問への回答のように，「原点を通りベクトル $\vec{v}$ に平行な直線」と「原点を通りベクトル $-\vec{v}$ に平行な直線」は同じ直線です（集合として同じものです）．この直線 l に平行なベクトル全体の集合は $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次元線形部分空間です．この基底（すなわち $\vec{0}$ でないひとつのベクトル）を一つ指定することが直線 l に向きを与えることになります．

質問： 3.2 節の (1) の問題について，$\vec{v}$ を直線と直した方がよい．

お答え： どこのことでしょう．

■おもしろい問題・良い問題

質問： 先生は今まで，面白い問題に評価をするとおっしゃっていましたが，先生の考える面白い問題とは具体的にどのような問題のことを言うのですか？どんなに単純な問題でも見方を変えれば新しい解法が生まれたり，別の問題に発展したりして，面白いと思うのですが．

お答え： その「発展した面白い」問題を作ってください．どんなに単純な問題からでも工夫によって面白い問題が作れます．その通りです．その「工夫によって面白くなった」成果を問題文から読み取れるようにしてください．

質問： おもしろい問題というのは，単なる計算でなくひねりが効いているような問題に対して言われたりしますが，おもしろい問題という言葉は，分かっている人側の言葉であると思います．定義を確認するための練習問題を解く生徒の側からみれば，定義の確認なのだからできるだけシンプルなものが望ましいと思います．ある程度理解が進めば単純な確認問題ではもの足りない生徒もでてくるでしょうが，“定義の確認” を目的としているならばおもしろさを必要とするでしょうか．

お答え： ですから「問い」の問題ではシンプルなものを評価してます．生徒の側から見てシンプルとは「無駄な記号や文言がなく，問題文が明解で，計算練習になるように値に工夫がなされている問題」ですから，そのつもりで．

質問： 講義資料の問題に対するコメントに，おもしろいと書かれているものがありますが，山田先生はどのような問題がおもしろいと思い，とくに良問とはどのような問題と思いますか．

お答え： おもしろいと思うもの：(1) 問題を見たときに答え方が明らかでないもの (2) 問題の係数などの調整がよくなされていて意外にきれいな結果になるもの (3) 問題作成に十分試行錯誤，検討がなされていると思うもの，すなわち「頭と手を十分に使ったと思われる（山田の想像でしかありません．人によって頭と手を使う量とアウトプットの関係は違いますが，その関係を判断することはできないのでアウトプットだけで判断します）ものが（この授業では）好きです．良問というのはもうちょっと客観的な価

値判断だと思います．上の回答参照.

質問： 全体を通してですが，先生の言う「おもしろい問」とはどのようなものですか．また,「おもしろい問」は先生にとって「(出題側として）適切な問」でもありますか.

お答え： 前半は上の回答参照．後半：ものによります．おもしろいけれど，試験に出すわけにはいかない（平均点が下がってしまう...）なんてものもあります.

質問： 問題を作成するに当たって，正しい日本語の文章にすることや言い回しに注意すること等は分かりましたが，内容が良い問題というのがなかなか思い浮かばないのですが，それについて何かアドバイスがあったら教えてください.

お答え： たくさんの問題を批判的に見てください．そのうちに分かってきます．— よいサッカーの試合はどんなものですか？という質問に具体的に答えるのは難しいでしょう．しかし「良い試合」は明らかに存在します．それはサッカーを（サッカー観戦を）数多く経験することで分かってくるものです.

質問： 提出された問題からのばっすい（原文ママ）の 1 ページ目の下の方の非可換性の時に，$\sqrt{\ }$ が使われているのでおもしろいとおっしゃってましたが，何がおもしろいのですか？

お答え： 「非可換性の時」というのは「非可換性を確認する問題ではないですね」という文句.「おもしろい」のは「$a+\sqrt{5}b=c+\sqrt{5}d$ $(a,b,c,d$ が有理数) ならば $a=c,\ b=d$」ということを使うところ.

■別解

質問： 解答方法が複数ある問題の方が学生の興味を引くことができると私は思っています．想定していた解答と異なる解答が出る問題は必ずしも悪い問題であるとは思えないのですが，答え合わせがしにくいのでよくないということでしょうか.

お答え： 「やって欲しいこと」あるいは「理解しているかどうか確認したいこと」をスキップして答えがだせる練習問題は目的に合致しない，ということ．もちろん，その別解を見つけるのにセンスが必要な問題ならいいけれど，近道を知らないのが作題者だけ，というような状況だと練習問題として有用ではないでしょう.

質問： 山田先生の「別解を探す」という姿勢に感動して，自分で問題を作ってみた際にもいろいろと別解がないか探そうとはしたのですがなかなか上手くいきませんでした．たとえば「四元数と空間の回転」を扱った節末問題をつくり，その別解を探すにあたって，山田先生ならどういったアプローチをされているのですか？具体的な「別解の探し方の例」を教えてください.

お答え： 難しいですね．今日の解説で一例をあげますが，一般化はできないでしょう．むしろ「たくさん問題をといて，いろいろな知識を持っている」ことが必要になると思います.

■検算

質問： 原点からの距離を計算する以外に空間の回転の問題の答えを検算する方法はないのですか.

お答え： 少し考えればわかるように「検算する方法はない」と断言することは大抵の場合できません．答えは「あります」

質問： 検算についてですが，原点からの距離を計算することで，空間の回転の問題の検算をするということでしたが，これは答えがあっているということの必要条件であるので，距離が一致すれば計算はあっているとは言い切れないのではないですか.

お答え： その通りです．だから授業でも「原点からの距離が違っていたら明らかに間違っている」と言って

いるわけです．これは言いきれるでしょう．

■答えの数字

質問： 答えの数字が汚くならないようにすることは大切だと思いますが，計算練習などでは，複雑なものの方が力になると思います．また，テストでは，きれいな数字だけとは限らないので，少しは汚いものもあっていいと思います．

お答え： 「綺麗な問題も作れるが，わざと汚い数字にした」というのならよいのです．答えが綺麗になる問題のほうがずっと難しいので，今回はある程度努力と工夫をしていただきたい．

質問： 答えの数字が汚くならないようにするための工夫はありますか？

質問： 「きれいな答えにする」ための具体的な方法をいくつか教えてください．

お答え： 一つの方法は「答えから逆算する」．三角関数を含む問題ならピタゴラス数をいくつか覚えていると便利．

質問： 「問題や答えの数字が汚くならないように」とのことでしたが，

- 節内の練習問題では 1 桁の整数や分数の分母，分子や根号の中が 1 桁（ないし 10 ∼ 15 程度）
- 節末問題なら上記の条件を満たす整数と無理数（平方根）の和（例：$2+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{5}$ など）程度なら可．
- 問題集レベルなら多少複雑な数（上記の節末問題レベルに分数や 2 桁の数（それもせいぜい 50 以下）の仕様を許可する）でも OK

. . . という基準で良いでしょうか？また，先生の基準を明確化していただけませんか？

お答え： 概ねそれくらいでしょう．ただし，問題の性質によってはこの基準から外れることもありえます．たとえば，多項式の定積分の問題なら 1/105 くらいが出てくるのは自然だし，有名なマチンの公式 $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$ も結構大変な数字がでてきます．

質問： 問題 (2)（2.2 節）の (10) の問に関し，「答えの数が大きい」という指摘があったと思いますが，（問題の内容，意図にもよると思いますが）一般に答えの数が大きい，あるいは答えが汚いというのはどの程度なら許容範囲なんでしょうか？問題作成の際にかなり悩みました．

質問： 「数字が汚くない」がどの程度かよくわかりません．基準がよくわかりません．

お答え： 上の質問と回答参照．基準よりも「キレイにする」ために頭と手をどれくらい使ったかです．

質問： 高校で使われる問題集をみると，たまに答えの数が大きかったりあまりきれいでない答えがあったりします．プリントには「答えの数字が汚くならないように調整する」とあったのですが，実際にはどこまで答えの汚さが許されるのですか．

お答え： 問題の使い道による．いずれにせよ「適当につくったら大変な答えになってしまった」ではだめ．計算力を測るために答えを汚くした，ならそれは意図していなければいけないし，同じ問題の答えをきれいにするように数字を変更することもできなければいけない．

質問： 一般的な注意で，答えの数字が汚くならないように調節するとありますが，数字が汚いとはどれぐらいの数字をいうんですか．具体的な計算問題のときはなるべく簡単な数字でいいと思うのですが，節末問題など，少し難しくするために答えを大きくしたり，$\sqrt{\ }$ がでてくるようにしたりするのはあまりしない方がいいのですか．

お答え： 「少し難しくするために」意図して複雑にするのは良いと思います．すなわちある程度自在に答えをコントロールできるように心がける．

質問： 「答えの数字が汚くならないように調整する」のが必要なのはなぜですか？これでは「答えはキレイな形になるんだ」という認識を与えかねないと思うのですが．それとも，常にそうしろ，ということではなく，そういうことができるようになっておくことが大切だ，ということですか？

お答え： そうです．とくに，教科書の「問い」レヴェル，すなわち基本事項を確認する問題では，「その問題が解けなかったことが，基本事項が理解できなかったことによるのか，数の計算ができなかったことによるのか分からない」のでは困るのです．本当は理解していないのに「計算が面倒くさかったからできなかった」という生徒もでてきます．

質問： 「答えの数字をきれいにせよ」と言っていましたが，それは四元数の計算がとてもきたないため，答えまできたなくなると生徒の達成感があまりないからですか？

お答え： ちょっと違います．上の回答参照．

質問： 山田先生のテストは答えの数字を調整していますか．調整する時のコツがあったら教えてください．

お答え： 数学科専門科目の場合は問題による．全学共通の微積分・線形代数では大体調整しています．(1) 試行錯誤をたくさんやる (2) 答えから逆算する (3) 係数を文字にして問題を作り，最後に文字の値を調整する，などの方法によっています．もちろん，ある（別の方法で）答えが簡単になるのを知っているものもあります．

質問： たとえば「四元数と空間の回転」の問題を作るときに，問題で与える値や解答の値がものすごく複雑かものすごくシンプルなものになってしまいがちですが，何か対処法はありますか．色々な数値を変えて試してみるのが一番良い方法でしょうか．

お答え： 少なくとも，たくさん試行錯誤をやってください．三角関数がからむ問題でしたら，特別な角の三角比の値（15°, 22.5° などを含む）なども知っているとよいでしょう．また，ピタゴラス数はいくつか覚えておくこと．

■一般的な公式の証明

質問： 高校の教科書での “問い” には証明はふさわしくないとおっしゃいましたが，それは高校生にとって難しいからなのでしょうか？それとも他に理由がありますか？

質問： 一般的な公式の証明がなぜ高校の教科書の問いとしてあまり適当ではないのでしょうか．

お答え： 理論の筋道を教えるのか，理論の使い方を教えるのかに関わっています．単元で学んだ内容を「理解しているか」ということは「証明できるか」よりも「運用できるか」ではないかと思うのですが．

質問： 一般的な公式の証明は受験ででたりするので，問いに出してもよいのではないですか．

お答え： 言葉遣いについて：「受験」は「試験を受けること」．したがって「受験ででる」は間違い．「入学試験で出題される」が正しい．ちなみに，教科書の問いではやはり不適当だと思います．

質問： “一般公式の証明は高校教科書の問いとして適当か？ ’ ’ とあるが，$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ の公式は $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いて証明させていたような気がします．

お答え： 山田の手元にある教科書には証明が書いてありました．ご質問のような本でも “$\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$” の証明は問いになっていないでしょう．こちらは間違いなく「一般公式」ですから．正接の方は，人によってはあまり「公式」として認識していないのではないか，と思うこともあります．

■計算問題・節末問題

質問： 2 回とも今までの課題で「章末問題？」というコメントをつけられましたが，計算以外の問題がおも

いつきません．どうやって考えているのですか．

お答え： まずお手本を見てごらんなさい．高等学校時代の教科書の節末問題には（本文の教材と関連して）何が出されていますか．

質問： 節末問題にただの計算問題はやはりやめたほうがいいですか．

お答え： やめたほうがいいです．

質問： 節末問題として，他の単元とつなげるとき，あまり深く（他の単元内容について）広げるのは避けた方がよいのですか？

お答え： 状況，程度によります．その節の内容の理解を確かめ，応用する問題だとして，他の単元の内容が中心となるのは避けるべきでしょう．もちろん，他の単元の内容は絶対に含めるべきでない，というわけではありません（それを厳密に適用すると整数の足し算や掛け算九九も使えなくなってしまいます）．

質問： ここ何回かの講義では教科書の問題づくりをメインテーマにしてますが，教科書の問題を作るときと，学校の定期テストの問題を作るときの相違点があれば教えてください．

お答え： 理解を測るという点なら同じ．異なる点は「解答時間が限られる」こと，「評価をする必要がある」こと．したがって

- 問題の量を適当に：たとえば作題者が模範解答を試験時間の 1/2 （1/3, 1/5 という意見もある）で作成できなければいけない，と言われています．
- 単元のうち理解しなければならない内容を（適当な配点で）的確に出題する．とくに「同じ内容を測る違う問題」をあまり多く盛り込むのは不適当．
- よくできる生徒のためのチャレンジ問題，あまりよくできない生徒のための基本問題を含めること．
- 思いがけない別解に注意：頑張って計算してほしかったのに，別の方法で暗算で答えがでてしまった. . . ということが起きぬよう

などの注意をしたほうがよい．

質問： 確認問題と節末問題の違いについてはよく説明されていましたが，中間・期末テストや実力テストの問題を作るとき，更には入学試験問題を作る時にはどのような点をさらに注意する必要がありますか．

お答え： 上の回答参照．入学試験の際には，さらに (1)「受験者との共通認識が学内の試験に比べて少ない」ことに注意すべきです．すなわち「空気読め」が通用しにくいので，問題文だけから曖昧さなく要求するものが伝わるようにしなければなりません．また，(2) 出題範囲に注意する，ということも忘れぬよう．

■出題者の意図

質問： 問題を作る際に“ただし，○○○を用いて求めよ”と書くのはやめた方が良いと言われましたが，自分が考えている解き方で解いてほしい時はどのように書けばよいのでしょうか？

お答え： 適切な小問（誘導）をつける．あるいは穴埋めなどにする．

質問： 出題者の意図を生徒に気づかせるような工夫はありますか？

お答え： 状況（問題，出題者，生徒などなど）によります．

■問題に不要な情報

質問： 問題の中に不要な情報をわざと入れてひっかけ問題にした場合，“ここはわざと不要な情報をいれて

ます” というふうに書いておけば減点の対象にはならないのですか？

お答え： 教科書の節末問題に引っ掛けは不要.

質問： 問題文に $\vec{a}$ の成分表示は必要か？というコメントを読み（/聞き）ましたが，確かに無駄な成分表示だと思います．また，解法に制限を与えてしまっているようにも見えます．ただし，このように毎回無駄を省き，スリムな問題文ばかりを作成していると，「今回の問題には無意味に見える注意や但し書きがあるな，これを利用するに違いないな」などと，勘の良い子や空気を読める子が得をするケースが増えてしまう気がします．スリム化を徹底するよりこの程度のトラップは混ぜたほうがいいかもしれないという気持ちがありますが，勘を養ったり空気を読むことは数学の能力の一部なんでしょうか？

お答え： 勘は大事だと思いますが．まず，作題者としては「何が条件か」をきちんと把握しておく必要があります．そして過不足ないもっともスリムな問題を作ります．トラップを仕掛けるのはそのあと．今回は練習なので，トラップの前で止めてください.

■一般的な注意

質問： 先生がおっしゃった「一般的な注意」以外で，問題を作る際に注意することがあったら教えてください.

お答え： それが授業内容.

質問： 先生が 12/9, 1/6 のレポートの問題を作成するならばどのような問いを作成しますか.

お答え： 次回レポートにバイアスをかけることになるので，具体的には言及しません.

質問： プリントの中で取り扱われなかった問題はケチのつけようのない問題ばかりだったのですか.

お答え： いいえ．講義資料では典型的なケチのつけどころを集めたつもりです.

質問： 実際に教科書の問題を作成するときは，今回の講義 → レポート → 講義 → ... のように何回も吟味を重ねて少しずつ改善しながら作っていくものなのですか？

お答え： そうです.

■小ネタ：パラドクス関係

質問： 今回の講義で $1 = -1$ が成りたつ（実際は成り立たない）というようなパラドクスが紹介されましたが，他にもこのようなパラドックスはありますか？

質問： パラドックスの他の例はありませんか？

お答え： あります.

質問： 「$1 = -1$」の話などはとてもおもしろかったのですが，数学の苦手な生徒にとっては説明の部分の話が理解できなくて変な勘違いをもってしまう事があり得そうなのですが，どうでしょう？

お答え： そうです．空気をよんで使って下さい.

質問： $1 = -1$ の例は，条件がいかに大切かということを教えていると思いますが，実際教えるときに生徒に混乱が起こってしまいそうな気がします．教える際には，平方根が出てきたときに教えるか，それとも後でおしえるか，どちらがよいでしょうか？

お答え： 教室の空気によるのではないでしょうか．成功例も失敗例も見たことがあります.

■小ネタ：相加相乗平均

質問： 相加平均と相乗平均の公式で気になったのですが，n 項のときの式はどうやって導くのでしょうか．

お答え： それを授業で説明した．n に関する数学的帰納法を用いる．ただし，数学的帰納法のステップ（n から $n+1$ にいく段階）には関数

$$f(x) = \frac{1}{n+1}(x_1 + \cdots + x_n + x) - \sqrt[n+1]{x_1 \dots x_n x} \qquad (x > 0)$$

の最小値をつかう．ただし $x_1 \dots, x_n$ は与えられた正の数．

質問： $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ $(a_1 \geqq 0,\, a_2 \geqq 0,\, \dots a_n \geqq 0)$ の公式の証明は

$$f(x) = x_1 + \dots x_n - \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

（原文ママ）とおいて微分を使うやりかた以外の方法を思いつきません．帰納法でとくのは厳しいとおっしゃっていましたが，実際に微積分を使わずにとける解法は存在するのでしょうか．

お答え： 質問文の $f(x)$ の右辺に x がありませんね．言葉遣いですが，この文脈では「とく」のではなく「証明する」だと思います．「証明をとく」なんていう言い方はありません．ちなみに，授業で方針を説明した証明は数学的帰納法によっています．そのステップに微分を使っているだけ．微分を使わない方法も，そのおおまかな方針は授業で説明した．

質問： $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = \frac{1}{2}\big((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\big)$ について $x=-y-z$ とおく方法以外の導き方を教えて下さい．

お答え： 右辺に因数が一つかけています．右辺を展開して左辺を導く，というのではだめですか？

■小ネタ：その他

質問： $\sqrt{5}$ が無理数であることはどのように示すのですか．

お答え： 有理数でないことを示します．やることは $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明とほとんど同じです（やってごらん，と言ったはずですが，試していませんね）．

■指導の工夫

質問： 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式を理解させるために係数 a, b, c に 2 を使わないとありましたが，むしろ係数に 2 を使うことで，生徒が解の公式を理解しやすいと思うのですが，どうですか．例えば $3x^2+5x+1=0$ なら

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

のように，分母の $2a$ の 2 の部分を忘れにくいと思いますが，$2x^2+3x+1=0$ の場合なら

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2}$$

としてしまうこともあって，$2a$ の 2 が理解できているのかの確認になると思うのですが．

お答え： 自分の発言ではないので，責任は持てませんが，演習問題より，むしろ例題として提示をする場合の問題だと思います．ご質問の 2 つめの例の正解を

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

と書いたときに，分母の 2 つの 2 は違う意味を持っています．（最初の 2 は決まった 2，あとの 2 は 2 乗の係数）．このように，公式の中で違う役割をもつ数が同じように見えてしまうことを避けた方がよい，ということだと思います．

質問： $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$ になるのを説明する際，先生はどのようにしますか．

お答え： 「そのように定める」（教科書にはそう書いてあるはず．正の実数の根号の規約も同じ．）しかし，複素変数の関数としての平方根は多価関数で，$\sqrt{-1}$ を i としても $-i$ としても不具合はでてきます（ので，前回のパラドクスのような問題がでるのです），ということをどうやって説明するか考えてごらんなさい．

質問： 理論を正しく教えるのと計算方法を教えるのはどちらがより重要か．

お答え： 条件が少なすぎて答えられません．

質問： 繰り返し練習することでたしかに生徒の理解は進むが，その時だけの学習の定着にとどまってしまう生徒もいます．このような生徒の場合どのように指導するのがよいでしょうか．

お答え： ご自分のことを考えてご覧なさい．数学科や物理学科の学生さんだと「数学の理解」についてそのようなことはなかったかもしれませんが，語学など，ほかの科目ではどうだったでしょうか．一生懸命覚えた sein は avoir の活用を，すぐに忘れてしまった，というときにあなたはどう対処したでしょうか．

質問： 数学の苦手な生徒・不得意な生徒が多い学校でそういった人たちを主な対象とした授業を進めるとどうしても数学が好きな（得意な）生徒が物立りなさ（原文ママ）を感じてしまうとい思いますが，この問題に対する具体的な対処法はありますでしょうか？

お答え： 「数学」を「スポーツ」「音楽」や「美術」に置き換えた場合，どのような対策があるでしょう．それと同じことは数学でできるでしょうか．

質問： 先生は，数学の苦手な生徒の理解を深める，あるいは苦手意識を軽減させる上で大切なことは何だと思いますか．

お答え： 「興味を持たせる」というよくある回答は，意味を持たないとは思っています．個人的には「成功体験を持たせる」（偉そうだね，もっていただく）ことが重要だと思うのですが，時間と手間がかかるので...

質問： 勉強ができる生徒の方に手をかける先生の方が一般には多いみたいですが，僕は逆に，勉強ができない生徒の方に手をかけると思います．そして，勉強ができる生徒はほったらかしにしそうです．

お答え： そうですか．それは結構大変ですよ．続けてください．

■字が汚いこと

質問： 「数学の苦手な生徒に対する指導・工夫」というプリントの裏面の生徒のノートの左側は松隈先生がかかれたものでしょうか．それとも生徒に書き直させたものなのでしょうか．

お答え： 裏面の両側とも生徒さんのノートです（もちろん別人）

質問： 今回の講義で「同じものを書いているはずなのに片方の生徒は何をノートに書いているのか読むことができないほどノートがきたない」資料を見て，私は「この生徒はノートをまともにとる気がない」と思いました．そのような生徒が担当しているクラスにいた場合，やる気にさせるのは難しいと思うのですが，山田先生がもし高校教師ならどうしますか．

お答え： (1) 大昔に持ったクラスに，実際にそういう生徒はいました．彼は他に「居場所」があったような

のでそれほど気に掛けませんでしたね．「やる気がない」問題は解決するとしても時間がかかります．半年や 1 年でドラスティックに変えるのは難しいので（自分が「変わる」ということを考えてご覧なさい．すぐには変われないでしょう．生徒さんたちも一緒です）根気良く「見守る」しかないのでは？と思います．(2) このクラスにも「まとにこやる気がないのでは？」という学生がいるように見受けられます．これも「見守る」しかないのかな，と思います．

質問： 筆圧の強さが，本当に，数学の得意，不得意に関係するんですか？

お答え： 知りませんが，(1) 不得意な人のノートは汚い，とくに「たらたら書いているように見える」ことが多い．(2) 山田は面倒くさい計算をするとき（だけ）は丁寧に字を書く（そうしないと確実に間違える）ということは言えます．

質問： 演習の時など，板書の字がなぐり書きのような人がいますが，そのような人の多くは頭がいい人だと思います．文字が汚いなどという生徒にはできる生徒とできない生徒の極端な場合があるので，「苦手な人の多くが」とは一概に言えないのではないでしょうか？

お答え： 前半から「一概に言えない」のは「文字の汚い人の多くが苦手」ということだと思います．「苦手な人の多くが文字が汚い」こととあなたの観察は矛盾しないのでは？

質問： 私が思うには，字が汚いことと，数学ができない子を結びつけるのはよくないと思います．例えば，私は模試の採点をしているのですが，字が汚くても頭の良い子，字がきれいでもほとんど解けていない子はたくさんいると思います．このことについて，先生はどう思われますか？

お答え： 「模試の採点をしている」という現場の意見は重要ですが「思います」という断定を避けた言い方はどういうことなのでしょうか．（ざっとした印象でよいですから）どれくらいの比率でどう，ということを教えていただけないでしょうか．そうしていただけると役に立ちます．

質問： 1/6 に配られたプリントに，数学の苦手な人は筆圧が弱かったり字が雑になるみたいなことを書いてたんですけど，それは本当ですか？

お答え： 日本語が変．「書いてた」の主語は何？質問内容については，数学の定理ではないので，いつでもそう，とは限りませんが，その先生が見る限りの大体の傾向のようで．

質問： 配布プリント「数学の苦手な生徒に対する指導・工夫」の中で苦手な生徒の多くが筆圧が弱く数字・文字の書き方が丁寧でない」というのがありましたが，「文字が丁寧でなくまたノートの整理ができないが，数学が得意」という人は（自分の経験上）結構いると思います．そういう生徒もった場合，やはりノートのとり方，文字の書き方に関して指導をしたほうがよいでしょうか？それとも「それがその生徒のやり方だ」と考えて，そのままやらせる方が良いのでしょうか．

お答え： 一般的には「人が読める字を書く」ことを要求してよいと思います（ごめん，山田も汚いが）．それにしたがうかどうかは自己責任，ということで．ちなみに「苦手な生徒の多くが筆圧が弱く数字・文字の書き方が丁寧でない」ということと「文字が丁寧でなくまたノートの整理ができないが，数学が得意な生徒が多い」ことは矛盾しませんね．

■題意

質問： “題意をみたす”，“題意より” などの言い回しは私も高校でならったのですが，実際生徒に教えるようになったら “仮定” “結論” のほうを使った方がいいのでしょうか．

お答え： 授業で説明しましたとおり，山田は不勉強なため「題意」という語の意味を知りません．したがって，授業で使うべきであるかどうかの判断ができません．高等学校でならったのでしたら，まず「どう

いう意味である」と習ったのか教えていただけませんか？

質問： 「題意」についてです．たとえば良い使用例について「$x^2 = 4$ を満たす負の整数を求めよ」という問題において「$x^2 = 4$ より $x = \pm 2$. ここで題意より $x = -2$」などと使うと書いてありました．特に，この後 $x = -2$ は「題意」をみたす，と言う言葉は不要です.

また，他の例として，必要十分条件の問題で，仮定が「必要条件」であれば，それによりもとめられた結果は「必要条件」を満たすものですが，「十分条件（題意）」をちゃんと満たしているかはわかりません．ですので，事後的に「題意を満たす」という言葉が必要になってくるみたいです．（Yahoo! 知恵袋）

お答え： お調べいただきありがとうございました．これは山田も見ておりますが，後半，具体例がないですね．前半については，「題意」は「条件」と置き換えることができるように思います．いずれにせよ広辞苑にあった「題の意味するところ」とは違った意味として使われていますね.

質問： 「題意」という言葉についてですが，私の経験からいうと，予備校などが出す受験用問題集・参考書の解答例に「題意より...」[1]) 「これは題意を満たすので...」[2]) 「よって題意は満たされた...」[3]) のような記述をよく見かけた記憶があります．これで受験生に広まっているのだと思います.

1) は，「問題の仮定より」「問題の設定より」といった意味で使われることが多いようです.

例：問：$a > 0$ とする ...解：題意より $a > 0$ だから...

この場合，仮定と書けばよいので，「題意より」は特に必要ないかも知れません.

2) は十分性を確認するときに使うことが多いようです.

例：問：(m, n に関する何かの条件）を満たすような整数 m, n を求めよ．解：...逆に（仮定から導かれた結論としての m, n の条件）とすると，これは題意を満たすので...

3) は証明問題で多いようです.

例：問：π が 3.05 より大きいことを示せ．解：...$\pi > \cdots > 3.05$ よって題意は示された.

仮定が複数個ある場合，1), 2) の意味で使うと便利なことがあります．複数個ある仮定 (i), (ii) ...のようにつけるには解答欄にその旨記述しなければなりませんが，「題意」を使うことによりどの (i), (ii) のことを言っているのかは，解答を読む人が適宜解釈してくれます．その分，書く量が減るので時間が短縮できます.

お答え： 結局，仮定，条件，結論と置き換えることができる場面ですね．これは山田の観察と同じ．したがって，複数の意味を持つ題意より「仮定」「結論」「条件」と言った方が明解です．さらに「解答を読む人が適宜解釈してくれます」というのは答案作成者（受験生）としては失格で，自分が何を指しているのかを採点者に明確に示すことができなければいけません.

質問： 「題意」と似たようなことなのですが，福岡県立高校の入試問題には，文章を呼んで，連立方程式を立てて答えを求める記述式の問題が出ます．解答欄には

$$\begin{cases} ax + by & = e \\ cx + dy & = f \end{cases} \qquad \text{これを解くと} \qquad \begin{cases} x & = \bigcirc \\ y & = \triangle \end{cases}$$

と書くのは当然ですが，$\begin{cases} x & = \bigcirc \\ y & = \triangle \end{cases}$ の後に，「これは問題にあう」という謎の文言をつけないと減点されます．この文言が何を主張しているのか分からないのですが，つけたい人はつければいいし，つけないからといって減点する数学的根拠がないと思います．先生の意見を伺いたいです.

お答え： 山田には 2 つの事が思い当たります．(1) 方程式を解くプロセスを ⇒（必要条件）での変形とみなすと，最後に最初の方程式に代入して，本当に解であることを確かめる必要があります．これは必要

十分な形で変形していけば不要なのですが，中学校で教える解き方はそこらへんがすこしだけ曖昧なはずで，だからこの文言が必要，なのでしょうか，(2) 係数行列が非特異な場合，連立方程式の解はただ一つ定まりますが，文章題の場合，それが「問題に適する」かどうかは自明ではありません．たとえば -15% や 80% の食塩水がでてきてしまっていたら，問題に適しません．このことの吟味なのでしょうか．

質問：　高校入試では，「これは問題に合う」「題意を満たす」と書かなければ減点されると言われていましたが，書いてはおかしいのですか．

お答え：　意味を明確に理解していればよいのでは？上の回答参照．

■その他

質問：　あけましておめでとうございます．娘さんと初詣行かれましたか？

質問：　あけましておめでとうございます．冬休みは娘さんとどこか行かれましたか？

お答え：　いいえ．