2009 年 1 月 20 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

数学科指導法 II 講義資料 11

おしらせ

- 今回で授業は終了です．ご聴講ありがとうございました．
- 今回，最終レポート課題を出題します．シラバスでは「修正して再再提出」という言葉を用いていましたが，前回までに提出していただいた問題を使っていただいても結構ですし，新たに作成していただいても結構です．
- 提出したレポートを採点し，最終的な成績をつけます．成績は 2 月 12 日までに山田の部屋の前に掲示致します．その際，レポートなども返却いたします．
- 成績についてのご意見，クレイムなどがありましたらお知らせください．ただし，クレイムを受け付けられる日程には限りがあります．詳細は返却レポートに添付いたします．指定の日時までに申し出がなかったものについてはたとえ当方の採点ミスであっても訂正は受け付けられません．

最終課題

次の課題に関するレポートを作成し，提出してください．

■課題　今回のテキスト「空間の回転と四元数」の章末問題を一問作成してください．

- 四元数に関わる問題に限ります．
- 内容は節末問題と同一レベルでも構いませんし，さらにひねった問題としても構いません．
- 「振り落とす」試験問題ではないことに注意してください．
- その他，授業で与えた注意にはしたがってください．

■レポート内容　今回のレポートは次の内容からなるものとします：

- 問題文：それだけで完結したもの．余計な説明などはつけないこと．
- 解答：単なる解答あらすじメモではなく**模範**答案となるような完全な文章．
- 問題作成にあたって行った試行錯誤，工夫についての説明（必須）
- 予想される誤答の例（一つ以上）．

■レポート様式　次の形式にしたがってください．形式の異なるものは受理いたしません．

- A4 版用紙に横書きで，片面のみを使ってください．
- 「レポートの内容」の節で述べた各項目ごとにページを改めてください．
- 完成したレポートの冒頭に，本日配布する表紙（必要事項を記入したもの）をつけて，上端をステープラ（ホチキスは商品名）で 2 箇所とめてください．
- 各ページの右下に学生番号を記入してください．
- できるかぎり丁寧な（よそゆきの）字で書いてください．ワードプロセッサを使用しても結構ですが，数式の形式は標準的なもの（たとえば $sin x$ ではなく $\sin x$; 授業ですこしだけ言及しましたね）を用いてください．

■締切りと提出場所

2009 年 2 月 3 日（火）；理学部本館 4 階数理学研究院事務室前

成績提出締切りの都合がありますので，厳守でお願いします．

提出された問題（前回説明しそびれた分; 課題 2）

問題 (0)

3 節「四元数と空間の回転」の節末問題.

問題 1： 座標空間の点 $\mathrm{A}(0,0,3)$, $\mathrm{B}(2\sqrt{2},0,-1)$, $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\sqrt{6},-1)$, $\mathrm{D}(-\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$ とする．原点を通り空間の単位ベクトル $\vec{v}$ に平行な直線を軸として，$\vec{v}$ が指す方向から見て正の向きに角度 θ の回転をさせると，点 A, B, C, D はそれぞれ回転させる前の B, A, C, D の位置に移った．$\vec{v}$ 及び θ の値を求めよ（$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする）.

修正案： 座標空間のある回転によって，点 $\mathrm{A}(0,0,3)$, $\mathrm{B}(2\sqrt{2},0,-1)$, $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\sqrt{6},-1)$, $\mathrm{D}(-\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$ がそれぞれ B, A, C, D に移った．この回転はどのような回転か.

コメント：
- A, B, C, D がひとつの正四面体の頂点となることを（解答例では）利用しているが，それは気づくべきことか．あるいはどのようにして気づくのか.
- 図形的な意味を考えれば四元数を使わなくてもよい？
- 「とする」は変.「移る前の」は必要ないのでは？

問題 2： 空間の点 P の位置ベクトルを $\vec{p} = (1,-1,2)$ とする．原点 O を通り，$\vec{v} = (1,1,1)$ に平行な直線 l を軸として，点 P を $\vec{v}$ が指す方向から見たときに正の向きに $\frac{4}{3}\pi$ だけ回転させた点を P'，また，点 P から直線 l に下ろした垂線と直線 l の交点を A とする．点 P', A の座標，及び，三角錐 $\mathrm{OPP'A}$ の体積を求めよ.

コメント：
- 「垂線の足」という言葉は使わない？
- 垂線の足を求めるのに，2 次関数の最小を用いているが，線形代数だけで求まらないか？

問題 3： 原点を通り，単位ベクトル $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ に平行な直線を軸として $\vec{v}$ がさし示す方向から正の向きに $\frac{2\pi}{n}$ だけ回転する操作を考える.

$q = \cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\vec{v}$ について，どんな空間の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ に対しても $q^n\vec{p} = \vec{p}q^n$ となることを示せ.（ヒント：点 P を n 回上の操作で回転させるとどうなるのか.

修正案： 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ を虚四元数と見なし，$q = \cos\frac{\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\vec{v}$ とおくとき，$q^n = -1$ であることを証明せよ.

コメント：
- 前半と後半の関係が「よく読まないと」分からない.
- 前半やヒントを知らなくても
$$q^k = \cos\frac{k\pi}{n} + \sin\frac{k\pi}{n}\vec{v}$$
であることが数学的帰納法で簡単に証明できるので，「ヒント」などはむしろ邪魔になるのでは？
- さらに，上のことから $q^n = -1$ となることがわかってしまうので，示したい結論は弱すぎる.
- ベクトル $\vec{v}$ が特別なものである必要はない.
- 修正案のようにするとすっきりするが，回転を用いなくても証明できてしまう.

問題 4： $\alpha = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, とする．$\xi = \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta i + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta j + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta k$ として，次の問いに答えよ.

(1) ξ^2 を求めよ.

(2) ξ は単位四元数であることを示せ.

(3) ξ^n（n は自然数）が i) $\xi^n \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{H}$, ii) ξ^n が実数となる最小の n をそれぞれ求めよ.

修正案： $\alpha = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, とする．$\xi = \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta i + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta j + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta k$ として，次の問いに答えよ.

(1) ξ^2 を求めよ．

(2) ξ は単位四元数であることを示せ．

(3) 次の条件を満たす最小の自然数 n をそれぞれ求めよ：(i) ξ^n は虚四元数 (ii) ξ^n は実数．

(4) 単位四元数 ξ が表す空間の回転はどのようなものか説明せよ．

コメント：

- 次の質問がありました：本当は (4) として $\alpha = \cos\frac{\pi}{8}$, $\beta = \sin\frac{\pi}{8}$ を導き出すことを目的としたのですが（回転角 $\frac{\pi}{8}$）どう問題として与えてよいか分かりませんでした．ξ 自体は何らかの回転を表すなどの条件を明記したりしたら良いのでしょうか？

  回答：たとえば上のようにしたらどう？

問題 5： 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{v'}$，実数 θ, θ' に対して，単位四元数 q, q' を $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{v}$, $q' = \cos\frac{\theta'}{2} + \sin\frac{\theta'}{2}\vec{v'}$ とする．空間の点 P を $\vec{v}$ が指す方向から見たときに θ 回転させた後，$\vec{v'}$ が指す方向から見たときに θ' 回転させて移る点 P$'$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \vec{p'}$ としたとき，$\vec{p'} = (q'q)\vec{p}(\overline{q'q})$ をみたすことを示せ．

修正案： 空間の単位ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{v'}$ に対して，原点を通り $\vec{v}$ に平行な直線を l, 原点を通り $\vec{v'}$ に平行な直線を l' とする．

実数 θ, θ' をとり，空間の点 P を，直線 l を軸として $\vec{v}$ が指す方向から見たときに θ 回転させた後，直線 l' を軸として，$\vec{v'}$ が指す方向から見たときに θ' 回転させて移る点 P$'$ は，

$$\vec{p'} = (q'q)\vec{p}(\overline{q'q}) \qquad (\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \quad \vec{p'} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}})$$

を満たすことを示せ．ただし，

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{v}, \qquad q' = \cos\frac{\theta'}{2} + \sin\frac{\theta'}{2}\vec{v'}$$

である．

コメント：

- 回転の合成と四元数の結合法則だけ？
- 回転軸が指定されていない．

問題 6： 点 P$(0, 1, 1)$ を，原点を通るある直線を軸として，その直線に沿う単位ベクトルの指す方向からみて正の向きに $\frac{2}{3}\pi$ 回転させると点 P$'(-1, 0, 1)$ に移った．この単位ベクトルを求めよ．

修正案： 空間の点 P$(0, 1, 1)$ を，原点を通るある直線を軸として，その直線に平行なある単位ベクトル $\vec{v}$ の指す方向からみて正の向きに $\frac{2}{3}\pi$ 回転させると点 P$'(-1, 0, 1)$ に移った．$\vec{v}$ を求めよ．

コメント：

- 沿う $\rightarrow$ 平行？
- その直線に平行な単位ベクトルは 2 つある．

問題 7： 空間上の点 A$(1, 0, -1)$ が点 B$(1, 1, 0)$ へ原点中心の回転で移ったとする．この回転軸，回転角度，そしてこの回転を表す四元数を求めよ．また，ある点 C$(1, 1, 1)$ がこの回転で移る先とその四元数を求めよ．

修正案： 空間の点 A$(1, 0, -1)$ が，原点を通る直線を軸とするある回転によって B$(1, 1, 0)$ に移ったとする．この回転軸，回転角, そしてこの回転を表す四元数を求めよ．さらに点 C$(1, 1, 1)$ にこの回転を施して移る点を求めよ．

コメント：

- われわれのテキストでは「原点中心の回転」という言葉を使っていない．
- 「ある点」という割には具体的に指定されている．
- 「その四元数」とは何か

前回の訂正

訂正された資料は web ページに公開しています．

- 講義資料 10，2 ページ，問題 5 の修正案の解答：$\xi = \eta = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$
- 講義資料 10，3 ページ下から 9 行目：（n は自然数）が正しい．
- 講義資料 10, 12 ページ，上から 4 つ目の質問：「問題週」→「問題集」
- 講義資料 10，16 ページ，2 次方程式の根の公式の根号の中が違っている．

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

です．

- 講義で述べたシュワルツの不等式の証明の式に余計な x が一ついていたらしいです．正しくは

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \left| \boldsymbol{y} - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} \right|^2 \\ &= |\boldsymbol{y}|^2 - 2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2} \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}{|\boldsymbol{x}|^4} \\ &= |\boldsymbol{y}|^2 - \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2}{|\boldsymbol{x}|^2} \end{aligned}$$

です．

質問と回答

■教材内容について

質問： 四元数において，指数，対数，べき乗などを複素数と同様に構成できないのですか？複素数 $x+iy$ を $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と書けたように，$t+xi+yj+zk$ も似た形で書ければできないことはないように思えたのですが，分かりませんでした．

お答え： 整数乗は自然に定義できますね．極表示は，つぎのように考えると対応物ができるような気がしますね：単位虚四元数（空間の単位ベクトル）を用いて

$$\xi = r\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\vec{v}\right) \qquad r=|\xi|, \theta\in\boldsymbol{R}, \vec{v}\in\operatorname{Im}\boldsymbol{H}, |\vec{v}|=1.$$

ベクトル $\vec{v}$ の選び方がさらに 2 次元の自由度を持ちますので，かなり複雑ですが．これで「指数関数」の定義はできますか？下の回答もご覧ください．

質問： 講義資料 10, P.3 下から 9 行目，四元数 x の n 乗（n は四元数）とありますが，n は自然数ですよね？ちなみに “四元数乗” について考察してみました．

- 指数が複素数であるとき，一般に多価関数になるので，“四元数乗” は当然，多価関数になる．
- 複素数の極表示のように，四元数も極表示して考える（四次元の球極座標を用いる）べきか．
- $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ $(\theta\in\boldsymbol{R})$ だが，$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ とするのか（$i^2=j^2=-1$ なので同じような形になってしかるべきと考えてみました）「$e^{i\theta_1+j\theta_2+k\theta_3}=e^{i\theta_1}e^{j\theta_2}e^{k\theta_3}$」となって欲しいのですが，単位四元数を $e^{i\theta_1+j\theta_2+k\theta_3}$ の形で表すことは θ_1, θ_2, θ_3 は各々 2π の整数倍を除いて一意か．一意でないならそれが多価性を象徴しているということか．

（結局 “四元数乗” がうまく定義できません．とくに 3 番目のことが引っかかって...）四元数乗をうまく定義することは可能なんでしょうか？

お答え： この場合だと，単位四元数を S^4 というよりは $\boldsymbol{R}\times(S^1)^3$ とみなしたい，ということのようですが，こんなことはできますか？

指数関数は行列指数関数と同様に，べき級数展開を用いて定義するのがよいようです．

質問： 四元数の導入の仕方は 2 通りあると思うのですが，「複素数の拡張としての四元数」と「空間の回転を計算するための四元数」とどちらから導入していくべきでしょうか．私たちの場合約 4 回の講義で「四元数による空間の回転」まで習いましたが，高校 3 年生に対して同じレベルの教材と演習を用いようとしたときどの程度の時間をかけるべきでしょうか．

お答え： 前半：今回は「複素数の拡張」として導入し，その応用として「回転の表現」を与えました．「回転」から導入するコースをご自分で作って比べてごらんなさい．後半：よくわかりませんが，高校生向けにこの内容を話したときは，8 時間では手を動かしてもらう時間が足りない感じでした．通常，高等学校の教科書は「時速 2 ページ」と言われています．進学校，一貫校などではこの限りではありませんが.

質問： 今日の講義で Schwarz の不等式が成り立つことを，実ベクトル空間と複素ベクトル空間の場合について見てきました．Schwarz の不等式は内積が関係しますが，一般の K-ベクトル空間（K: field）についても何らかのうまい定め方によって内積を定義することができるのでしょうか？もしできるとしたら Schwarz の不等式は成り立つのでしょうか．

お答え： 内積の「正定値性」の定義が実数や複素数の性質に依存しています．K が $\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ の部分体なら

ok ですが.

■図形的な意味

質問： 前回の授業でシュヴァルツの不等式の証明で，その図形的意味の説明がありましたが，四元数の回転で図形的意味を問うことは，たとえば図示することなどがよいのでしょうか？

お答え： 「四元数の回転」って変ですね．図示することも結構ですが，きちんと言葉で述べることも大事です.「絵を書いて納得せよ」という説明をして良し，とするのは結構なのですが，教師としてはそのバックに言葉を持っていなければいけません.

質問： ベクトルの式から図形的な意味を捉えることは大事だと思いますが，ベクトルは図形的なもので意味が捉えにくいものを計算として解決するものだと思うのですが，この捉え方はまちがっているのでしょうか.

お答え： まちがっていません．山田も，線形代数の授業のときには「しばらく図形を忘れろ」と言います．しかし，図形的な意味が説明できる状況ではなるべく意味を考えた方がよいのも事実.

質問： 今期の授業で四元数の問題を作る際に “図形的な意味” を強調されましたが，それはなぜですか.

お答え： 初等中等課程での数学教育では，論理性も重要ですが「直観」も重視されます．たとえば中間値の定理は直観で処理されてしまっていますよね．それで良いし，そうでなければ困ると思いますが．その直観の拠り所となるのが，大抵の場合図形的イメージだから，そういうものになれて欲しいと考えたからです.

■提出された問題とその解説について

質問： 1 月 13 日の問題 (1) の問題 11，四元数 ξ, η, ζ が $\xi+\eta+\zeta=0$, $|\xi|=|\eta|=|\zeta|=1$ を満たすとき，次の値を求めよ：$|\xi-\eta|^2+|\eta-\zeta|^2+|\zeta-\eta|^2$

について，左のような図（略）をかかれていましたが，これは，4 次元上の ξ, η, ζ について $\xi+\eta+\zeta=0$ だら従属となり，ζ は 3 次元上で ξ, η を用いて表すことができ，ということは ξ, η の張る平面上で表される．このとき $\xi+\eta+\eta=0$, $|\xi|=|\eta|=|\zeta|=1$ となるのは左図のとき，という考え方で良いですか.

お答え： たぶん良いと思いますが，表現の仕方がまずい.「ζ は 3 次元上で ξ, η を用いて表す」という「3 次元」が何をさしているか分かりません.「4 次元上で」というのも意味が不明ですね（一応，ここでの説明は「大学生向き」です）

ξ, η, ζ は 4 次元ユークリッド空間（または $\boldsymbol{R}^4$）の 3 つのベクトルであるが，これらが生成する $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間は 2 次元．なぜならば，$\{\xi, \eta, \zeta\}$ は 3 個のベクトルの組だがそれらが $\xi+\eta+\zeta=0$ を満たしているので線形従属だから.

そこで，$\{\xi, \eta, \zeta\}$ を含む $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間（平面）を V とすると，V の 3 つのベクトル ξ, η, ζ が問題の条件を満たすのは，$\xi=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\eta=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\zeta=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たす平面上の点 A, B, C が O を重心とする一辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形になるときである.

質問： コーシーシュヴァルツの不等式の証明で，天下り式に

$$0 \leqq \left|\boldsymbol{y}-\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}\right|^2$$

を評価し，図形的な意味も説明されていましたが，$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|^2 \leqq |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2$ の式をどのように天下れば上のような不等式にたどりつくのか分かりませんでした．説明をお願いします．

お答え： 「天下り」というのは「分からなくてもよいからこのように置け」ということですから，「どのように天下れば」という質問は不思議ですね．授業で説明したように $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおいて，B から直線 OA に下ろした垂線の足を H とするとき $|\mathrm{BH}|^2 \geqq 0$ という式です．これは，よく考えると $|\cos\theta| \leqq 1$ （θ は $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ のなす角）のことです．

質問： 1 月 13 日ぶんのプリント p.2 問 5 (1) で，$\eta^2 + \bar{\xi} = \eta(\bar{\xi} + 1)$ から $\eta = 1, \bar{\xi}$ と求めるときに，$\bar{\xi}$ が定数か変数かはっきりしないので適切ではないとされましたが，“[1] の関係式を満たす η” という意味では正しいのではないですか．

お答え： 高等学校の問題として「$y^2 + (x+1)y + x = 0$ を満たす y を求めよ」は正しい問題か？ということですね（四元数の問題ではありませんね）．山田はあまり好みではありません．「x を定数とするとき . . . 」とするか「. . . が成り立つとき y を x で表せ」でしょうか．答えが $y = 1$ または $y = x$ なので後者はちょっと苦しいかもしれません．なお，ご質問の対象となっている問題については，最初に [1], [2] が成り立っていることを仮定しているので (1) のようにあとから [1] だけ成り立つ状況を考えよ，というのはおかしいです．

質問： 講義資料 10 で，ξ^{-2} が何を意味するかという指摘をされていますが，ξ^{-n} という形の記述はしないほうがいいのでしょうか．

お答え： テキストに書きそびれましたが，$(\xi^{-1})^n = (\xi^n)^{-1}$ であることがわかりますので実際には問題ありません．

質問： 講義資料 10, p.4 の問題 3 に対するコメントで，「回転を用いなくても証明できる」とありますが，この問題は敢えて回転を意識させたかったのではないでしょうか．確かに先生の案の方がスマートでわかりやすいですが，うまく回転とリンクさせることはできないでしょうか．

お答え： 多分そうなんでしょう．コメントにあるように回転とあまり関係がなくなってしまいました．工夫する必要がありそうですね．なお，修正案のようなシンプルな形にしたのは $\vec{v}$ の成分が「目くらまし」（結論は $\vec{v}$ が単位ベクトルであればなんであっても成り立つ），結論が「中途半端」（もっと強いことが言える）ということです．このシンプルな問題からどのように変化させることができるでしょう. . .

■教科書・問題集について

質問： 教科書や問題集などで，節末問題の解答が最後のほうに載っていることが多いですが，答えがコンパクトにまとめられていて，なぜそう変形できたかなど分からないことがよくあります．ページ数の問題で省略されているだけですか？

お答え： そうです．ですから「最後の答えがあっているか」を確認するためだけにつかうのが良いようです．

質問： 教科書での公式の証明についてです．自分の辞書をひくと，「公式：数や式の間に成り立つ関係を，数学上の記号を用いて表示した式」とありました．なので，教科書の中に載る公式にはそれが導出される過程がかかれているべきだと思います．今回の公式はテキスト p. 15 の $\overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi}$ と p. 17 の $\mathrm{Re}(\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\mathrm{Im}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$ でしたが，これらはテキスト中にその導出は載っていません．ですので，完全記述の形ではなくても誘導のような形式でこれらの公式の証明を問いにしてもいいのではないかと考えますが，どうですか？

お答え： そういうお考えでしたら，テキストに対する意見のときに「この公式には証明をつけたほうが良

い」と言ってくださればよかったのに，何で後から？ちなみに，現行の教科書はご質問のようにはなっていません．たとえば

$$\text{半径 } r \text{ の球面の面積} = 4\pi r^2 \quad (\text{中学校の教科書で}), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

などは証明がついていないはずです．

質問： 教材を批判的に見ることができるようになることがこの授業の目的の 1 つで，かなり前にそのための演習というか，教材のミスを指摘するという課題があったと思います．その時に「外積は数の乗法と似た性質をもっている」という記述について「$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ なんていう数の乗法とは違う性質が出てきているので，この記述はやめた方がよい」という旨のことを言っておられましたが，ここで問題なのは，「$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$」が「$a\times b = b\times a$」とは違っているということではなく，教材という（一応）万人に向けて作られたものの中にその判断が個人によって異なる記述（ここでは $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ が $a\times b = b\times a$ と似ているということ）があることではないでしょうか？

お答え： 後半，たしかに教科書に「価値判断」を含むフレーズを入れるのはよろしくないかと思います．思い出しますと，「似ている」というフレーズは山田が最初に入れたものをご指摘にしたがって撤回したものだったと思います．

- 「似ている」と書いた理由：外積の双線形性を，式だけで天下り式に書いてもピンとこないので「数の積の分配法則に似ている」と言いたかった．
- 撤回した理由：数の積の性質というと，「交換法則」「結合法則」「分配法則」だと思いますが，外積が満たすのは分配法則だけなので，2 対 1 で「似てない」とみなしたほうが良いと思った．

ということでした．

質問： 自分の理解を深めるために「教科書のミスを見つける」ことは大事だとは思いますが，指導する立場では「あたえられた内容の中でそれを分かりやすく伝える」方が大切と思うのですが…どうお考えですか．

お答え： 「あたえられた内容の中でそれを分かりやすく伝える」というのは，その内容が「嘘」でもですか？戦時下の教育を連想して嫌な感じがします．指導者は先頭に立って道案内する人ですから，案内板が違っていたらそれをだれよりも先に指摘・修正し，正しい方向に連れていく必要があります．「わかりやすく」はその後です．

質問： 今回私たちは約 4 ヶ月の間に四元数を学び，そして問題作成に取り組んできたのですが，実際に 1 冊の教科書を作成するのにかかる期間はどれくらいなのですか？

お答え： 何の教科書かにもよります．高等学校の本だと，2 年くらいと思いますが，いかがでしょうか>著者の方

質問： 高校数学において，集合と論理という単元があり，集合は習っているはずなのに，全体的に集合の記法を避けている気がします．例えば $C = \{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ は高校では円 $C: x^2+y^2=1$ と書かれます．個人的には集合の記法を用いた方が図形やグラフの意味がわかりやすくなると思うのですが，集合の記法を避けるのに何か理由があるのですか．

お答え： (1) 数学 A は必修でないこと (2) 数学 A で扱う集合は，その後の項目（場合の数）で数え上げを行うための準備とみられ，主に有限集合が扱われる，ということだと思います．手元の教科書の「集合と論理」の単元では可算無限集合の例は 2 箇所に，非可算無限集合の例は 1 箇所にしかありません．歴史的には円の方程式がかかれたのは集合の概念が生まれるずっと前ですから，あまり気にしなくても理解は可能なんでしょうが，集合という言葉を用いると理解しやすくなると（山田も）思います．

質問： 授業の内容をサポートするために，よく参考書や問題集を使用しますが，今回の講義を受けて，どんな参考書にも欠点（改善すべき点）があるように思えてきました．そのような事に留意して事前に参考書をチェックしておくことが重要なのでしょうか？むしろ参考書などは使わない方が理想でしょうか？

お答え： ひどいものは覚えておいたほうがよいかもしれませんね．あとは「複数見ることでヤバさを平均化する」のも手です．

■指導要領上の禁じ手について

質問： 私が調べた限りでは，二重根号のはずし方は高校では扱わないとありました．高校で扱わない二重根号を使うのはあまりよくない気がするのですが，どうですか？

お答え： 外さなければよいのでは？「二重根号のはずし方は扱わない」と「二重根号は扱わない」は意味がちがいますよね．ちなみに，手元の数学 II の教科書では，半角の公式の応用として $\sin 22.5°$（二重根号を含みます）を求める問題がでています．

前回紹介した問題の二重根号（$\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8}$）は，実ははずれません．すなわち，有理数の平方根の有理数係数の線形結合では表せません．だから，気にしなくてもよいかと...

質問： 部分積分について，2 回部分積分をさせる問題はあるが，本当は 2 回やってはいけないといっていましたが,「2 回部分積分」をやってはいけないということを生徒に教えておくべきものなのでしょうか.

質問： 2 回部分積分について，してはいけないということを生徒に教えるべきか.

お答え： 正確には「2 回部分積分をやってはいけない」のではなく「2 回部分積分をやらせてはいけない」. すなわち，そのような必要がある問題を教科書に載せてはいけない（すこし緩くなっているようですが）ということ．生徒がやる分には何も問題がありません.

このような「制度的な制限」は，教師が知っているべきものであって，生徒に強調するべきものではない（枠をはめてしまうという点で悪い効果がある）と思います.

■一般に問題について

質問： 節末問題を作る時，別解は多い方が良いのですか？それとも少ない方が良いのですか？

お答え： あなたは，どちらの方が教えやすいですか．教える人によります．凡庸な教師ならばきちんと答え方が決まったもので教えた方が楽というでしょう.

質問： どのような問題が節末問題として適当なのでしょうか？図形的意味や他の単元との関係を含んだ問題でしょうか？

お答え： 公式一発適用ではなく，2 ステップ以上の考察が必要なものがよいのではないでしょうか.

質問： 節末問題として出題する問題で，その節で習った内容が，他の科目（例えば物理や化学など）に応用されている例を挙げたいと考えています．減衰振動の微分方程式を解く場合などを，その科目の知識がまったくなくても解けるように配慮し，あくまでも数学の問題として作成しようと思っています．出題の意図はもちろんその節で習ったことの応用例を示すことですが，そもそも数学の教科書なのに他の科目の内容を出題してもいいのでしょうか？

お答え： 良い試みだと思います．アメリカの微積分の教科書などを見ていただくと，そういう問題がたくさんあります．しかし，他の科目の知識を必須とする問題は避けざるを得ません．とくに，日本の高等学校では「選択制」が進んでいるので，対応する科目を履修していない生徒がでてくる可能性があります．むしろ「補充問題」などの形で考えるほうがよいと思います.

質問： いままでの課題 1 のような基本事項を確認するような問題で「確認したい事項がわかりやすいようにすること」「答えをキレイにして基本事項の確認に焦点を絞ること」「計算練習になること」の他に気をつけることはありますか？

お答え： まとめて下さってありがとうございます．最後の「計算練習となること」は「特別な場合ではないこと」が大事です．たとえば角度 π の回転など．もちろん，問題がまちがっていないことが一番大事です．

質問： 節末問題の適切な量はどれくらいですか．小問をいくつか作るべきか，難しめの問題を一題出すべきでしょうか．テストではないので簡単な小問などはいらないでしょうか．

お答え： 授業でも述べましたが「部分点を与える」小問は必要ないでしょう．本当に必要な誘導に止めるべきだと思います．

質問： 今期の講義では「四元数」という計算を要する分野を扱っていますが，中学で習う「合同や相似の証明」などの計算を要さない分野の問題を扱うときは，どのようなことに注意すればよいのでしょうか．図形を使う問題は特に計算問題よりも作るのが難しそうなのですが，やはりたくさん問題を作って改善していくのが良いのでしょうか．

お答え： 図形の問題は「言葉」に注意してください．表現の仕方によっては予想もしない図形が現れることがあります．平面幾何には古典的な問題がたくさんありますので，それをあたっておくのがよいでしょう．まとめて解いてみるとある程度作り方のパターンが見えてくるはずです．

質問： 教科書の問題や定期試験，入学試験のように理解度を確認する問題の作り方を学びました．一方で，いわゆる問題集などでは，学力を高めるためのすこし程度の高い問題（応用問題）があります．いくつかの基本事項を用いる必要のあるものや，試行錯誤をしないと方針が思い浮かばないものなど様々ありますが，このような問題を作るときの注意点や効果的な問題を作るコツなどありましたら教えてください．

お答え： 難しいです．しばらく頭の中で転がすことが必要．手っ取り早く作るなら，大学で学ぶ内容を高校生向けに骨抜きにすることもありです．結構宝の山です．

■記述・表現について

質問： 提出されたレポートの中で，正しい日本語の文章がかかれていないものが結構見られます（私のレポートも含め）．気をつけて文章を書いていない，書いた文章を見直していない等，原因は多々ありそうですが，先生はどのようにお考えですか．また，正確な文章を書くには，文法や言い回しに気をつける，書いた文章を読み返して見ることが必須だと思われますが，他にどのような事をした方が良いかを授業で話された事，プリントに書いてある事以外で，お教えください．

お答え：

- 一般的な注意：読者に甘えるな．読者は意地悪で（この授業ではそうですね！）あなたが書いた文章をなるべく曲解しようとする．
- 基礎体力をつける：嫌になるほど本を読め．何でもよいから週 5 冊以上．
- 書いたものは忘れたころに見直せ．したがって，提出期限ギリギリに書いた文章は出来が悪い（この資料が典型例）．
- チェックリスト
  - 意味不明の語はないか．
  - 文の主語は明確か．

- 指示語が指示するものが明確か.
- 副詞の呼応は正しいか.

質問： 日本語についての訂正が多いですが，どうしたら正しい使い方を身につけられるのでしょうか.

お答え： 上の回答参照.

質問： 何故先生はノルム $\|\cdot\|$ を $|\cdot|$ と書くのですか．特に Schwarz の不等式のようなときに，意味の違う，しかし記号が同じ $|\cdot|$ が混在しているのは不適切ではないでしょうか.

お答え： 理由は「高等学校の教科書ではこの記号を使っているから」．不適切ではないと思います．実際，$s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{a}=(s+t)\boldsymbol{a}$ のような記述は高等学校の教科書にもあります．左辺と右辺の $+$ の意味は明らかに違いますが，不適切と言われることはあまりないようです.

質問： 基本的に数学では r は半径，x は未知数（変数），a, b, c は実係数で与えられています．2 次方程式の解 α，β とおくとき，α, β が実数でない可能性も考えられているからだと思います．ただ IA の範囲においても α, β とおいたり，$\alpha < x < \beta$ のとき $f(x) < 0$ などと書くのは慣例なのでしょうか．また θ は実数なのにギリシア文字で書かれるのもやはり慣習でしょうか.

お答え： 複素変数にはギリシア文字を使う，という慣例はとくにないと思います．思いつくだけでも，実変数としてギリシア文字を使うことは結構多いのではないでしょうか：ε, δ (極限の理論で使う，小さい実数)，κ (曲率，アインシュタインの重力定数)，λ (波長とか)，δ（クロネッカーの，ディラックの）むしろ「ちょっと特別」というような意味合いで使うのではないでしょうか．IA が何だか分かりませんでした (Internet Archive, Iraqi Airways. . .)．数学 I，数学 A のことだったのですね.

質問： 先生は問題を作成するときに本などを参考にしてその本と同じ（もしくは似た）文章を書かれますか．それとも一意的に受け取れることを何回も確認することを前提で自分の言葉で問題を書かれますか.

お答え： たぶん後者．とはいえ，自分の教科書を使っているときは. . . . ただし，用語・記号はなるべくテキストに合わせることにしています.

質問： 「垂線の足」という表現は，解答者全員が共有できていない可能性があるので，問題作成者の表現のように 2 直線の交点として捉えさせた方が安全ではないでしょうか.

お答え： ご指摘ありがとうございます．そのような気がします．実際，手元の教科書では「垂線の足」という言葉は使われていないようです．しかし，「点 O から AB に垂線 OE をおろし」という表現があって，図は E は線分 AB 上にあるようになっています．これはよく使われるのでしょうかね.

質問： 講義中に（$\xi \neq 0$）と書くのは止めた方がいいという説明があり，資料には「括弧書きは本当に必要な場合に限るべき」とのコメントが添えられていますが，山田先生は「本当に必要な場合」とはどのような場合だとお考えですか.

お答え： 言葉どおりです：内容を変えずに括弧を含まない文に書き換えることができない，あるいは書き換えることができるが，非常に煩雑な文になる.

■採点について

質問： 部分点をやる基準は作ったりするのですか．また，まったくできていないにもかかわらず，部分点狙いでかかれているとき点を与えますか？例えば，福岡県公立高校入試 (2) でいうと，白紙で最後に「これは問題に合う」と書いてある場合です.

お答え： 入学試験などの場合は，部分点の基準を細かくつけます．しかし，「まったくわかっていない」ことが答案から読み取れるときは点数を与えない，というのが普通です．また，ご質問（「福岡県公立高

校入試 (2)」というのが同定できませんが）のケースでは「これ」がさすものがありませんのであきらかに間違いで 0 点です．

質問： 問題の中には ∼ を使って（定理など ...）ときなさい，というものを見かけますが，その方法が思いつかずに別の方法で答えを導いた答案はどう得点を与えるべきだと思いますか．問題文に指定してあるので 0 点というのは少し残酷だと思うのですが....

お答え： したがって「採点が必要な場合」にはこのような問題を出すことが不適当．適切な誘導を用いて想定する解法にひきずりこみながらも，そうでない解法でといた者も正解にする，というのが常識と思います．このような出題が適当な場面は “∼” を習ったあとに，その使い方を確認する場合．ただし，今回の授業ではそのような指定は不適当，としました．

質問： 高校では無意識的に「題意を満たす」「題意より」「条件より」と使うように習ってしまったのですが，このような言葉により（大学）受験において大きく減点されることはあるのでしょうか．

お答え： 採点する時は，文章から「どういう意味で書いているか」を想像します．そして，その意味が正しいかどうかで減点するかしないかを決めます．したがって「なるべく正しく想像できる言葉」を使うのがよいでしょう．ですから「意味が確定している言葉」を使うことをおすすめします．

質問： ある問題を小問に分けて出題するとき，例えば (1), (2), (3) に分けて出題するとき，それらの配点の割合はどうしたら良いでしょうか．また，大学入試で (1) (2) の誘導問題を解かずに (3) だけ独自の解法で解答した場合，それがたとえどんなにすばらしい解法でも (3) の配点分しか点数は与えませんか．

お答え： 問題と答案によります．具体的に「こういう問題でこういう解答であればどのように採点するか」という問いなら，「山田ならこうする」というお答えはできます．

■教員の仕事

質問： 山田先生が思う理想の教師像を教えてください．

お答え： 桂枝雀が考える理想の噺家に近いです．

質問： 先生は，問題を作るときどれくらい時間がかかりますか．80 分の定期テストを作るとき平均どれくらいかかりますか．

お答え： 問題によります．まとまった試験問題を 1 セット作るときは，しばらく（2 日から 1 週間くらい）頭の中でアイディアを転がします．既製の問題を使わない時は，それから半日から 1 日くらい．

質問： 先生が教員のころテスト作成のときは他の教材を使っていましたか？もし使っていたら，自分の考えたものとどちらの方を多く使ってましたか？

お答え： 半々くらい．たとえば，数学 II（当時は「基礎解析」といっていた）の微分法の項では当時だいたい 3 次，4 次関数の増減を調べさせていましたが，教科書の例題ではすべてのパターンが尽くされていなかったので，なるべくきれいな数字になるような問題のリストを作っておいてそこから出題したりしていましたね．

質問： 山田先生が高校または大学で授業をするときに一番気を配っていることは何ですか．

お答え： 弱味を見せない．

質問： 「別解を作るには多くの知識が必要」という記述が今回のプリントにありました．確かにそうだと思います．私は別解をたくさん教えてくれる先生に魅力を感じます．先生のように小ネタを多く持っている方も生徒を引きつけるでしょう．その他先生が授業中に気をつけていることはありますか？数学的ではないですが，ぜひ聞きたいです．

お答え： ときどき surprise.

質問： 高校または中学校で数学を教える時に，一番大切なこと，また，一番やってはいけないことは山田先生は何だと思いますか？

お答え： 前者：数学を教えること．後者：数学でないものを数学といっておしえること．

質問： 僕は将来教師になりたいと思っているのですが，どうやったら山田先生のような授業ができるのでしょうか.

お答え： 「山田のような」がどんなものかわかりませんが，一般的に山田のような授業はおすすめしません.

質問： 先生は過去に教壇に立っていたと聞きましたが，強く印象に残っている生徒はどのような人ですか？

お答え： いろいろ．具体的に挙げるのは個人情報だからちょっと...

質問： 先生は高校教師のときにどのような生徒が数学を苦手にしていましたか．また，そのような生徒にどのような対処をされましたか.

お答え： 不良系，スポーツマン，オタク，あらゆる集団の中に数学が得意な生徒と不得意な生徒がいました．苦手な生徒は苦手な理由がそれぞれですから，対処の仕方はそれぞれ．本人に「得意になりたい」意識があるのなら方法はあるのですが，あまり得意になりたい人はいませんでしたね...1980 年代中頃，バブル華やかなりしころの，文科系メインの大学の系列高校だったので，数学が出きると cool でない，みたいな意識もあったみたいです.

質問： 中学校のときの数学は，授業→宿題プリント→授業の繰り返しでしたが，高校・大学では授業→ 1 人 1 人問題をといて発表，という形式になりました．発表する授業のほうが生徒はのびるのですか？

お答え： 「発表した生徒」は力になると思います．それ以外の生徒はあまり.... 発表しない生徒がその時間を有効に使う唯一の方法は「発表した生徒のあら探しをしてケチをつける」です.

質問： 私は，先生がいつもの講義の中で話して下さる授業内容とは少し外れた余談にいつも感心させられていますが，そのような余談を授業に取り入れることは私は大事だと思います．しかし，余談ばかりしていると授業の内容に支障がでてしまうと思います．そこで，どの程度，どのような話を取り入れながら授業をするのがよいか，一概には言えないとは思いますが，先生が気をつけていることなど，もしあれば教えてください.

お答え： ごめんなさい．余談が多くて授業が大急ぎだったような気がします．反省．ご質問ですが，本当に「一概には言えません」ね．客（学生）がダレてきたら，少しだけ入れるというのが節度ある方法だと思います（と自分に向けて).

質問： 5 冊問題集をやった先生の話がありましたが，教員になったらこれくらいやっておかなくては，あるいはこれくらいの知識はなくては，というような努力目標なども教えてください.

お答え： 指導内容については背景，周辺事項を明解に把握しておくこと．教科書，ノートなしで板書しながら講義できることが最低ライン（と山田は考えています).

質問： この授業で，数学の問題の作り方を学びました．教師になったら，テスト問題など，自分で作成しなければならないので，参考になりました．しかし，実際教師になったときに，一番重要となるのは授業で，いかにして生徒に理解してもらえるか，だと思います．授業の行いかたというのは教えてもらえないのでしょうか．現場で身につく力とは思いますが，不安でなりません．また，高校教師でも参考書などの書籍を執筆することがあるのでしょうか.

お答え： (1) 教師の仕事は「教える」「理解させる」のではなく「勉強させる」こと．そのための道具の一つとして「教えること」があってもよい．(2) 80 人一斉に授業のしかたを教えるのはナンセンス．(3) 自分が使った高等学校教科書の著者の欄を見てごらんなさい.

質問： 先生は高校の教員もやっていらっしゃったということですが，高校で教えるのと大学で働くのはどちらが好きですか．また，高校で教えた経験で，どのようなことが大学での仕事に活きていますか．そして，今，高校に戻ったとしたら，大学での経験でどんなことが活かせると思いますか，あるいはこんなことをやってみたいということはありますか（これから教員になる人への教訓的なことも含めて）

お答え： 前半：牛丼と天丼とどちらが好きか，と言われても，というのと同じ．どちらも楽しいし苦しいです．後半：すべてのことが関係しています．何，と特定することはできませんが，良かったのは「面の皮が厚くなったこと」．やってみたいのは，高校生による研究 (F. Morgan が college student による研究の報告をしています)．なお，教訓は嫌い．

質問： 数学が嫌いな生徒ができる理由：僕が第がに入ってからの実体験で考えると，やはりわからないからきらいになるのだと思う．わからないことを 45 分間聞いているのは楽しくないから寝てしまう．そしてどんどん授業についていけなくなるのだと思います．ではどうすればよいか．やはりどこで分からなくなったのかをはっきりさせることだと思います．先生はこのことをどのように考えますか．あと，このことを分かっていながらも，大学に入ってから数学が嫌いになっていきつつある僕がいるのです．分からなくなる理由を分かっているだけではだめなのです．教師はやる気にさせる能力が必要になるのだと思います．

お答え： だから教師の仕事は「教える」のではなく「勉強させる」．大事なのは材料の選択です．「このことを分かっていながらも」といいながら，具体的にどう分かっているか疑問です．ある人が「どこでわからなくなったか」を具体的に突き止めた経験はありますか？大変難しいですよ．

質問： 板書をたくさんする授業と板書の内容をプリントにする授業とどちらがよい授業だと思いますか．板書だと説明を聞き逃したりプリントだと寝てしまう生徒がでてくる可能性もあると思うのですが．

お答え： 授業の対象，内容，目的によります．山田は，一般に「準備しすぎた授業」はおもしろくないと思います．客を見て，ネタを変えることができるよう，ゆるく準備することが多いです．したがってプレゼンテーションソフトウェアを使う場合も最小限にして，なるべく黒板を使うようにしています．講義を行って，それをまとめた資料を後日渡す，というのもありでしょう．

質問： 私が高校生のときに使っていた数学の問題集には「題意から」という言葉が使われていたような気がしますし，誤植や（ページ数の関係からか）説明が詳しくないところもありました．たくさんの問題を解くことは大切なことだと思いますが，上のような理由から私が教師になったときに生徒に参考書の問題を解かせることに少し抵抗があります．先生は，昔，生徒に参考書の問題を解かせる際，生徒が正しく理解できるように何か工夫されていたことはありますか．

お答え： おっしゃることはよくわかります．全部を監督するわけにはいきませんが，毎週小テストをやって正しい答案の書き方を指導（おしつけ？）たことはあります．その上で，問題集の解答は単にあらすじだから，と伝える程度のことしかできませんでした．

質問： 勉強のできる生徒と勉強のできない生徒ではどちらのペースに合わせて授業を進めることが望ましいですか．おそらく勉強のできない生徒に合わせる方が望ましいと思いますが，時間が限られている場合はどうやって生徒を補助してあげることが望ましいですか．

お答え： 「勉強のできない生徒に合わせる方が望ましい」と考えるのはなぜでしょう．両方の回答にもっともらしい理由をつけることはできますが．

■指導内容

質問： この授業では四元数に関する話題を扱いましたが，四元数を選んだのには何か特別な理由でもあるのですか．先生が今後「数学科指導法」で同じ様な授業をするならば，四元数以外にどの様な話題を扱いますか．その理由は何ですか．

お答え： (1) 現在高等学校で扱っていないし，以前も扱われていなかった（したがって「教科書ガイド」や「問題集」の類が存在しない）(2) 初等的な扱いが何とか可能 (3) 最近の若者が不得意な空間図形と関わる (4) 実は応用がある．主な理由は (1), (2) で (3) と (4) は後付け．したがって (1)，(2) を満たすようなネタがあればそれを扱う可能性があります．

質問： 先生はなぜ四元数を選んだのですか？

お答え： 上の回答参照

質問： 今回，四元数をテーマに選ばれましたが，他にテーマにしようとした候補はあったんでしょうか．もしあったならば，それも高校 3.5 年生向けのテキスト作りをしたのでしょうか．

お答え： テーマについては下の質問と回答参照．テキスト作りはやっていません．（四元数の分も講義をしながら作っていました）

質問： 四元数以外にも高校生にでもわかるような単元はありますか？

お答え： この授業のために考えたのは，初等整数論の入り口，グラフ理論の入り口，微分方程式など．他にもいろいろあると思います．

■この授業

質問： この授業を通して山田先生のコメントが辛口だということがすごくよく分かりました．質問をした内容は自分で考えても本当によく分からないことだったのに「そのままです」というような答え方をされるとどうしようもありませんでした．教師として，どのような人にも理解できる授業をめざすのが大切なのではないのですか．

お答え： 後半ですが，断然違います．教師の主たる仕事は「教える」ことではなく「勉強させる」ことです．このことについては本日の授業でも説明します．前半については，ご質問の内容を公開してもよければここで議論しても良いのですが，答えを引き出せる質問にはなっていませんでした．用語に関する質問ですが，しかるべき本でどのような文脈で使われているかを調べ，それを考察したうえで「どう違うか」という問いにしてもらいたかったのです（それが「勉強させる」ということ）．

質問： この授業では「四元数」を扱ったわけですが，数回の授業を受けただけなので，おもしろい問題を作るのはかなり難しかったです．その面で，この授業では「四元数」よりもみんなのよく知っている高校の内容の問題作成にすればよかったのではないでしょうか？

お答え： 高校の内容にしなかった理由は最初の時間に説明した．難しくなるのは織り込み済みですので，「難しい」と感じてくださったのは山田にとって成功です．むしろ，難しいことが実行できないなら教員になることを諦めた方がよいと思います．

質問： 今こうして，今までに扱ったことのない題材を元に，教材を作成するトレーニングをしているのですが，先生ご自身も今されているような触れたことのない題材を元にした講義を受けられたのですか．もしそうなら，どのような題材を扱ったのでしょうか．

お答え： 質問の意味が分からないのですが，普通，講義を聞くときは「触れたことのない題材」を学ぶときではないでしょうか．

質問： 今まで，四元数について「高校生が解ける」ような問題を作成し，添削してもらってきましたが，途

中で配られた教材案と問題を使って，実際に高校生に教えて問題を解かしたことはあるのですか？

お答え： たぶん「解かせた」ですね．この授業をやる前に「体験講座・高校生のための現代数学入門」で約 8 時間授業をしました（って最初の時間に言いませんでしたっけ）．今回のコースはそれが元になっています．

質問： 良い問題についての質問に対する解答で，サッカーを例に説明されていましたが，これは高校サッカーの影響ですか？

お答え： いいえ．別に何でもよいのです．胡弓の演奏でも，囲碁の対局でも，太極拳のフォームでも...ちなみに「解答」ではなく「回答」．

質問： 問題の順番によってテストの平均点が変わる，という実験結果があるとおっしゃっていましたが，どのように行っているのですか？もともとの学力に差があったとは考えられませんか？

お答え： よく覚えていませんが，同じ学校の別のクラスで実施したものだったはずです．確かにクラス間の学力差はありえますし，因果関係を云々するには不足なデータです．このように「決定的な証拠」がない，というのが教育関係のノウハウを積み上げるときに難しいことではあります．

質問： 1/13 の p. 17 の中段で「sein」と「avoir」という単語が出てきて意味を調べようと思ったのですが，英和辞書には載っていませんでした．これらは実在する単語ですか！？

お答え： “sein” はドイツ語，“avoir” はフランス語．どちらもその言語を学んだら知らなければおかしいもの．

質問： 1/13 の p.6 の質問に対するお答え（p. 7 上）で「内積・外積との関係」の確認で『「図形的な性質」と「代数的な性質」との関係の理解を確かめるべき』と書いていましたが，要するに『内積が 0 $\Leftrightarrow$ 直交，外積が 0 $\Leftrightarrow$ 平行となることを確認させる』ということでいいですか？これ以外にもあったら教えてください．

お答え： ちょっと違いますね．『内積が 0 なら直交する』という事実を知った上で，四元数の積を用いて直交性を判定する，など．もちろん，その他の性質でも良いわけです．角度，正射影，面積などは内積や外積と関わる図形的な性質ですよね．

質問： 先生がこの授業で後悔する点，改善すべきだと思われた点は何ですか？

お答え： もっとも後悔したのは「毎回提出物を課して採点する」と言ってしまったこと．気力と体力を消耗しました．こちらが疲れていると厳しくしにくいので，甘くなってしまったようにおもいます．そのことによって，最後まで「自分の頭で考え，手をつかって試行錯誤をする」ことの必要性に気がつかなかった受講者をだしてしまったことが残念です．このような受講者を出さないために，もっときめ細かく，厳しく指導する方法を考え出す必要がある，と感じました．

質問： いつもこの欄で 0 点しかとれない気がするんですけど，仮に全部 0 点だったら単位はきびしいですか．

お答え： 最終レポートの出来によっては大丈夫です．なお，前回は 1 点（2 点で「誤字または不必要なひらがな」で 1 点減点）でしたね．

質問： 毎週，ぼう大（原文ママ）な量の課題に目を通してそれぞれに返答をしてすごいと思います．他の仕事もあって忙がしい（原文ママ）と思うのですが，どうやって時間を見つけるのですか．趣味的なことはまったくやっていないのですか．

お答え： 時間はそれほどかかりません．約半日．Web ページをご覧いただければ，山田の趣味の一つが「学生いぢめ」であることがわかるので...

質問： 今回この授業では問題作成，指導についてやっていますが，これは一度見ておいた方が良いという参

考書等があったら教えてもらいたいです．

お答え： 系統的に勉強していないので，わかりません．むしろ中学生や高校生の時に読んだ数学に関する書物が役に立っているように思います．これはおもしろいかな：森毅「数学受験術指南」（中公新書）

■その他

質問： 大学では点の位置を $\mathrm{P} = (x, y, z)$ に対して，中高では $\mathrm{P}(x, y, z)$ と書くのはどうしてですか？

お答え： 前回の講義資料 9 ページ．

質問： 「$1 = -1$」が成り立つ他にもパラドックスの例を教えてください．とてもおもしろかったので．

お答え： 前回も複数の方からそのようなご意見をいただきましたね．いくつか本があると思うので探してみたらどうでしょうか．時間があれば今回も出るかもしれません．

質問： 前期のある授業のブレイクタイムで，「$89° = 90°$ の証明」というのがありました（後略：ご本人から「上の問題 は 2 年生が来年度の授業でまたやるネタかもしれないので手順のところだけでも省いてもらえるとありがたいです」とのことですので，面倒くさいので全部省略します）

お答え： 式だけで証明することができるのでしょうか，という問いですが，下品だけど座標をとればできます，とお答えしておきます．

質問： 「アキレスと亀」のパラドックスを中学生や高校生紹介したら，とても不思議がって興味を持つと思うのですが，「どうして？」と聞かれるとどう答えたらよいか分かりません．大学で実数の連続性などいろいろしましたが，先生なら中高生にどのように説明しますか．

お答え： キーは「無限個の数の和が有限になることがある」ということですよね．例として「羊羹の三等分」というネタはよく使いますが．

質問： これまで学生から提出された問題で，一番良い問題だと思った問題はどのようなものですか？

お答え： どんぐりの背比べ．

質問： 先生はこの授業を通して，正直なところ，私たちに数学の指導者としての可能性を感じましたか？

お答え： 80 人の集団相手にそういうことを感じること自体が無理なのでは？個人個人についての論評ならできますが．

質問： 日本の教育界の問題点（たとえばシステムや教員の質など）はどこにあると思いますか．また，それに対する対応策がありましたら教えてください．

お答え： 「勉強は嫌なことである」「勉強は将来役にたたない」という意識が国民の間に蔓延していること．対策：大人がもっと勉強すること．

質問： トラップを仕掛ける時はどんな時ですか．

お答え： うさぎをとるときなどです．