2009 年 4 月 20 日 (2009 年 5 月 11 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学 I 講義資料 2

お知らせ

- 4 月 27 日，5 月 4 日はお休み．次回は 5 月 11 日からになります．
- 提出物の締切は 4 月 24 日（木曜日）17 時（通常どおり）です．
- 提出物（答案）は文章にしてください．採点者に意味が伝わらない答案は書かれていないのと同じです．
- 提出物（答案）で用いる記号は，原則として講義で用いたものに合わせて下さい．数学の記号は文脈を外れて「万民に共通」なものではありません．
- 提出物の裏面（質問，誤りの指摘）も成績評価対象です．

授業に関する御意見

- 21 世紀の微分幾何の展望についての話を少しでも聞きたいです．
  山田のコメント： それは講義の外かな．カルチャー・スクールではないので，手と頭を自分で動かしてもらうことの方を重視します．山田は古くさい数学が好きですし...
- あまりマニアックになりすぎないでほしいです．
  山田のコメント： 先端科目ですから...

質問と回答

質問： Christoffel の記号を利用することの意味は何かあるのでしょうか．

お答え： いちいち $\frac{1}{2}\sum g^{kl}(g_{il,j}+g_{lj,i}-g_{ij,l})$ と書くより楽．

質問： ガウス曲率は座標のとり方によらないんでしょうか．

お答え： 曲面の教科書を見てごらんなさい．3 年生の幾何学 B でやりましたよね．

質問： 絶対値とそえ字の区別がつかなくて悩みました．

お答え： 心の目で見る．大抵の場合，文脈でわかるはずです．

質問： $E=f^*g_{11}$，$F=f^*g_{12}$，$G=f^*g_{22}$ としてある本もありますが，細かいところは気にせずに授業を受けた方が幸せでしょうか．

お答え： いろいろと「翻訳」できた方がよいですね．ご質問の記号 g_{ij} の意味がよくわかりませんが，$(f^*g)_{ij}$ では？すなわち，ユークリッド空間の標準計量 g の f による引き戻し f^*g の (i,j)-成分．

質問： ワインガルテン方程式の係数に $-$ がつくのはなぜですか．

お答え： そのように定義したからです．これは習慣で，逆の符号にする人もいます．

質問： 3 次元以上の空間に対しても，特定の量や形式などからその空間を決定できるような気がしますが，実際はどうでしょうか．

お答え： ちょっと曖昧ですね．高次元でも曲面に類似の理論を作ることができます．

2 球面と双曲空間

2.1 双曲空間

2.1.1 ミンコフスキー空間の双曲面

L^4：符号 $(-,+,+,+)$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つミンコフスキー空間：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad \boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3).$$

H^3：L^4 の「二葉双曲面」の上半分：

$$H^3 = \{p \in L^4 \mid \langle p, p \rangle = -1, p_0 > 0\} \qquad \bigl(\boldsymbol{x} = (p_0, p_1, p_2, p_3)\bigr).$$

事実 2.1. H^3 は L^4 の滑らかで連結かつ単連結な部分多様体である．とくに

$$T_pH^3 = \{\boldsymbol{v} \in L^4 \mid \langle p, \boldsymbol{v} \rangle = 0\} = p^{\perp}$$

事実 2.2. 各 $p \in H^3$ に対して，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の T_pH^3 への制限は正定値．したがって H^3 は $\langle\ ,\ \rangle$ から定まる計量により，リーマン多様体になる．D をこの計量に関する標準接続とすると，

$$D_XY = d_XY - \langle X, Y \rangle\, p = dY(X) + \langle d_XY, p \rangle\, p \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

である．ただし d はアフィン空間 L^4 の標準接続，すなわち d_XY はベクトル場 Y の X 方向の方向微分である．これを用いて

H^3 の断面曲率は -1.

$$TH^3 = \{(p, \nu) | \, \langle p, \nu \rangle = 0, \langle p, p \rangle = -1, p_0 > 0\} \in L^4 \times L^4,$$
$$T_1H^3 = \{(p, \nu) | \, \langle p, \nu \rangle = 0, \langle \nu, \nu \rangle = 1, \langle p, p \rangle = -1, p_0 > 0\} \in L^4 \times L^4.$$

事実 2.3. 点 $p \in H^3$ において速度 $\boldsymbol{v} \in T_pH^3$ $(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 1)$ をもつ H^3 の測地線は弧長径数を用いて

$$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(s) := (\cosh s)p + (\sinh s)\boldsymbol{v}$$

で表示される．とくに，任意の測地線は $\boldsymbol{R}$ 全体で定義されるから H^3 は完備である．

以上より，

H^3 は単連結かつ連結な完備リーマン多様体である．

定義 2.4. H^3 を 3 次元双曲空間とよぶ

2009 年 4 月 20 日 (2009 年 5 月 11 日訂正)

2.1.2　等長変換

定義 2.5.

$$\mathrm{O}(3,1)=\{a\in \mathrm{M}(4)\,|\,{}^t aYa=Y.\}\qquad \mathrm{SO}(3,1)=\{a\in \mathrm{O}(3,1)\,|\,\det a=1\}\qquad \mathrm{SO}_+(3,1)=\{a\in \mathrm{SO}(3,1)\,|\,a_{00}>0\}$$

$$\left(Y=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

事実 2.6. **1** $\mathrm{O}(3,1)$ は L^4 に線形かつ等長的に作用する．逆に L^4 の等長的な線形変換 $\in \mathrm{O}(3,1)$.

2 $\mathrm{SO}_+(3,1)$ は $\mathrm{O}(3,1)$ の単位元を含む連結成分である．

3 $\mathrm{SO}_+(3,1)$ の L^4 への作用は H^3 を保つ．

4 $\mathrm{SO}_+(3,1)$ は H^3 の向きを保つ等長変換全体がなす群である．

2.1.3　理想境界

定義 2.7. $\boldsymbol{v}\in L^4$ が零的（null）であるとは，$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=0$ となることである．さらに

$$LC=\{\boldsymbol{v}\in L^4\,|\,\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=0\}$$
$$LC_+=\{\boldsymbol{v}=(v_0,v_1,v_2,v_3)\in L^4\,|\,v_0>0\}$$

補題 2.8. $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}\in LC_+$ が $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=0$ を満たすならば $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{w}$ をみたす $c\in \boldsymbol{R}_+$ が存在する．

補題 2.9. $p\in H^3$, $\boldsymbol{v}=T_pH^3$, $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=1$ ならば $p+\boldsymbol{v}\in LC_+$.

定義 2.10. 弧長により径数づけられた 2 つの測地線 γ_1, γ_2 が**漸近的**であるとは

$$\{d\big(\gamma_1(s),\gamma_2(s)\big)\,|\,s>0\}$$

が上に有界となることである．このとき $\gamma_1\sim\gamma_2$ と書く．

測地線の漸近類を H^3 の理想境界という：

$$\partial H^3=\{H^3 \text{ の測地線 }\}/\sim$$

補題 2.11. 測地線 $\gamma_{p,\boldsymbol{v}}$ と $\gamma_{q,\boldsymbol{w}}$ が漸近的であるための必要十分条件は $\langle p+v,q+\boldsymbol{w}\rangle=0$ となることである．

したがって

$$\partial H^3=LC_+/\boldsymbol{R}_+$$

である．$\boldsymbol{v}\in LC_+$ なら $v_0^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2$ であるから，

$$\begin{aligned}LC_+\ni(v_0,v_1,v_2,v_3)&\mapsto\left(\frac{v_1}{v_0},\frac{v_2}{v_0},\frac{v_3}{v_0}\right)\in S^2\\&\mapsto\frac{v_1+iv_2}{v_0-v_3}\in\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\end{aligned}$$

となるが，この写像が誘導する対応 $LC_+/\boldsymbol{R}_+\to\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ は全単射

$$\iota\colon\partial H^3\longrightarrow\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\tag{2.1}$$

をあたえる．

問題

1 点 $p \in H^3$ における接空間 T_pH^3 に L^4 の内積を制限すると，それは正値になることを示しなさい．

2 H^3 の 2 点 p, q を結ぶ測地線（完備性から唯一存在するはず）を具体的に表し，それを用いて，2 点 p, q の距離（2 点を結ぶ測地線の長さ）が

$$d(p,q) = \cosh^{-1}(-\langle p, q\rangle)$$

であることを示しなさい．（もちろん $\langle p, q\rangle \leqq -1$ であることを示しておく必要がある．）

3 球面の測地線の表示を与え，それを用いて球面の 2 点の距離の公式を作りなさい．

4 補題 2.11 を示しなさい．

5 正の定数 c に対して

$$H^3(-c^2) := \{p \in L^4 \mid \langle p, p\rangle = -c^{-2}\}$$

とする（これは曲率 $-c^2$ の双曲空間である）．この空間の測地線はどのような形に表されるか（厳密な証明は必要ない）．