2009 年 5 月 11 日 (2007 年 5 月 18 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

**微分幾何学 I 講義資料 3**

## お知らせ

- Web ページ公開が遅れています．申し訳ありません．
- 整理の都合がありますので，提出物の提出期限は守って下さい．

## 前回までのコメント

- 「球面上の 2 点間の距離の公式」と言われたら，2 点のデータ（座標や位置ベクトル）が与えられたら，それから距離を（原理的に）計算できるものでなくてはなりません．双曲空間上の 2 点間の距離の公式が講義資料に与えられているので，そのアナロジーとして公式を書いて欲しかったのですが．

## 前回までの訂正

- 講義資料 2，3 ページ下から 10 行目：$\langle p+v, q+\boldsymbol{w}\rangle \Rightarrow \langle p+\boldsymbol{v}, q+\boldsymbol{w}\rangle$
- 講義資料 2，3 ページ，定義 2.5：$\mathrm{M}(3,1) \Rightarrow \mathrm{M}(4)$

## 授業に関する御意見

- 今日やった事で何か良い参考書は無いですか？どうにも難しいです．
- 講義内容に関するおすすめ参考文献を講義資料に書いてくださると助かります．
  **山田のコメント：** あまりないんです．

## 質問と回答

**質問：** $H^1$ や $H^2$，$H^n$ $(n \geqq 4)$ も定義できそうですが，$H^3$ から始めた理由はあるのでしょうか？

**お答え：** その中の曲面を扱いたいからです．もちろん一般の $H^n$ は定義できます．

**質問：** 学部の頃に内積の定義として

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \geqq 0, \qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

というのがあったのですが，講義ででてくる内積は条件を完全無視しています．いままでの内積とは別物と考えるべきでしょうか．

**お答え：** 「非退化性」の条件がありますので，「完全無視」はしていません．ご質問の条件をすこし「弱く」した条件です．

**質問：** $L^4$, $H^3$ など今回でてきたもの意外に授業で言っていた変な内積を用いる空間はありますか？

**お答え：** あります.

**質問：** X: Simply connected $\Leftrightarrow$ X: 1-connected $\Leftrightarrow$ $\pi_i(X) = 0$ for $0 \leqq i \leqq 1$ のように定義される方が多かったです．この定義にしたがうと simply connected $\Rightarrow$ path connected $\Rightarrow$ connected となります.

**お答え：** そうですね.

**質問：** $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_0, w_1, w_2, w_3) \in \boldsymbol{R}^4$ に対して $\langle v, w \rangle = -v_0w_0 - v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ のように内積を定めた空間はおもしろい幾何学が展開できますか.

**お答え：** できます．といいますか，符号毎にさまざまな現象がおきます．ちなみに，宇宙のモデルの一種である「反ド・ジッター空間」は $\boldsymbol{R}^5$ に符号 $(--+++)$ の内積を与えた空間の部分多様体として実現されます.

**質問：** cosh, sinh は山田先生が授業でおっしゃっていたように，それぞれ，コッシュ，シンシュと読むのですか？

**お答え：** 良い習慣ではない，と聞いたこともあります.

**質問：** 心の目で見るとは感覚としてとらえることなのでしょうか．あるいは鍛えればしっかりと見えてくるのでしょうか.

**お答え：** 言葉の表す意味を文脈からきちんととらえること.

# 3 球面と双曲空間

## 3.1 双曲空間 (続き)

### 3.1.1 復習

$L^4$：符号 $(-,+,+,+)$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つミンコフスキー空間とするとき,

$$H^3 = \{p \in L^4 \mid \langle p, p\rangle = -1, p_0 > 0\} \qquad \bigl(\boldsymbol{x} = (p_0, p_1, p_2, p_3)\bigr).$$

を **3 次元双曲空間**という．$p \in H^3$ に対して

$$T_pH^3 = \{\boldsymbol{v} \in L^4 \mid \langle p, \boldsymbol{v}\rangle = 0\} = p^\perp$$

である．$\langle\ ,\ \rangle$ を接空間に制限することにより $H^3$ にはリーマン計量が与えられ，断面曲率 $-1$ の完備リーマン多様体となる．

点 $p \in H^3$ において速度 $\boldsymbol{v} \in T_pH^3$ $(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 1)$ をもつ $H^3$ の測地線は弧長径数を用いて

$$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(s) := (\cosh s)p + (\sinh s)\boldsymbol{v}$$

で表示される．

### 3.1.2 等長変換

**定義 3.1.**

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(3,1) &= \left\{a \in \mathrm{M}(4, \boldsymbol{R}) \,\middle|\, {}^t aYa = Y.\right\} \\ \mathrm{SO}(3,1) &= \{a \in \mathrm{O}(3,1) \mid \det a = 1\} \\ \mathrm{SO}_+(3,1) &= \{a \in \mathrm{SO}(3,1) \mid a_{00} > 0\} \end{aligned} \qquad \left(Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

**事実 3.2.** **1** $\mathrm{O}(3,1)$ は $L^4$ に線形かつ等長的に作用する．逆に $L^4$ の等長的な線形変換 $\in \mathrm{O}(3,1)$.

**2** $\mathrm{SO}_+(3,1)$ は $\mathrm{O}(3,1)$ の単位元を含む連結成分である．

**3** $\mathrm{SO}_+(3,1)$ の $L^4$ への作用は $H^3$ を保つ．

**4** $\mathrm{SO}_+(3,1)$ は $H^3$ の向きを保つ等長変換全体がなす群である．

### 3.1.3 理想境界

**定義 3.3.** $\boldsymbol{v} \in L^4$ が零的（null）であるとは，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ となることである．さらに

$$\begin{aligned} LC &= \{\boldsymbol{v} \in L^4 \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0\} \\ LC_+ &= \{\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in L^4 \mid v_0 > 0\} \end{aligned}$$

**補題 3.4.** $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in LC_+$ が $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$ を満たすならば $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{w}$ をみたす $c \in \boldsymbol{R}_+$ が存在する．

**補題 3.5.** $p \in H^3$, $\boldsymbol{v} = T_pH^3$, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 1$ ならば $p + \boldsymbol{v} \in LC_+$.

---

2009 年 5 月 11 日 (2007 年 5 月 18 日訂正)

**定義 3.6.** 弧長により径数づけられた 2 つの測地線 $\gamma_1$, $\gamma_2$ が**漸近的**であるとは

$$\bigl\{d\bigl(\gamma_1(s), \gamma_2(s)\bigr) \,|\, s > 0\bigr\}$$

が上に有界となることである．このとき $\gamma_1 \sim \gamma_2$ と書く．

測地線の漸近類を $H^3$ の理想境界という：

$$\partial H^3 = \{H^3 \text{ の測地線}\}/\sim$$

**補題 3.7.** 測地線 $\gamma_{p,\boldsymbol{v}}$ と $\gamma_{q,\boldsymbol{w}}$ が漸近的であるための必要十分条件は $\langle p + \boldsymbol{v}, q + \boldsymbol{w}\rangle = 0$ となることである．

したがって

$$\partial H^3 = LC_+/\boldsymbol{R}_+$$

である．$\boldsymbol{v} \in LC_+$ なら $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ であるから，

$$\begin{aligned} LC_+ \ni (v_0, v_1, v_2, v_3) &\mapsto \left(\frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}, \frac{v_3}{v_0}\right) \in S^2 \\ &\mapsto \frac{v_1 + iv_2}{v_0 - v_3} \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

となるが，この写像が誘導する対応 $LC_+/\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ は全単射

$$\iota\colon \partial H^3 \longrightarrow \boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \tag{3.1}$$

をあたえる．

## 3.2 $2 \times 2$ 行列での表示

### 3.2.1 エルミート行列での表示

2 次エルミート行列全体の集合を Herm(2) と書く．Herm(2) と $L^4$ を次のように 1 対 1 に対応づける：

$$L^4 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2).$$

すると，$L^4$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は次の行列に対応する：

$$\sigma_0 = \mathrm{id}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

### 3.2.2 余因子行列と内積

**定義 3.8.** 2 次行列 $X$ に対して，その余因子行列を $\widetilde{X}$ と書く：

$$\widetilde{X} = \operatorname{tr} X \,\mathrm{id} - X.$$

**補題 3.9.** **1** 対応 $X \mapsto \widetilde{X}$ は線形．

**2** $\widetilde{XY} = \widetilde{Y}\widetilde{X}$.

**3** $\widetilde{X}X = \det X \,\mathrm{id}$.

**事実 3.10.** Herm(2) を $L^4$ と同一視するとき

$$\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \widetilde{X}Y, \qquad \langle X, X\rangle = -\det X.$$

#### 3.2.3 等長変換群

行列 $a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ に対して

$$\tau_a\colon \mathrm{Herm}(2) \ni X \longmapsto aXa^* \in \mathrm{Herm}(2) \qquad (a^* = {}^t\bar{a})$$

は $\mathrm{Herm}(2) = L^4$ の等長変換をあたえている．したがって，対応する $\mu_a \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ がただ一つ存在する．すなわち，準同型

$$\mu\colon \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) \ni a \longmapsto \mu_a \in \mathrm{SO}_+(3,1)$$

が得られる．

**事実 3.11.** $\mathrm{Ker}\,\mu = \{\pm\mathrm{id}\}$.

したがって

$$\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C}) = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\{\pm\mathrm{id}\} \text{ と } \mathrm{SO}_+(3,1) \text{ は同型である．}$$

#### 3.2.4 双曲空間の対称空間としての表示

**事実 3.12.** いままでの同一視の下，

$$\begin{aligned} H^3 &= \{X \in \mathrm{Herm}(2) \,|\, \det X = 1 \ \mathrm{tr}\, X > 0\} \\ &= \{aa^* \,|\, a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})\} \\ &= \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\,\mathrm{SU}(2) \end{aligned}$$

である．

とくに，$\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C})$ は $H^3$ の向きを保つ等長変換がなす群である．

#### 3.2.5 等長変換の理想境界への作用

**事実 3.13.** 写像 $\iota$ (式 (3.1)) による同一視の下，$a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ があたえる $H^3$ の等長変換は

$$\partial H^3 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \ni \zeta \longmapsto a \star \zeta = \frac{a_{11}\zeta + a_{12}}{a_{21}\zeta + a_{22}} \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

のようにして，理想境界にメビウス変換として作用する．

### 3.3 単位球モデルと上半空間モデル

次の二つのリーマン多様体は，いずれも双曲空間（と等長的）である：

$$\begin{aligned} (D, ds_D^2) : D = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, |X| < 1\}, \quad ds_D^2 &= \frac{4}{(1 - |X|^2)^2}(dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2) \\ (H, ds_H^2) : H = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, X_3 > 0\}, \quad ds_H^2 &= \frac{1}{X_3^2}(dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2). \end{aligned}$$

実際，

$$\begin{aligned} \pi_D\colon H^3 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \frac{1}{1 - x_0}(x_1, x_2, x_3) \in D \\ \pi_H\colon H^3 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \frac{1}{x_3 - x_0}(x_1, x_2, 1) \in H \end{aligned}$$

は等長写像をあたえている.

## 問題

**1** 行列 $A\in \mathrm{SO}_+(3,1)$ を列ベクトルに分解して $A=(\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ とすると,

$$\langle \boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j\rangle=\eta_{ij}=\begin{cases}-1 & (i=j=0)\\ \ \ 1 & (i=j\geqq 1)\\ \ \ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

となることを示しなさい.

**2** 単位球面 $S^3$ に対して, 事実 3.2 に対応する命題を書きなさい.

**3** 補題 3.7 を示しなさい.

**4** 事実 3.11 を示しなさい.

**5** 事実 3.13 を示しなさい.

**6** 双曲空間で, 二つの測地線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ が漸近的であるとき, それらを単位球モデルで表した曲線

$$\pi_D\circ\gamma_1(t),\qquad \pi_D\circ\gamma_2(t)$$

は, $t\to\infty$ とするときに $S^2=\partial D$ 上の同一の点に収束することを示しなさい. 上半空間の場合はどうか.