2009 年 5 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学 I 講義資料 4

お知らせ

- サーバクラッシュのため，web ページ公開停止中です．5 月中には何とかしたいと思います．

前回までのコメント

- ミンコフスキー空間の 2 点の距離は，内積を使ってはかることはできません．実際，$\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0$ でも $P = Q$ であると結論づけることはできません．測地線の漸近条件の問題では，双曲空間の 2 点間の距離の公式を利用する必要があります．
- 「測地線の漸近類」は「測地線の同値類」の誤り，というご指摘がありましたが，ここで与えた「同値関係」は二つの測地線が「漸近する」ということでしたので「漸近類」という言葉を用いています．

前回までの訂正

- 講義資料 3，3 ページ，定義 3.1 （前回と同じエラー）：$\mathrm{M}(3,1) \Rightarrow \mathrm{M}(4, \boldsymbol{R})$.
- 講義資料 3，5 ページ，6 行目：$\rho_a \Rightarrow \mu_a$
- 講義資料 3，6 ページ，問題 1：

$$A = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0) \quad \Rightarrow \quad A = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$$

授業に関する御意見

- 手で計算すると大変ですね（問題 4）
  山田のコメント： もう少しうまくやることができます．
- 問題が難しすぎるので，ヒントを載せてください．
  山田のコメント： 検討します．
- 毎回の課題の解答が欲しいです．
  山田のコメント： 必要なら聞いてください．その際，どこまで考えたのかをお知らせ下さい．あるいは，受講者で協力して解答を作る，っていうのもおもしろいと思います．

質問と回答

質問： $\partial H_3 = LC_+/\boldsymbol{R}_+$ と商集合をとるということが理解し難いです．$\partial H^3 = \{X \in L^4 \,|\, X \in LC_+, (X,X) = 1$ ユークリッド内積$\}$ としたらいけないんでしょうか？

お答え： そうしても集合としては特定できますし，$X = (X_0, X_1, X_2, X_3)$, $(X_0 = 1)$ としてもよいのですが，この条件がローレンツ変換（等長変換）で不変になりません．したがって「幾何学的に定義された」とは言い難くなります．

質問： ∂H^3 を $\{$ 測地線全体 $\}$ の商集合と定義するより「$\langle X, X\rangle = 0$，第 0 成分 > 0」をみたすベクトルを無限遠方にのばした点の集合と考えて，$LC_+/\boldsymbol{R}_+$ と表した方が理解しやすいような気がします．そうすれば「$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}$ と $\gamma_{q,\boldsymbol{w}}$ が ∂H^3 で交わる」 $\Leftrightarrow$ 「$p + \boldsymbol{v} /\!/ q + \boldsymbol{w}$」といえますし，直観的っぽいです．

お答え： それも一つのやり方です．実際に使う場合は，それらすべての性質がいろいろとからみあっているので，一つの定義を知っていてもだめで，複数の同値な条件や解釈を知っている必要があります．

質問： 双曲平面の距離を保つ図の書き方を教えて下さい．

お答え： ご質問の意味にもよりますが，平面上に距離をたもって書く，という意味なら，できません．

質問： H^3 の測地線はふちにいくほど距離が無限大になるということは（山田注：ポアンカレモデルで理想境界の「異なる点」に向かう 2 本の測地線が書いてある）この 2 点の距離も無限大でいいのでしょうか．

お答え： いいのです．

質問： 双曲空間を視覚化する方法で，立体射影を用いない方法はありますか．

お答え： 「双曲空間のクラインモデル」というキーワードで調べてご覧なさい．

4 球面と双曲空間

4.1 双曲空間 (続き)

4.2 2×2 行列での表示

4.2.1 エルミート行列での表示

2 次エルミート行列全体の集合を $\mathrm{Herm}(2)$ と書く．$\mathrm{Herm}(2)$ と L^4 を次のように 1 対 1 に対応づける：

$$L^4 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2).$$

すると，L^4 の標準基底 $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は次の行列に対応する：

$$\sigma_0 = \mathrm{id}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

4.2.2 余因子行列と内積

定義 4.1. 2 次行列 X に対して，その余因子行列を $\widetilde{X}$ と書く：

$$\widetilde{X} = \operatorname{tr} X \,\mathrm{id} - X.$$

補題 4.2.
- 対応 $X \mapsto \widetilde{X}$ は線形.
- $\widetilde{XY} = \widetilde{Y}\widetilde{X}$.
- $\widetilde{X}X = \det X \,\mathrm{id}$.

事実 4.3. $\mathrm{Herm}(2)$ を L^4 と同一視するとき

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \widetilde{X}Y, \qquad \langle X, X \rangle = -\det X.$$

4.2.3 等長変換群

行列 $a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ に対して

$$\tau_a \colon \mathrm{Herm}(2) \ni X \longmapsto aXa^* \in \mathrm{Herm}(2) \qquad (a^* = {}^t\bar{a})$$

は $\mathrm{Herm}(2) = L^4$ の等長変換をあたえている．したがって，対応する $\mu_a \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ がただ一つ存在する．すなわち，準同型

$$\mu \colon \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) \ni a \longmapsto \mu_a \in \mathrm{SO}_+(3,1)$$

が得られる．

事実 4.4. $\operatorname{Ker} \mu = \{\pm \mathrm{id}\}$.

したがって

$$\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C}) = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\{\pm \mathrm{id}\} \text{ と } \mathrm{SO}_+(3,1) \text{ は同型である．}$$

2009 年 5 月 18 日

4.2.4 双曲空間の対称空間としての表示

事実 4.5. いままでの同一視の下,

$$\begin{aligned} H^3 &= \{X \in \mathrm{Herm}(2) \mid \det X = 1, \operatorname{tr} X > 0\} \\ &= \{aa^* \mid a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})\} \\ &= \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) / \mathrm{SU}(2) \end{aligned}$$

である.

とくに, $\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C})$ は H^3 の向きを保つ等長変換がなす群である.

4.2.5 等長変換の理想境界への作用

事実 4.6. 写像 ι (講義資料 3 の式 (3.1)) による同一視の下, $a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ があたえる H^3 の等長変換は

$$\partial H^3 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \ni \zeta \longmapsto a \star \zeta = \frac{a_{11}\zeta + a_{12}}{a_{21}\zeta + a_{22}} \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

のようにして, 理想境界にメビウス変換として作用する.

4.3 単位球モデルと上半空間モデル

次の二つのリーマン多様体は, いずれも双曲空間（と等長的）である：

$$\begin{aligned} &(D, ds_D^2) : D = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid |X| < 1\}, \quad ds_D^2 = \frac{4}{(1 - |X|^2)^2}(dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2) \\ &(H, ds_H^2) : H = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid X_3 > 0\}, \quad ds_H^2 = \frac{1}{X_3^2}(dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2). \end{aligned}$$

実際, 次は等長な全単射をあたえている.

$$\begin{aligned} \pi_D &\colon H^3 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{1}{1 + x_0}(x_1, x_2, x_3) \in D \\ \pi_H &\colon H^3 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{1}{x_0 - x_3}(x_1, x_2, 1) \in H \end{aligned}$$

問題

1 事実 4.5 の等式

$$\{X \in \mathrm{Herm}(2) \mid \det X = 1, \operatorname{tr} X > 0\} = \{aa^* \mid a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})\}$$

を示しなさい.

2 事実 4.6 を示しなさい.

3 双曲空間で, 二つの測地線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ が漸近的であるとき, それらを単位球モデルで表した曲線

$$\pi_D \circ \gamma_1(t), \qquad \pi_D \circ \gamma_2(t)$$

は, $t \to \infty$ とするときに $S^2 = \partial D$ 上の同一の点に収束することを示しなさい. 上半空間の場合はどうか.