2009 年 5 月 25 日 (2009 年 6 月 8 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学 I 講義資料 5

前回までのコメント

- 問題 1 について：「エルミート行列はユニタリ行列で対角化できる」ということから，エルミート行列 X に対して $q^{-1}Xq =$ 対角行列 となる $q \in \mathrm{SU}(2)$ が存在する，という結論に至っているかたがいらっしゃいましたが，「」内の命題から形式的にでてくるのは $q \in \mathrm{U}(2)$ であって $\mathrm{SU}(2)$ とできることをいわなければなりません．

前回までの訂正

- 講義資料 4，3 ページ，下から 6 行目：準同型 ⇒ 全射準同型
  山田注：ここで定義した μ が全射であることを示しておく必要がありますね．演習問題ですが. . .
- 講義資料 4, 4 ページ事実 4.6: 式 (??) ⇒ 講義資料 3 の式 (3.1)
- 講義資料 4，4 ページ下から 11 行目（π_D の定義式の右辺）：

$$\frac{1}{1-x_0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{1+x_0}$$

- 講義資料 4，4 ページ下から 10 行目（π_H の定義式の右辺）：

$$\frac{1}{x_3-x_0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x_0-x_3}$$

授業に関する御意見

- 授業についていけるか不安です
  山田のコメント： 大丈夫です.
- 行列（特に複素）にいまだ慣れていなかたので，ユニタリ行列やエルミート放列の性質を確認する良い機会になりました.（本当は学部のときに身につけるべきだったのですが. . .）
  山田のコメント： しかし，なかなか授業でも扱いませんね.

質問と回答

質問： H^3 の理想境界を ∂H^3 と書きましたが，これは多様体の境界とはまったく別物と考えてよいですか.

お答え： 別物です．H^3 はあくまで境界をもたない多様体です.

質問： この講義はリー群の知識を前提としていますか？

お答え： していません．行列で表される群以外はでてきませんので.「$\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$」など「単なる記号」はたくさん出てきますが，それは単なる記号で，個別の定義を知っていればよいです.

質問： 事実 4.6 等をみると，理想境界と H^3 別々に分けて（原文ママ）等長変換をしていますが，もう少し統一的に扱えないでしょうか？

お答え： わけていますか？形式的にはそう見えるかもしれませんが，証明を見ると統一的にあつかっているように見えてきませんか？ D や H で見るともう少し「視覚的」になるかもしれませんね.

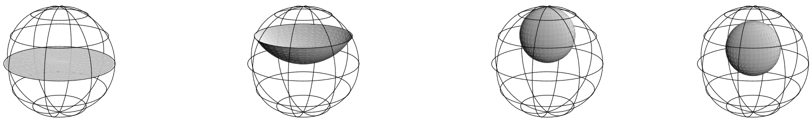
質問： $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ が $\mathrm{SO}_+(3,1)$ の double covering であることから向きと関連して使うこともあるんですか？

お答え： はい．単連結ということを積極的に使うこともあります.

5　双曲空間の曲面

5.1　目標

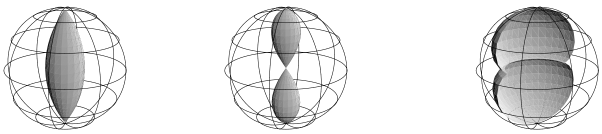
この講義では，双曲空間や球面（おもに双曲空間）の曲面の理論を紹介する．とくに，図 1 や 2 にあるような曲面の背後にある物語を語ることを目標としたい．その中で，空間型の部分多用体の基礎理論，計算テクニックなどを身につけてほしい．



$H=0$, $K=-1$ 極小（双曲平面）　$0<|H|<1$, $-1<K<0$　$|H|=1$, $K=0$ ホロ球面　$|H|>1$, $K>0$

図 1　全臍的な曲面；H は平均曲率，K はガウス曲率

カテノイド・カズン ($H=1$) (1)　カテノイド・カズン ($H=1$) (2); 半分割り



円柱 ($K=0$)　砂時計 ($K=0$)　雪だるま ($K=0$) 半分割り

図 2　CMC-1 回転面と平坦回転面

5.2　準備

以下，双曲空間 H^3 はミンコフスキー空間 L^4 の部分多様体と表されているとし，必要に応じて 2×2 行列による表現を用いることにする．

5.2.1　外積

双曲空間上の点 $p\in H^3$ に対して T_pH^3 は p の L^4 での直交補空間であった．

2009 年 5 月 25 日 (2009 年 6 月 8 日訂正)

補題 5.1. 写像

$$\times\colon T_pH^3 \times T_pH^3 \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \in T_pH^3$$

で次の性質を満たすものがただ一つ存在する．

- $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について双線型,
- $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x}$,
- 任意の $A \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ に対して $(A\boldsymbol{x}) \times (A\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$,
- $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, ただし $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(0,1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t(0,0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,0,0,1)$ は $T_{\boldsymbol{e}_0}H^3$ ($\boldsymbol{e}_0 = {}^t(1,0,0,0)$) のベクトルとみなしている．

証明. 線型写像 $L^4 \ni \boldsymbol{z} \mapsto \det(p, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{R}$ の表現行列を $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ として，$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = Y\,{}^t\alpha$ とすればよい．ただし $Y = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. □

定義 5.2. 補題 5.1 の $\times$ を T_pH^3 の**外積**という．

系 5.3. 双曲空間 H^3 をエルミート行列全体の集合 $\mathrm{Herm}(2)$ の部分多様体と見なすとき，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in T_pH^3$ に対して

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \frac{i}{2}(\boldsymbol{x}p^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}p^{-1}\boldsymbol{x}).$$

5.2.2 双曲空間のリーマン接続

定義 5.4.

- 双曲空間 H^3 の**ベクトル場**とは，なめらかなベクトル値関数

$$X\colon H^3 \ni p \longmapsto X_p \in L^4$$

  で，各 $p \in H^3$ に対して $X_p \in T_pH^3$ となるものである．
- 多様体 M から H^3 へのなめかな写像 $f\colon M \to H^3$ が与えられているとき,「f にそった H^3 のベクトル場」とは，なめらかなベクトル値関数

$$X\colon M \ni q \longmapsto X_q \in L^4$$

  で，各 q に対して $X_q \in T_{f(q)}H^3$ となるものである．

とくに，H^3 のベクトル場は，恒等写像 $\mathrm{id}\colon H^3 \to H^3$ にそった H^3 のベクトル場である．

記号. なめらかな H^3 上の関数全体がなす可換環を $\mathcal{F}(H^3)$，H^3 のベクトル場全体がなす $\mathcal{F}(H^3)$ 加群を $\mathfrak{X}(H^3)$ と表す．

補題 5.5. ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(H^3)$ が与えられたとき，各 $p \in H^3$ に対して

$$(D_XY)_p := (d_XY)_p + \langle X_p, Y_p \rangle\, p$$

と定める．ただし d_XY はベクトル値関数 Y の X 方向の方向微分である．すると D_XY は H^3 上のベクトル場を与える．さらに，次が成り立つ：

- D_XY は X, Y に関して双線型.
- $D_{\varphi X}Y = \varphi D_XY$ ($\varphi \in \mathcal{F}(H^3)$).
- $D_X(\varphi Y) = d\varphi(X)Y + \varphi D_XY$ ($\varphi \in \mathcal{F}(H^3)$).

一般に，補題 5.5 のような性質をもつ対応 $(X,Y)\mapsto D_XY$ を多様体の**線型接続**という．このとき，

補題 5.6. ベクトル場 X_1, X_2 が，$p\in H^3$ 上で $X_{1,p}=X_{2,p}$ を満たしているならば

$$(D_{X_1}Y)_p=(D_{X_2}Y)_p$$

が成り立つ．このことから，$x\in T_pH^3$ とベクトル場 $Y\in\mathfrak{X}(H^3)$ に対して

$$D_{\boldsymbol{x}}Y\in T_pH^3$$

は意味をもつ．

さらに，次が成り立つ．

補題 5.7. ベクトル場 X,Y に対して

- $X\langle Y,Z\rangle=\langle D_XY,Z\rangle+\langle Y,D_XZ\rangle$,
- $D_XY-D_YX=[X,Y]$.

ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は H^3 のリーマン計量，$[\ ,\ ]$ はリー括弧積である．

一般に，リーマン多様体上で補題 5.7 のような性質をもつ線型接続を**リーマン接続**または**レビ・チビタ接続**という．リーマン多様体上にはただ一つリーマン接続が定まる．したがって，ここで定義した D は H^3 上の唯一のリーマン接続である．

定義 5.8. 写像 $f\colon M\to H^3$，M のベクトル場 X と f にそう H^3 のベクトル場 Y に対して

$$(D_XY)_p:=(d_XY)_p+\langle X_p,Y_p\rangle\,p$$

と定める．これは D_XY はまた f にそうベクトル場である．

5.3 ガウス曲率と平均曲率

双曲空間の**曲面**とは，2 次元多様体 M のはめ込み

$$f\colon M\longrightarrow H^3$$

のことである．いま，$X,Y\in T_pM$ に対して $df(X),df(Y)\in T_{f(p)}H^3$ であるから，

$$ds^2(X,Y):=\langle df(X),df(Y)\rangle \tag{5.1}$$

によって T_pM 上の 2 次形式 ds^2 が定まる．p を動かせばこれは M のリーマン計量となり，f の**第一基本形式**と呼ばれる．

以下 M は向き付けられているとする．一方，$X,Y\in T_pM$ が線型独立で，さらに M の向きに同調しているとき，

$$\nu_p:=\frac{df(X)\times df(Y)}{|df(X)\times df(Y)|}$$

とおくと，これは X,Y のとりかたによらない．これは f にそう H^3 のベクトル場とみなせるので，

$$I\!I(X,Y)=-\langle df(X),D_Y\nu\rangle \tag{5.2}$$

により $I\!I\in T_pM\otimes T_pM$ が定まる．

補題 5.9. $I\!I$ は T_pM の対称双線型形式である．

この $I\!I$ を f の**第二基本形式**という．

多様体 M の向きに同調した局所座標 (u,v) をとり，ds^2, $I\!I$ の $\{\partial_u, \partial_v\}$ に関する表現行列をそれぞれ $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ とおくと，

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I}$$

の固有値は座標のとりかたによらない．そこで

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A, \qquad K_{\mathrm{ext}} = \det A$$

を曲面 f の**平均曲率**，**ガウス・クロネッカー曲率**という．

参考文献

[1] 剱持勝衛，曲面論講義—平均曲率一定曲面入門，培風館，2000.

[2] 梅原雅顕・山田光太郎，双曲型空間の平均曲率 1 の曲面の幾何，数学 **47** (1995), 145–157.

[3] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque **154–155** (1987), 321–347.

[4] J. A. Gálvez, A. Martìnez, F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic* 3*-space*, Math. Ann. **316** (2000), 419–435.

[5] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. of Math., **216**, 149–175.

[6] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications, 1969/1986.

問題

1 補題 5.1 の証明を完成させなさい．

2 系 5.3 を確かめなさい．

3 補題 5.5 を確かめなさい．

4 補題 5.9 を確かめなさい．