2009 年 6 月 8 日 (2009 年 6 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学 I 講義資料 6

お知らせ

- 先週は休講掲示が遅れ，ご迷惑をお掛けしました．申し訳ありません．
- 実は来週も休講です．次回は 6 月 22 日となります．

前回までの訂正

- 講義資料 5，3 ページ，下から 4 行目：$L^4 4 \Rightarrow L^4$
- 講義資料 5，4 ページ，下から 10 行目：恒等写像 $\mathrm{id}\dots$ にそう H^3 のベクトル場 $\Rightarrow$ 恒等写像 $\mathrm{id}\dots$ にそった H^3 のベクトル場
  あるいは「沿う」と書いた方がいいかもしれません．“A vector field along the map f” のことです．
- 講義資料 5，4 ページ，下から 9 行目：可群 $\Rightarrow$ 加群 (module のことです)
- 講義資料 5，4 ページ，一番下：$d\varphi(X)$ は $d_X\varphi$ ではないか，というご指摘がありました．関数の微分としては，どちらの記号も使います．ここでは「ベクトル場」ではなく「関数の微分」という気持ちを少しだけ表に出すつもりで $d\varphi(X)$ と書きました．
- 講義資料 5, 5 ページ一番下：

$$\nu_p := \frac{df(X)\times df(Y)}{|df(X)|\,|df(Y)|} \qquad \Rightarrow \qquad \nu_p := \frac{df(X)\times df(Y)}{|df(X)\times df(Y)|}$$

授業に関する御意見

- リーマン接続のところが全く分からずヤバイです．
  山田のコメント： これは「リーマン幾何の概念との関係」を説明したまでで，まぁ，あまり気にしなくても大丈夫です．
- 授業についていけるようにがんばっていきます
  山田のコメント： はい

質問と回答

質問： ガウス曲率とガウス・クロネッカー曲率は本質的には同じなのでしょうか.

お答え： $\boldsymbol{R}^3$ の曲面の場合は同じ．双曲空間や球面の曲面では定数だけの差があります（次回？）

質問： 補題 5.5 の $(D_XY)_p := (d_XY) + \langle X, Y\rangle\, p$ のプラスはマイナスですか？

お答え： プラスです．d_XY の T_pH^3 (位置ベクトル p の直交補空間) への "正射影" を与えるのですが，$\langle p, p\rangle = -1$ (1 ではない) ので，このようになります．

質問： p.3 にある図形はどういうソフトを使って可視化したのですか？

お答え： Mathematica (TM)

質問： Gauss map を拡張して多様体から Grassmannian mfd. への写像が作れますが，Minkowski 空間上でもできると思われますがどうでしょうか.

お答え： できます．ただ，部分空間の符号が一定ではないので，状況は複雑です.

質問： $Y = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ は

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のことですか？

お答え： そうです.

6 ガウス・ワインガルテン方程式

6.1 適合枠

定義 6.1. 2 次元多様体 M から双曲空間 H^3 へのはめこみ（曲面）$f\colon M \to H^3$ が与えられているとき，M の領域 U 上で定義された写像

$$\widetilde{F}\colon U \ni p \longmapsto \widetilde{F}(p) = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \ni \mathrm{SO}_+(3,1)$$

が f の**適合枠** adopted frame であるとは，$f = \boldsymbol{e}_0$, かつ各点 $p \in U$ において $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が $f_* T_p M \subset T_{f(p)} H^3$ の正規直交基底を与えていることである．このとき，定義より $\boldsymbol{e}_3$ は f の単位法線ベクトル場を与えている．

定義 6.2. 向き付けられた多様体 M のはめ込み $f\colon M \to H^3$ に対して M の向きに同調した座標系 (u, v) をとり，

$$\nu := \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$$

と定めたとき，ν を M の**向きに同調する単位法線ベクトル場**という．曲面 f の適合枠 $\widetilde{F} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ が**向きに同調する**とは，$\boldsymbol{e}_3$ が向きに同調する単位法線ベクトル場となることである．

6.2 基本形式の表現行列

曲面 $f\colon M \to H^3$ の第一基本形式を ds^2，第二基本形式を $I\!I$ と書く．M の局所座標系 (u, v) を一つ固定して，ds^2，$I\!I$ の表現行列をそれぞれ $\widehat{I}$，$\widehat{I\!I}$ と書く：

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_v, f_u \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix}, \qquad \widehat{I\!I} = -\begin{pmatrix} \langle f_u, \nu_u \rangle & \langle f_u, \nu_v \rangle \\ \langle f_v, \nu_u \rangle & \langle f_v, \nu_v \rangle \end{pmatrix}.$$

さらに，**第三基本形式**を

$$I\!I\!I(X, Y) := \langle d_X \nu, d_Y \nu \rangle = \langle d\nu(X), d\nu(Y) \rangle$$

で定め，その表現行列を

$$\widehat{I\!I\!I} = \begin{pmatrix} \langle \nu_u, \nu_u \rangle & \langle \nu_u, \nu_v \rangle \\ \langle \nu_v, \nu_u \rangle & \langle \nu_v, \nu_v \rangle \end{pmatrix}$$

と書いておく．

ここで f の適合枠 $\widetilde{F} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ をとると，f_u, f_v は ν に直交する H^3 の接ベクトルであるから $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の線形結合で表される．同様に，ν_u, ν_v も ν に直交する H^3 の接ベクトルであるから $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の線形結合で表される．いま

$$(f_u, f_v) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) T = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} g_u^1 & g_v^1 \\ g_u^2 & g_v^2 \end{pmatrix},$$
$$(\nu_u, \nu_v) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) S = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} h_u^1 & h_v^1 \\ h_u^2 & h_v^2 \end{pmatrix}$$

2009 年 6 月 8 日 (2009 年 6 月 22 日訂正)

とおく．ただし

$$g_u^j = ds^2(\boldsymbol{e}_j, f_u) = \langle \boldsymbol{e}_j, f_u \rangle, \qquad h_u^j = I\!I(\boldsymbol{e}_j, f_u) = -\langle \boldsymbol{e}_j, \nu_u \rangle, \quad \text{etc.}$$

である．

補題 6.3.

$$\widehat{I} = {}^tTT, \qquad \widehat{I\!I} = {}^tST = {}^tTS, \qquad \widehat{I\!I\!I} = {}^tSS.$$

とくに $I\!I$ の対称性より

$$h_u^1 g_v^1 + h_u^2 g_v^2 = h_v^1 g_u^1 + h_v^2 g_u^2$$

が成り立つ．

6.3 ガウス・ワインガルテンの方程式

命題 6.4 (ガウス・ワインガルテンの方程式)**.** 曲面 $f\colon M \to H^3$ に対して M の局所座標近傍 $(U; u, v)$ 上で定義された適合枠 $\widetilde{F} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ は，微分方程式

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u} = \widetilde{F}\widetilde{U}, \qquad \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial v} = \widetilde{F}\widetilde{V}$$

を満たす．ただし

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & g_u^1 & g_u^2 & 0 \\ g_u^1 & 0 & \alpha & h_u^1 \\ g_u^2 & -\alpha & 0 & h_u^2 \\ 0 & -h_u^1 & -h_u^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & g_v^1 & g_v^2 & 0 \\ g_v^1 & 0 & \beta & h_v^1 \\ g_v^2 & -\beta & 0 & h_v^2 \\ 0 & -h_v^1 & -h_v^2 & 0 \end{pmatrix}$$

である．ここで α, β は g_u^j, g_v^j とその微分で表されるある関数で,

$$\omega = \alpha\, du + \beta\, dv$$

は f による誘導接続の**接続形式**という．

問題

1 曲面 $f\colon M \to H^3$ に対して，M の局所座標系 (u, v) が**等温座標系**であるとは，第一基本形式が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \qquad \sigma = \sigma(u, v)$$

と書けることである．このとき,

$$\boldsymbol{e}_0 = f, \qquad \boldsymbol{e}_1 = e^{-\sigma} f_u, \qquad \boldsymbol{e}_2 = e^{-\sigma} f_v, \qquad \boldsymbol{e}_3 = e^{-2\sigma}(f_u \times f_v)$$

とおけば，$\widetilde{F} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ は f の適合枠を与える．このとき，接続形式 $\omega = \alpha\, du + \beta\, dv$ を σ によって表しなさい．