

2009年6月22日(2009年6月29日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学 I 講義資料 7

お知らせ

- 先週は休講によりご迷惑をお掛けしました。

前回までの訂正

- 講義資料 6, 2 ページ, 4 番目の質問: 格調 \Rightarrow 拡張
- 講義資料 6, 3 ページ, 5 行目: $(e_0, e_1, e_2, e_3) \ni \text{SO}_+(3, 1) \Rightarrow (e_0, e_1, e_2, e_3) \in \text{SO}_+(3, 1)$
- 講義資料 6, 4 ページ, 2 行目: $\text{vect}e_j \Rightarrow e_j$
- 講義資料 6, 4 ページ, 補題 6.3: $I, II, III \Rightarrow \widehat{I}, \widehat{II}, \widehat{III}$
- $F = (e_0, \dots, e_3)$ と言ったり $F(p) = (e_0, \dots, e_3)$ と言ったり $F(p) = (e_0(p), \dots, e_3(p))$ と言ったり “ p ” の付け方がいい加減だったようです。いずれにせよ点 p によって値が定まる「関数」です。

授業に関する御意見

- 途中退出してすいません(原文ママ)でした。体調が悪かったもので...
山田のコメント: お大事に

質問と回答

質問: 曲面 f の適合枠 $\tilde{F} = (e_0; e_1, e_2, e_3)$ を考えるときは, 常に $e_3 = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$ となるのでしょうか。

お答え: \pm がつくかもしれません。

質問: 4月13日の課題にも「等温座標系」が出ているのですが, 「等温座標系」を考えることは幾何学的に
はどういうことなのでしょうか?

お答え: $\partial/\partial u, \partial/\partial v$ が互いに直交し, 長さが等しいような座標です。十分小さい $\Delta u, \Delta v$ に対して, $(u, v), (u + \Delta u, v), (u, v + \Delta v), (u + \Delta u, v + \Delta v)$ の4点がほぼ「正方形」に並んでいる, といってもよいでしょう。

質問: 等温座標系の等温という言葉はどういう由来があるのでしょうか。

お答え: 熱の流れと等温線が直交することから来ているようです。

7 ガウス・コダッチ方程式

7.1 曲面の向き

2次元多様体 Σ の2つの局所座標系 $(D; u, v)$, $(\Delta; x, y)$ の向きが同調しているとは, $D \cap \Delta = \emptyset$ であるか, $D \cap \Delta$ 上で

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} > 0$$

となることである.

多様体 Σ が向きづけ可能 orientable であるとは, Σ のアトラス $\mathcal{A} := \{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ で, 各チャートの向きが同調しているものがとれることである. このようなアトラスを Σ の向き orientation という.

例 7.1. 平面 R^2 , 球面 S^2 , トーラス T^2 は向きづけ可能である. 一方, 2次元実射影空間 (射影平面) RP^2 , クラインの壺, メビウスの帯は向きづけ不可能である*1

定義 7.2. 向きづけ可能な多様体 Σ に対して, その向き $\mathcal{A}_1 = \{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ と $\mathcal{A}_2 = \{(\Delta_\beta, \psi_\beta)\}$ が同値であるとは, 各 $(\Delta_\beta, \psi_\beta)$ と任意の $(D_\alpha, \varphi_\alpha)$ の向きが同調していることである.

補題 7.3. 向きづけ可能な多様体 Σ に対して, その向き $\mathcal{A} = \{(D_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ をとる. このとき,

$$\mathcal{A}' := \{(D_\alpha, \tau \circ \varphi_\alpha)\} \quad (\tau(u, v) = (v, u))$$

とすると \mathcal{A}' も Σ の向きで \mathcal{A} と同値でないものを与えている. さらに Σ の任意の向きは \mathcal{A} または \mathcal{A}' と同値である.

7.2 リーマン面

位相空間 Σ 上に開集合 D_α と写像 $\xi_\alpha: D_\alpha \rightarrow C$ の族 $\mathcal{A} = \{(D_\alpha, \xi_\alpha)\}$ が

- $\Sigma = \cup D_\alpha$,
- $\xi_\alpha: D_\alpha \rightarrow C$ は連続な単射
- $\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1}$ は (定義される限り) C の開集合から C の開集合への複素解析関数. (このことから, この関数の微分が消えないこともわかる)

を満たすとき, Σ と \mathcal{A} の組 (あるいは単に Σ) を 1次元複素多様体あるいはリーマン面, ξ_α をその複素座標という.

コーシー・リーマンの方程式より C の領域上の微分が消えない解析関数を R^2 の領域から R^2 への写像とみなしたときのヤコビ行列式は正になるので, リーマン面は向きづけ可能である. とくに, 複素座標はその向きを一つ与えている.

リーマン面 Σ の複素座標 z をとり, $z = u + iv$ と表すと, (u, v) は Σ の (実) 座標系を与えている. ここで,

$$(7.1) \quad dz = du + idv, \quad d\bar{z} = du - idv, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

と定めておく. この記号を用いると

補題 7.4 (コーシー・リーマン). リーマン面 Σ から Σ' への可微分写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ が点 p の近傍で正則であるあるいは複素解析的であるための必要十分条件は, p を含む Σ の複素座標 z と $f(p)$ を含む Σ' の局所座標 w によって写像 f を $w = f(z)$ と表したとき,

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$$

が p の近傍で成り立つことである.

7.3 等温座標系

定義 7.5. 2次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の局所座標系 $(D; u, v)$ が等温座標系 isothermal coordinate system である, とは ds^2 が

$$(7.2) \quad ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \quad (\sigma = \sigma(u, v) \text{ は } (u, v) \text{ のなめらかな関数})$$

の形にかけることである.

補題 7.6. 2次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の等温座標系 $(D; u, v)$ に対して, $D \cap \Delta \neq \emptyset$ となるような座標系 $(\Delta; x, y)$ が等温座標系であるための必要十分条件は

$$x_u = \varepsilon y_v, \quad x_v = -\varepsilon y_u \quad (\varepsilon = 1 \text{ または } -1)$$

が成り立つことである. とくに, これらの座標系の向きが同調しているならば $\varepsilon = +1$ である.

系 7.7. 向きづけられたリーマン多様体 (Σ, ds^2) 上の, 向きに同調した等温座標系 $(D; u, v)$ に対して, 向きに同調した座標系 $(\Delta; x, y)$ が等温座標系であるための必要十分条件は, 写像

$$u + iv \mapsto x + iy$$

が複素解析的となることである.

定理 7.8. 任意の 2次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の各点 p の近傍に等温座標系が存在する.

系 7.9. 任意の向きづけられた 2次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) 上には各複素座標が ds^2 に関する等温座標系となるようなリーマン面の構造を入れることができる.

式 (7.1) の記号を用いれば, 計量 (7.2) を

$$ds^2 = e^{2\sigma} dz d\bar{z} \quad (z = u + iv)$$

と書くことができる.

7.4 等温座標系の下でのガウス・ワインガルテン方程式

以下, 簡単のために Σ は向き付けられているものとする. はめ込み $f: M \rightarrow H^3$ の第一基本形式 ds^2 は Σ 上のリーマン計量を与えているから, これにより Σ に等温座標系を与え, リーマン面とみなすことができる.

リーマン面 Σ の複素座標を $z = u + iv$ と書くと, これが等温座標系であることから, ある関数 $\sigma(u, v)$ が存在して

$$(7.3) \quad ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma} dz d\bar{z} \quad \text{すなわち} \quad \langle f_u, f_u \rangle = \langle f_v, f_v \rangle = e^{2\sigma}, \quad \langle f_u, f_v \rangle = 0$$

が成り立つ. とくに

$$(7.4) \quad \mathcal{F} := (e_0, e_1, e_2, e_3) \quad e_0 = f, \quad e_1 = e^{-\sigma} f_u, \quad e_2 = e^{-\sigma} f_v, \quad e_3 = \nu = e_1 \times e_2$$

は曲面 f の適合枠を与えている. いま, 前回の記号を用いて

$$h_u^j = -\langle e_j, (e_3)_u \rangle, \quad h_v^j = -\langle e_j, (e_3)_v \rangle$$

と表すと, 第二基本形式は

$$(7.5) \quad II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2, \quad L = e^\sigma h_u^1, \quad M = e^\sigma h_v^1 = e^\sigma h_u^2, \quad N = e^\sigma h_v^2$$

となる. さて, 枠 (7.4) に関して, 前回のガウス・ワインガルテン方程式を書き直すと

補題 7.10. 適合枠 (7.4) は, 微分方程式

$$(7.6) \quad \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\tilde{U}, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\tilde{V} \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & e^\sigma & 0 & 0 \\ e^\sigma & 0 & \sigma_v & h_u^1 \\ 0 & -\sigma_v & 0 & h_u^2 \\ 0 & -h_u^1 & -h_u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_u & h_v^1 \\ e^\sigma & \sigma_u & 0 & h_v^2 \\ 0 & -h_v^1 & -h_v^2 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす.

7.5 ガウス・ワインガルテン方程式の 2 次行列による表示

今後の議論のため, 方程式 (7.6) を

- 実 (等温) 座標の代わりに複素座標を用いて,
- $SO_+(3, 1)$ の代わりに $SL(2, C)$ を用いて,

書き換える.

平均曲率と Hopf 微分 曲面 $f: M \rightarrow H^3$ の第一基本形式により M にリーマン面の構造を入れておく. この曲面の第二基本形式 (7.5) は, 記号 (7.1) を用いれば

$$(7.7) \quad II = q dz^2 + \bar{q} d\bar{z}^2 + H ds^2 \quad q = \frac{1}{4}((L - N) - 2iM), \quad H = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L + N)$$

と書くことができる. とくに H は曲面の平均曲率を与えている.

補題 7.11. 式 (7.7) の $q dz^2$ は向きに同調した等温座標系のとりかたによらない.

定義 7.12. 式 (7.5) の q から定まる 2 次形式 $Q = -q dz^2$ を曲面 f の Hopf 微分という*2 .

枠の持ち上げ 3 次元双曲空間 H^3 は 4 次元ミンコフスキー空間 L^4 の超曲面とみなすことができるが, 第 4 回の講義で扱ったように L^4 を

$$L^4 \ni {}^t(x_0, x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \text{Herm}(2)$$

により 2 次エルミート行列全体の集合 $\text{Herm}(2)$ と同一視しておく. とくに L^4 の標準基底は行列

$$(7.8) \quad \varepsilon_0 = \text{id}, \quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対応している*3 . とくに 4.2.3 節に述べたことにより, 準同型

$$\mu: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \ni a \mapsto \mu_a \in \text{SO}_+(3, 1)$$

で $\text{Ker } \mu = \{\pm \text{id}\}$ となるようなものが存在する. とくに, 準同型の作り方から $a \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して

$$(7.9) \quad \text{行列 } \mu_a \text{ の第 } j \text{ 列} = a\varepsilon_j a^* \quad (a^* = {}^t\bar{a})$$

となる.

とくに, 単連結な 2 次元多様体 M 上で定義されたはめ込み $f: M \rightarrow H^3$ の適合枠 \mathcal{F} に対して $\mu \circ \Theta = \mathcal{F}$ となる $\Theta: M \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ がただ 2 つ存在する. これを適合枠 \mathcal{F} の $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ への持ち上げ lift とよぶ.

命題 7.13. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された曲面 $f: D \rightarrow H^3$ の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 II がそれぞれ (7.3), (7.7) のように表されているならば, (7.4) の適合枠 \mathcal{F} の持ち上げ Θ は次の微分方程式を満たす:

$$(7.10) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial u} = \Theta U, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = \Theta V, \\ U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\sigma_v & e^\sigma + h_v^1 + ih_u^2 \\ e^\sigma - h_u^1 + ih_v^2 & i\sigma_v \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\sigma_u & h_v^1 + i(e^\sigma + h_v^2) \\ -h_u^1 - i(e^\sigma - h_v^2) & -i\sigma_u \end{pmatrix}.$$

複素座標 $z = u + iv$ に関する微分 (7.1) を用いれば, これは

$$(7.11) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \Theta Z, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{z}} = \Theta W, \quad Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & e^\sigma(1+H) \\ -2e^{-\sigma}q & -\sigma_z \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_{\bar{z}} & 2e^{-\sigma}\bar{q} \\ e^\sigma(1-H) & \sigma_{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

と同値である.

7.6 積分可能条件

ガウス・ワインガルテン方程式 (7.10) を Θ に関する方程式とみなして, それが解をもつための条件を考えよう:

補題 7.14. 方程式 (7.10) をみたく $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 値関数 Θ が存在するならば

$$(7.12) \quad U_v - V_u - UV + VU = 0 \quad \text{すなわち} \quad Z_{\bar{z}} - W_z + ZW - WZ = 0$$

が成り立つ.

*2 マイナスの符号は個人的な事情である.

*3 講義資料 4 では σ_j を用いたが, 等温座標系の計量に用いてしまったので, この節以降 ε を用いることにする.

証明. 解 Θ が存在したとして $\Theta_{uv} = (\Theta_u)_v = (\Theta U)_v$ と $\Theta_{vu} = (\Theta_v)_u = (\Theta V)_u$ が等しいという式を書き, Θ が正則であることに注意すればよい. □

命題 7.15. 式 (7.12) は次と同値である:

$$(7.13) \quad -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) = (H^2 - 1) - 4e^{-2\sigma}q\bar{q}, \quad \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{2\sigma} \frac{\partial H}{\partial z}.$$

式 (7.13) の第一式をガウス方程式, 第二式をコダッチ方程式 または コダッチ・マイナルディ方程式という.

注意 7.16.

- ガウス方程式 (式 (7.13)) の左辺は, 2次元リーマン多様体 (M, ds^2) の断面曲率 (ガウス曲率) を与えている.

- ガウス方程式 (式 (7.13)) の右辺は

$$e^{-4\sigma}(LN - M^2) - 1 = \frac{\det \hat{II}}{\det \hat{I}} - 1$$

なので「ガウス・クロネッカー曲率」に -1 を加えた値となっている. この “ -1 ” は H^3 の断面曲率である. たとえば R^3 の曲面のガウス方程式にはこの “ -1 ” が現れない.

系 7.17.

- H^3 の平均曲率一定曲面のホップ微分は (第一基本形式から定まる複素構造に関して) 正則である.

- H^3 の全局的でない平均曲率一定曲面の臍点は孤立する.
- (H. Hopf) H^3 の平均曲率一定な閉曲面で球面と同相なものは全局的である (したがって球面に限る).

注意 7.18. この系は H^3 を R^3 や S^3 に変えても成り立つ.

問題

1 3次元ユークリッド空間 R^3 の曲面のガウス・コダッチ方程式を次のようにして求めなさい:

はめこみ $f: M \rightarrow R^3$ の第一基本形式 ds^2 が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma} dz d\bar{z} \quad (z = u + iv)$$

とかけるような座標系 (u, v) (等温座標系) をとり, この座標に関して第二基本形式を

$$II = q dz^2 + \bar{q} d\bar{z}^2 + H ds^2$$

と書いておく. このとき, M から $SO(3)$ への写像 (適合枠)

$$\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3) \quad e_1 = e^{-\sigma} f_u, \quad e_2 = e^{-\sigma} f_v, \quad e_3 = \nu = e^{-2\sigma}(f_u \times f_v)$$

が満たす微分方程式を作り, その積分可能条件を求める.

2 系 7.17 の最後の命題を証明しなさい.