2009 年 6 月 29 日 (2009 年 7 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学 I 講義資料 8

お知らせ

- 授業の web ページです：
  http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/class/2009/geometry-1/
  http://www.official.kotaroy.com/class/2009/geometry-1/

前回までの訂正

- 講義資料 7, 2 ページ例 7.1 の最後：向きづけ可能 ⇒ 向きづけ不可能
- 講義資料 7, 4 ページ, 式 (7.6):

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & e^\sigma & 0 & 0 \\ e^\sigma & 0 & \sigma_u & h_u^1 \\ 0 & -\sigma_u & 0 & h_u^2 \\ 0 & -h_u^1 & -h_u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_v & h_v^1 \\ e^\sigma & \sigma_v & 0 & h_v^2 \\ 0 & -h_v^1 & -h_v^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & e^\sigma & 0 & 0 \\ e^\sigma & 0 & \sigma_v & h_u^1 \\ 0 & -\sigma_v & 0 & h_u^2 \\ 0 & -h_u^1 & -h_u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_u & h_v^1 \\ e^\sigma & \sigma_u & 0 & h_v^2 \\ 0 & -h_v^1 & -h_v^2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 講義資料 7, 4 ページ最後の行：(7.5) ⇒ (7.7)
- 講義資料 7, 5 ページ命題 13：(??) ⇒ (7.4)

授業に関する御意見

- 何がわからないのか，わかりません．半日時間をかけてもできないのはつらいです．
  山田のコメント： いろいろな人と話をしてごらん．ちなみに，半日は長くないと思います．
- まったくついていけない. . .
  山田のコメント： 答案を見る限りついてきているようですが. . .

質問と回答

質問： 複素座標系を導入して，ガウス方程式やコダッチ方程式を記述した方が扱いやすいのですか？

お答え： 問題によります．極小曲面や平均曲率一定曲面などを考えるときは，複素座標を使うのが便利なことが多いようです．

質問： 系 7.17 の，臍点は孤立すると書いているのですが，“孤立” とはどういう状況ですか？

お答え： 臍点 p が曲面の上で孤立する，とは，曲面上の p の近傍 U で，U 内の臍点は p のみであるようなものが存在することです．（複素関数論のテキストで「定数でない正則関数の零点は孤立する」という定理の周辺を眺めてご覧なさい．）

質問： 全臍的という字は何と読むんですか？

お答え： ぜんせいてき

質問： コダッチとマイナルディは別の人なんでしょうか？

お答え： 別の人です．

8 曲面論の基本定理

8.1 空間型の曲面に対するガウス・ワインガルテン方程式

実数 k に対して，$\widetilde{M}^3(k)$ で断面曲率 k の空間型を表す．すなわち

$$\widetilde{M}^3(k) = \begin{cases} S^3(k) = \{p \in \boldsymbol{R}^4\,;\, |p| = k^{-1}\} & (k > 0) \\ \boldsymbol{R}^3 & (k = 0) \\ H^3(k) = \{p \in L^4\,;\, \langle p, p\rangle = k^{-1}, p_0 > 0\} & (k < 0) \end{cases}$$

である．2 次元多様体 Σ の $M^3(k)$ へのはめ込み（曲面）$f\colon \Sigma \to M^3(k)$ の単位法線ベクトル場を ν，第一基本形式を ds^2，第二基本形式 を II とする：

$$ds^2 = \langle df, df\rangle\,, \qquad II = -\langle df, d\nu\rangle\,.$$

とくに，簡単のため，第一基本形式 ds^2 に関する等温座標系 (u, v) をとり，

(8.1) $$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma}\,dz\,d\bar{z}, \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と書いておく．

■$k = 0$ の場合 はめ込み $f(u, v)$ の第一基本形式，第二基本形式が (8.1) と表されているとき，

$$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \qquad \boldsymbol{e}_1 = e^{-\sigma} f_u, \quad \boldsymbol{e}_2 = e^{-\sigma} f_v, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \nu$$

とすると，$\mathcal{F}$ は SO(3) に値をもつ 2 変数関数となる．ここではこれを適合枠とよぶ．すると $\mathcal{F}$ は次の微分方程式を満たすことがわかる：

(8.2) $$\frac{\partial F}{\partial u} = \mathcal{F}U, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \mathcal{F}V,$$
$$U = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_v & -e^{-\sigma}L \\ -\sigma_v & 0 & -e^{-\sigma}M \\ e^{-\sigma}L & e^{-\sigma}M & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_u & -e^{-\sigma}M \\ \sigma_u & 0 & -e^{-\sigma}N \\ e^{-\sigma}M & e^{-\sigma}N & 0 \end{pmatrix}.$$

■$k > 0$ の場合 球面 $S^3(k)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分多様体とみなす．このとき，$c = \sqrt{k}$ おくと，球面の半径は $1/c$ であるから，

$$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \quad \boldsymbol{e}_0 = cf, \quad \boldsymbol{e}_1 = e^{-\sigma} f_u, \quad \boldsymbol{e}_2 = e^{-\sigma} f_v, \quad \boldsymbol{e}_3 = \nu$$

は SO(4) に値をとる二変数関数で，

(8.3) $$\frac{\partial F}{\partial u} = \mathcal{F}U, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \mathcal{F}V,$$
$$U = \begin{pmatrix} 0 & -ce^{\sigma} & 0 & 0 \\ ce^{\sigma} & 0 & \sigma_v & -e^{-\sigma}L \\ 0 & -\sigma_v & 0 & -e^{-\sigma}M \\ 0 & e^{-\sigma}L & e^{-\sigma}M & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ce^{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_u & -e^{-\sigma}M \\ ce^{\sigma} & \sigma_u & 0 & -e^{-\sigma}N \\ 0 & e^{-\sigma}M & e^{-\sigma}N & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす．

2009 年 6 月 29 日 (2009 年 7 月 13 日訂正)

■$k<0$ の場合　双曲空間 $H^3(k)$ をミンコフスキー空間 L^4 の部分多様体とみなす．このとき，$c=\sqrt{-k}$ とし，

$$\mathcal{F}=(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\quad \boldsymbol{e}_0=cf,\quad \boldsymbol{e}_1=e^{-\sigma}f_u,\quad \boldsymbol{e}_2=e^{-\sigma}f_v,\quad \boldsymbol{e}_3=\nu$$

とおくと，$\mathcal{F}$ は $\mathrm{SO}_+(3,1)$ に値をとる二変数関数で，

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\mathcal{F}U,\qquad \frac{\partial F}{\partial v}=\mathcal{F}V, \tag{8.4}$$
$$U=\begin{pmatrix}0 & ce^{\sigma} & 0 & 0\\ ce^{\sigma} & 0 & \sigma_v & -e^{-\sigma}L\\ 0 & -\sigma_v & 0 & -e^{-\sigma}M\\ 0 & e^{-\sigma}L & e^{-\sigma}M & 0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0 & 0 & ce^{\sigma} & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_u & -e^{-\sigma}M\\ ce^{\sigma} & \sigma_u & 0 & -e^{-\sigma}N\\ 0 & e^{-\sigma}M & e^{-\sigma}N & 0\end{pmatrix}$$

を満たす．

■積分可能条件　方程式 (8.2), (8.3), (8.4) の積分可能条件

$$U_v-V_u-UV+VU=O$$

は次と同値である：

$$-e^{-2\sigma}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv})=e^{-4\sigma}(LN-M^2)+k,\qquad \frac{\partial q}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}e^{2\sigma}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{8.5}$$
$$q=\frac{1}{4}\bigl((L-N)-2iM\bigr),\quad H=\frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L+N),\quad z=u+iv.$$

8.2 フロベニウスの定理

ガウス・ワインガルテンの方程式が解をもつための条件を与えたい．いま，領域 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ の点 $x_0\in D$ を固定し，D 上でなめらかな行列値関数

$$U,V\colon D\longrightarrow \mathrm{M}(n,\boldsymbol{R})$$

を用いて，つぎの線形微分方程式を考える[*1]．

$$\frac{\partial F}{\partial u}=FU,\qquad \frac{\partial F}{\partial v}=FV,\qquad F(x_0)=a\in\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R}) \tag{8.6}$$

ただし $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{R})$ は n 次正方行列全体の集合，$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ は n 次正則行列全体の集合，F は $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{R})$ に値をとる未知関数とする．

微分形式を用いれば，方程式 (8.6) を座標不変な形で表すことができる：

$$dF=F\alpha\qquad \alpha=U\,du+V\,dv. \tag{8.7}$$

こうしたほうが以下の議論は見通しがよくなるが，微分形式に不慣れな人のため，(8.6) のまま扱うことにしよう．

[*1] 高次元に一般化するのは難しくない．

補題 8.1. 行列値関数 F が領域 D 上で方程式 (8.6) を満たしているとする．（区分的）なめらかな道

$$\gamma\colon [0,1]\ni t\longmapsto \gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)\in D$$

に対して $F_\gamma(t):=F\circ\gamma(t)$ とおけば，F_γ は常微分方程式

$$\frac{d}{dt}F_\gamma=F_\gamma\left(U\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial v}{\partial t}\right) \tag{8.8}$$

をみたす．

補題 8.2. 行列値関数 F が (8.6) を満たすならば $\det F$ は 0 にならない．さらに

- U, V のトレースが 0 かつ $a\in\mathrm{SL}(n,\boldsymbol{R})$ ならば $F(x)\in\mathrm{SL}(n,\boldsymbol{R})$ $(x\in D)$ が常に成り立つ．
- U, V が交代行列，かつ $a\in\mathrm{SO}(n)$ ならば $F(x)\in\mathrm{SO}(n)$ が常に成り立つ．
- U, V が
$$UY+Y{}^tU=O,\quad VY+Y{}^tV=O,\qquad Y=\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$$
を満たし，かつ $a\in\mathrm{SO}_+(1,n-1)$ ならば $F(x)\in\mathrm{SO}_+(1,n-1)$ が常に成り立つ．

証明. 補題 8.1 のような道 γ で $\gamma(0)=x_0$ となるものをとる．このとき $f(t)=\det F_\gamma(t)$ とおくと

$$\frac{df}{dt}=\mathrm{tr}\,\widetilde{F}_\gamma\frac{dF_\gamma}{dt}=\mathrm{tr}\left(\widetilde{F}_\gamma\mathcal{F}_\gamma\left(U\dot u+V\dot v\right)\right)=\det F_\gamma\,\mathrm{tr}\left(U\dot u+V\dot v\right)=f(t)\mathrm{tr}\left(U\dot u+V\dot v\right)$$

なので

$$f(t)=f(0)\exp\int_0^t\mathrm{tr}\left(U\dot u+V\dot v\right)\,dt$$

となり，$f(0)=\det F(x_0)=\det a\neq 0$ から $f(t)\neq 0$ を得る．γ の終点は任意にとれるので，最初の主張が示された．さらに $\mathrm{tr}\,U=\mathrm{tr}\,V=0$ なら $f(t)$ は定数なので，2 番めの主張も成り立つ．

次に U, V が交代行列の場合を考えると

$$\frac{d}{dt}\bigl(F_\gamma{}^tF_\gamma\bigr)=0$$

であることがわかるが，$t=0$ で $a{}^ta=\mathrm{id}$ であるから F_γ が直交行列であることがわかる．とくに $\mathrm{tr}\,U=\mathrm{tr}\,V=0$ だから $\det F_\gamma=\det a=1$ となり，第 3 の主張を得る．

第 4 の主張は，$A\in\mathrm{SO}_+(3,1)$ であるための条件が $AY{}^tA=Y$，$\det A=1$ かつ $a_{00}>0$ （$A=(a_{ij})$ であることから上と同様にしてわかる． □

補題 8.3. 方程式 (8.6) が解 F をもつならば

$$U_v-V_u-UV+VU=0 \tag{8.9}$$

が成り立つ．

証明. 2 つの方程式を微分して

$$F_{uv}=(F_u)_v=F(VU+U_v),\qquad F_{vu}=(F_v)_u=F(UV+V_u)$$

が等しいことと F が正則となることから結論が得られる． □

定理 8.4 (フロベニウスの定理)**.** 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ が**単連結**であるとする．このとき，D 上で定義された滑らかな行列値関数 U, V が (8.9) を満たすならば，方程式 (8.6) を満たす行列値関数 $F\colon D \to \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ がただ一つ存在する．

注意 8.5.

- 方程式 (8.6) の係数行列と未知関数を複素数を成分にもつ行列としても同様の結果が成り立つ．とくに
  - $\operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = 0$ かつ $a \in \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$ ならば，解 F も $\mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$ に値をとる．
  - U, V が歪エルミート行列かつ $a \in \mathrm{SU}(n, \boldsymbol{C})$ ならば，解 F も $\mathrm{SU}(n)$ に値をとる．ここで，正方行列 A が歪エルミートであるとは $A + A^* = O$ が成り立つことである．
- 独立変数 (u, v) を複素変数 $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$ として，方程式

$$F_z = FZ, \qquad F_{\bar{z}} = FW$$

  を考えても同様の結果が得られる．とくに $W = -Z^*$, $\operatorname{tr} Z = 0$ かつ初期値が $\mathrm{SU}(n)$ の元ならば F は $\mathrm{SU}(n)$ に値をつ．
- 方程式

$$F_u = UF, \qquad F_v = VF$$

  の形についても同様のことが成り立つ．

8.3 曲面論の基本定理

フロベニウスの定理の応用として，次が成り立つ：

定理 8.6 (曲面論の基本定理)**.** 実数 k を一つ固定する．座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の単連結領域 D 上で定義された滑らかな関数 σ, L, M, N が (8.5) を満たしているならば，はめ込み $f\colon D \to \widetilde{M}^3(k)$ で，その第一基本形式と第二基本形式が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

となるものが存在する．さらに，そのような f は $\widetilde{M}^3(k)$ の向きを保つ等長変換で移り会うものを除いてただ一つである．

証明. 点 $x_0 \in D$ を一つ固定する．まず $k < 0$ の場合を考えよう．このとき，フロベニウスの定理と (8.5) より 方程式 (8.4) の $\mathcal{F}(x_0) = \mathrm{id}$ となる解がただ一つ存在する．とくに $\mathcal{F}\colon D \to \mathrm{SO}_+(3, 1)$ となるが，その第一列を $\boldsymbol{e}_0$ とおけば，

$$f = \frac{1}{\sqrt{-k}}\boldsymbol{e}_0 \tag{8.10}$$

が求める曲面である．

次に $k = 0$ の場合を考える．同様に (8.2) の $\mathcal{F}(x_0) = \mathrm{id}$ を満たす解をとり，$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ として，

$$\varphi = e^{\sigma}(\boldsymbol{e}_1\,du + \boldsymbol{e}_2\,dv) \tag{8.11}$$

とおくと，(8.2) の解であることから

$$d\varphi = 0 \tag{8.12}$$

が成り立つ．したがって D の単連結性から $df=\varphi$ かつ $f(x_0)=\mathbf{0}$ となる $f\colon D\to \boldsymbol{R}^3$ がただ一つ存在するが，これが求めるものである．

同様に $k>0$ の場合も示すことができる．一意性は演習問題にしておこう． □

8.4 フロベニウスの定理の証明

定理 8.4 に証明を与えよう．いま，x_0 と $x\in D$ を結ぶなめらかな道

$$\gamma\colon [0,1]\ni t\longmapsto \gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)\in D \qquad \gamma(0)=x_0,\quad \gamma(1)=x$$

をとり，常微分方程式 (8.8) を考える．線形常微分方程式の解の存在と一意性の定理から，初期条件 $F_\gamma(0)=a$ を満たす解 F_γ がただ一つ存在する．

補題 8.7. $F_\gamma(1)$ は γ の終点 x のみに依存する．

証明. 2 点 x_0, x を結ぶ二つの道

$$\gamma_0(t)=\bigl(u_0(t),v_0(t)\bigr),\qquad \gamma_1(t)=\bigl(u_1(t),v_1(t))\bigr)\bigl(\gamma_0(0)=\gamma_1(0)=x_0,\quad \gamma_0(1)=\gamma_1(1)=x\bigr)$$

をとる．領域 D の単連結性より，滑らかな写像

$$\Gamma\colon [0,1]\times[0,1]\ni (s,t)\longmapsto \Gamma(s,t)\in D \quad \text{で}$$
$$\Gamma(0,t)=\gamma_0(t),\quad \Gamma(1,t)=\gamma_1(t),\quad \Gamma(s,0)=x_0,\quad \Gamma(1,0)=x$$

となるものをとることができる．いま $\gamma_s(t)=\gamma(t)$ とおいて，道 γ_s に対して方程式 (8.8) を考え，その解を

$$F(s,t)=F_{\gamma_s}(t) \qquad F(s,0)=a$$

と書く．さらに $\gamma_s(t)=\bigl(u(s,t),v(s,t)\bigr)$ とおいて

$$S=U\,u_s+V\,v_s,\qquad T=U\,u_t+V\,v_t$$

とすると，積分可能条件と $\Gamma(s,0)$ と $\Gamma(s,1)$ が定数であることから

$$S_t-T_s-ST+TS=O,\qquad S(s,0)=S(s,1)=0 \tag{8.13}$$

が成り立つことがわかる．

$F_t=FT$ であることから，

$$\begin{aligned}
F_{st}&=F_sT+FT_s=F_sT+F(S_t-ST+TS)\\
&=F_sT+FS_t-FST+FTS\\
&=F_sT+(FS)_t-F_tS-FST+FTS=F_sT+(FS)_t-FTS-FST+FTS\\
&=F_sT+(FS)_t-FST=(F_s-FS)T+(FS)_t
\end{aligned}$$

となるので，

$$(F_s-FS)_t=(F_s-FS)T$$

が成り立つ．これは F_s-FS を未知関数とする，(8.8) と同じ微分方程式であるから，解の一意性より

$$F_s-FS=bF$$

をみたす b が存在する．ここで $t=0$ を代入すると $F(s,0)=a$ だから $F_s(s,0)=0$, また $S(s,0)=0$ なので $b=0$ でなければならない．したがって

$$F_s = FS$$

が成り立つ．とくに $S(s,1)=O$ であるから $F_s(s,1)=0$. したがって $F(s,1)$ は s によらないので

$$F_{\gamma_2}(1) = F(1,1) = F(0,1) = F_{\gamma_1}(1).$$

□

そこで,

$$F(x) = F_\gamma(1) \qquad (\gamma \text{ は } x_0 \text{ と } x_1 \text{ を結ぶ道}) \tag{8.14}$$

と定めると $F\colon D \to \mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$ が得られた．

これが求めるものであることは演習問題としておく．

問題

1 補題 8.2 の最後の主張を示しなさい．

2 曲面論の基本定理 8.6 の $k=0$ の場合の一意性を次のようにして示しなさい：

- 条件を満たす曲面 f_1, f_2 が存在したとして，対応する適合枠を $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ とする．ガウスワインガルテン方程式 (8.2) から $\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2$ が定数行列であることを示す．
- したがって $\mathcal{F}_2 = a\mathcal{F}_1$（$a$ は定数行列）とかけるが，$a \in \mathrm{SO}(3)$ である．
- このとき $df_1 = a\,df_2$ となることから f_1 と f_2 は回転と平行移動で移りあう．

3 式 (8.12) を示しなさい．

4 式 (8.14) が (8.6) の解であることを示しなさい．