2009 年 7 月 6 日 (2009 年 7 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学 I 講義資料 9

お知らせ

- 授業 web ページには訂正した講義資料をおきます．修正箇所は青字になっています．ご参考までに．
- レポート課題についての質問がありましたが，最終レポートは課しません．

前回までの訂正

- 講義資料 8，1 ページ「前回の訂正」:「講義資料 6」⇒「講義資料 7」（4 箇所）
- 講義資料 8, 3 ページ, 式 (8.2), (8.3)，4 ページ (8.4):
  すべて σ_u を σ_v に，σ_v を σ_u に（前回の訂正を本文でし忘れていました）
- 講義資料 8，5 ページ，補題 8.2 の 3 項目目：$\mathrm{SO}_+(n-1,1)$ ⇒ $\mathrm{SO}_+(1,n-1)$
- 講義資料 8，5 ページ，補題 8.2 の証明 2 行目：

$$\frac{df}{dt} = \operatorname{tr}\widetilde{F}_\gamma\frac{dF_\gamma}{dt} = \operatorname{tr}\left(\widetilde{F}_\gamma\mathcal{F}_\gamma\,(U\dot{u}+V\dot{v})\right) = \det F_\gamma \operatorname{tr}(U\dot{u}+V\dot{v}) = f(t)\exp\operatorname{tr}(U\dot{u}+V\dot{v})$$
$$\Rightarrow\quad \frac{df}{dt} = \operatorname{tr}\widetilde{F}_\gamma\frac{dF_\gamma}{dt} = \operatorname{tr}\left(\widetilde{F}_\gamma\mathcal{F}_\gamma\,(U\dot{u}+V\dot{v})\right) = \det F_\gamma \operatorname{tr}(U\dot{u}+V\dot{v}) = f(t)\operatorname{tr}(U\dot{u}+V\dot{v})$$

- 講義資料 8，5 ページ，補題 8.2 の証明 4 行目：

$$f(t) = f(0)\int_0^t \operatorname{tr}(U\dot{u}+V\dot{v})\,dt \quad\Rightarrow\quad f(t) = f(0)\exp\int_0^t \operatorname{tr}(U\dot{u}+V\dot{v})\,dt$$

- 講義資料 8，6 ページ，定理 8.6 の下から 2 行目：$\widetilde{M}^3(k))$ ⇒ $\widetilde{M}^3(k)$
- 講義資料 8，6 ページ，定理 8.6 の下から 2 行目：移り会う ⇒ 移り合う（または写り合う）

授業に関する御意見

- 受講者がだいぶ減ったと思います．先生は寂しくないでしょうか．
  山田のコメント： さびしくありません．さびしくなんかないもん！

質問と回答

質問： “内的” と “外的” についてもう一度説明をお願いします．

お答え： 曲面の第一基本量だけから定まる量を「内的な量」，第一基本量，第二基本量から定まる量を「外的な量」といいます．「ガウスの驚異の定理」は「ガウス曲率は内的な量である」ということを言っています．

質問： $S^3(k)$ での ν の定義（もっと一般に外積の定義）はどのようになるのでしょうか．

お答え： やってみればいいわけです．$k=c^2$ とおいて $p\in S^3(k)\subset \boldsymbol{R}^4$ を考えると，$\boldsymbol{e}_0 = cp$ は単位ベクトルとなります．$T_pS^3(k)$ はベクトル p の直交補空間ですから，$X, Y \in T_pS^3(k)$ は p に直交するベクトルです．したがって $X\times Y$ としては $\boldsymbol{e}_0$, X, Y に直交して “しかるべき性質” をもつものを見つければいいわけですが，そういうベクトルは，4 行 3 列の行列 $(\boldsymbol{e}_0, X, Y)$ の小行列式を使うとつくれませんか？

質問： 双曲空間以外にミンコフスキー空間の具体的な部分多様体にはどのような例がありますか？

お答え： もっとも単純な例は平面．

質問： 曲面論の基本定理と曲線論の基本定理は一般次元でも成り立つのでしょうか．

お答え： ステートメントを書いてみましょう．成り立つものなら証明は自動的についてきます．

9 Lawson 対応

9.1 曲面論の基本定理（復習）

2 次元多様体 Σ から定曲率 k の 3 次元空間型 $\widetilde{M}^3(k)$ へのはめ込み $f\colon \Sigma \to \widetilde{M}^3(k)$ の第一基本形式 ds^2 に関する等温座標系 (u,v) をとり，第一基本形式，第二基本形式をそれぞれ

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2+dv^2) = e^{2\sigma}\,dz\,d\bar{z}, \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \tag{9.1}$$

と書くと，次の**ガウス・コダッチの方程式**

$$-e^{-2\sigma}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv}) = e^{-4\sigma}(LN-M^2)+k, \qquad \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{2\sigma}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{9.2}$$

$$q = \frac{1}{4}\bigl((L-N)-2iM\bigr), \quad H = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L+N), \quad z = u+iv.$$

が成り立つ．ここで H は曲面の**平均曲率**と呼ばれる．

逆に，単連結領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 上で定義されたなめらかな関数 σ, L, M, N が (9.2) を満たしているならば，はめ込み $f\colon D \to \widetilde{M}^3(k)$ で，第一基本形式と第二基本形式が (9.1) となるようなものが，$\widetilde{M}^3(k)$ の向きを保つ等長変換で写り合うものをのぞきただ一つ存在する．

9.2 Lawson 対応

定理 9.1. 単連結領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 上で定義されたはめ込み $f\colon D \to \widetilde{M}^3(k)$ の第一・第二基本形式が (9.1) で与えられており，さらに f の平均曲率が一定であるとする：

$$H = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L+N) = \text{一定}$$

このとき，任意の定数 $\widetilde{H}$ に対して

$$\tilde{k} = k + (H^2 - \widetilde{H}^2) \tag{9.3}$$

とすると，はめ込み $\tilde{f}\colon D \to \widetilde{M}^3(\tilde{k})$ で，その第一基本形式 $d\tilde{s}^2$ と第二基本形式 $\widetilde{II}$ が

$$d\tilde{s}^2 = ds^2, \qquad \widetilde{II} = II + (\tilde{H}-H)ds^2$$

となるようなものが存在する．

すなわち，$\widetilde{M}^3(k)$ の定平均曲率 H の曲面全体と $\widetilde{M}^3(\tilde{k})$ の定平均曲率 $\widetilde{H}$ の曲面全体の間に，局所等長的な 1 対 1 対応がある．

系 9.2.
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平均曲率 1 をもつ曲面と，球面 $S^3 = S^3(1)$ の極小曲面（平均曲率 0）の曲面の間に局所等長的な対応がある．
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平均曲率 0 をもつ曲面と，双曲空間 $H^3 = H^3(-1)$ の平均曲率 1 をもつ曲面の間に局所等長的な対応がある．

2009 年 7 月 6 日 (2009 年 7 月 13 日訂正)

9.3 応用：双曲空間の平均曲率 1 をもつ曲面の表現公式

ユークリッド空間の極小曲面は，複素解析的なデータでそのはめ込みを具体的に表す Weierstrass 表現公式が知られている．したがって，系 9.2 から，双曲空間の平均曲率 1 をもつ曲面（[3] にしたがって「CMC-1 曲面」と呼ぶ）に対しても，複素解析的なデータによる表現公式が成り立つことが期待される．実際，Bryant はそのような類似が成り立つことを示した（Bryant の表現公式 [1, 3]）．ここでは，それを定理 9.1 の応用として証明しよう[*1]．

■極小曲面の Weierstrass 表現公式　複素平面 $\boldsymbol{C}$ の単連結領域 D 上で定義された有理型関数 g と，正則 1 次微分形式 $\omega = \hat{\omega}\,dz$ （$\hat{\omega}$ は D 上の正則関数，$z = u + iv$ は複素座標）に対して

$$ds^2 := (1 + |g|^2)^2\,|\omega|^2 \tag{9.4}$$

とおき，ds^2 が D 上のリーマン計量を与えていると仮定する．このとき，

$$f = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\big((1-g^2), i(1+g^2), 2g\big)\omega \tag{9.5}$$

とおくと，f は D から $\boldsymbol{R}^3$ への写像を与えるが，これは極小はめ込みを与えている．さらに，その第一基本形式と第二基本形式は

$$ds^2 = (1+|g|^2)^2|\omega|^2, \qquad I\!I = -\omega\,dg - \overline{\omega\,dg} \tag{9.6}$$

で与えられる．逆に，単連結な極小曲面はこのようにして得られる．

詳細は [2] などを見よ．

■Bryant の表現公式　ここでは，4 次元ミンコフスキー空間を 2 次エルミート行列がなす空間と同一視し，双曲空間を

$$H^3 = \{aa^*\,;\, a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})\}$$

と同一視しておく．

複素平面 $\boldsymbol{C}$ の単連結領域 D 上で定義された有理型関数 g と，正則 1 次微分形式 $\omega = \hat{\omega}\,dz$ （$\hat{\omega}$ は D 上の正則関数，$z = u + iv$ は複素座標）に対して

$$ds^2 := (1 + |g|^2)^2\,|\omega|^2 \tag{9.7}$$

とおき，ds^2 が D 上のリーマン計量を与えていると仮定する．このとき，微分方程式

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix}\omega, \qquad F(z_0) = \mathrm{id} \tag{9.8}$$

はただ一つの正則な解 $F\colon D \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ をもつが，

$$f = FF^*\colon D \longrightarrow H^3 \tag{9.9}$$

は平均曲率 1 のはめ込み (CMC-1 はめ込み) を与えている．とくに，その第一基本形式と第二基本形式は

$$ds^2 = (1+|g|^2)^2|\omega|^2, \qquad I\!I = -\omega\,dg - \overline{\omega\,dg} + ds^2 \tag{9.10}$$

で与えられる．逆に，単連結な CMC-1 曲面はこのようにして得られる．

---

*1 この証明は梅原雅顕氏のアイディアによる．

■Bryant の表現公式の証明 方程式 (9.8) の解から定まる f の第一基本形式，第二基本形式が (9.10) となることは直接計算で（どうやっても）わかるので，逆を示せばよい．単連結な CMC-1 曲面 $f\colon D \to H^3$ に対して，Lawson 対応により対応する極小曲面を $f_0\colon D \to \boldsymbol{R}^3$ と書くと，f_0 は (9.5) のように表示でき，f_0 の第一・第二基本形式は (9.6) のようにかけるから，f の第一・第二基本形式は (9.10) の形になる．その (g, ω) に対して (9.8) の解から得られるはめ込み $f_{g,\omega}$ もまた (9.10) の形の基本形式をもつので，曲面論の基本定理よりこれはもとの f と H^3 の合同変換でうつり合う．

参考文献

[1] R. Bryant, Surfaces of constant mean curvature one in hyperbolic space, Astérisque Vol.154-155, 1987.

[2] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications Inc. (1986).

[3] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature*-1 *in the hyperbolic* 3-*space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.

[4] 梅原雅顕，山田光太郎，「3 次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面の幾何」，数学 47 (1995), 145–157

問題

1 定理 9.1 を証明しなさい．