2009 年 7 月 13 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

# 微分幾何学 I 講義資料 10

## お知らせ

- 本日でひとまず講義は終了です．この続き “補講” をするかも知れませんが，その場合は
  - 山田の部屋の前
  - 山田の学生のメイリングリスト
  - 九州幾何学セミナーメイリングリスト
  - 講義の web ページ

  でお知らせします．
- 成績評価は近日中に山田の部屋の前に掲示いたします．クレイムなどのある方は，7 月中に山田までメイルでお知らせください．
- 今回は提出課題はありません．

## 前回までの訂正

- 講義資料 8，3 ページ，4 行目：($k$ を $1/k$ に)

$$\widetilde{M}^3(k)=\begin{cases} S^3(k)=\{p\in \boldsymbol{R}^4\,;\,|p|=k\} & (k>0)\\ \boldsymbol{R}^3 & (k=0)\\ H^3(k)=\{p\in L^4\,;\,\langle p,p\rangle=k, p_0>0\} & (k<0)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\qquad \widetilde{M}^3(k)=\begin{cases} S^3(k)=\{p\in \boldsymbol{R}^4\,;\,|p|=k^{-1}\} & (k>0)\\ \boldsymbol{R}^3 & (k=0)\\ H^3(k)=\{p\in L^4\,;\,\langle p,p\rangle=k^{-1}, p_0>0\} & (k<0)\end{cases}$$

- 講義資料 9，1 ページ，下から 6 行目：言い訳 ⇒ いいわけ
- 講義資料 9，1 ページ，前回までの訂正の 5 番目：

$$f(t)=f(0)\int_0^t \exp\operatorname{tr}\left(U\dot{u}+V\dot{v}\right)\,dt \qquad\Rightarrow\qquad f(t)=f(0)\exp\int_0^t \operatorname{tr}\left(U\dot{u}+V\dot{v}\right)\,dt$$

## 授業に関する御意見

- Weierstrass 表現はやっぱり理解しにくいです．

  **山田のコメント：** そうですか？
- 次回も集中講義のため休みます．

  **山田のコメント：** 了解

## 質問と回答

**質問：** 平均曲率一定の曲面を扱う場合,「Lawson 対応により負曲率のときのみを考えればよい」という状況がよくありそうな気がしますがどうでしょうか.

**お答え：** 局所的な問題から言えばそうです．しかし，大域的な問題（実はこれが難しいし面白い）ではそうはなりません．たとえば，ユークリッド空間のカテノイド（懸垂面）は極小曲面の例として有名で，$\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ の $\boldsymbol{R}^3$ への，$g=z$, $\eta=1/z^2$ という Weierstrass data によるはめ込みを与えています．しかし，これに対応する双曲空間の CMC-1 曲面は，$\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ 上では well-defined ではなく，その普遍被覆上でしか定義されません．CMC-1 曲面にも「回転面」があり，カテノイドと類似の性質をもっているので Bryant は “catenoid cousin” と名づけましたが，これは極小曲面のカテノイドから Laswon 対応で得られるものとは違っているのです.

**質問：** Lawson 対応は，平均曲率一定な曲面の局所等長的な対応を見ていますが，一定でない $H$ に対して $\widetilde{H}$ を任意の実数 $a$ について $\widetilde{H}=H+a$ とおけば，同様の方法で平均曲率 $\widetilde{H}$ の曲面への対応をつけることができるような気がします．このような対応を考えることに，何かいいことがありますか？

**お答え：** 本当にそうなりますか？きちんと確かめてごらんなさい（とくにコダッチ方程式）

**質問：** Lawson 対応の他の例をおしえてください.

**お答え：** ユークリッド空間の平均曲率一定 $(\neq 0)$ の曲面と（適当な半径の）球面の極小曲面；双曲空間の平均曲率 $H$ $(|H|<1)$ の曲面と，双曲空間の極小曲面など.

**質問：** Weierstrass の表現公式はとても面白く感じますが，具体的な関数を与えたときの図とか無いですか？

**お答え：** たくさんあります．たとえば http://www.fukuoka-edu.ac.jp/ fujimori/index-j.html

**質問：** Weirstrass の表現公式や Bryant の表現公式の他にも色々な表現公式があるんでしょうか.

**お答え：** あるんです．今週，7 月 17 日（金曜日）の幾何学セミナーで少しだけ話します.

**質問：** 平均曲率が 0 であれば，どんな曲面も面積は最小になるのでしょうか.

**お答え：** いいえ．最小であるための必要条件と述べたはずです.

**質問：** CMC-1 の略が何であるか聞き取れませんでした．もう一度お願いします.（他，同様の質問 2 件）

**お答え：** 「CMC-1 が何の略であるか」ではないでしょうか．Constant Mean Curvature One です.

# 10 Bryant の公式の証明

前回，Lawson 対応の応用として Bryant の表現公式の応用を与えたが，ここでは，もう少し直接的な証明を与える．

## 10.1 ガウス・ワインガルテン方程式の 2 次行列による表示 (復習)

双曲空間 $H^3$ を 2 次エルミート行列の空間 Herm(2) の部分多様体とみなす（3.2 節参照）：

$$H^3 = \{x \in \mathrm{Herm}(2)\,;\, \det x = 1, \operatorname{tr} x > 0\}.$$

はめ込み $f\colon \boldsymbol{R}^2 \supset D \to H^3$ の第一基本形式，第二基本形式をそれぞれ

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv62$$

または，複素座標 $z = u + iv$ を用いて

$$ds^2 = e^{2\sigma}\,dz\,d\bar{z}, \qquad I\!I = q\,dz^2 + \bar{q}\,d\bar{z}^2 + H\,ds^2$$
$$\left(q = \frac{1}{4}\bigl((L-N) - 2iM\bigr), \quad H = \frac{e^{-2\sigma}}{2}(L+N)\right)$$

と書いておく．

曲面の適合枠

$$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \qquad \boldsymbol{e}_0 = f, \quad \boldsymbol{e}_1 = e^{-\sigma} f_u, \quad \boldsymbol{e}_2 = e^{-\sigma} f_v, \quad \boldsymbol{e}_3 = \nu$$

を考えると，$\mathcal{F}$ は領域 $D$ から $\mathrm{SO}_+(3,1)$ への写像を与えるが，$\mathrm{SO}_+(3,1)$ の二重被覆を $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ と見なし (4 節参照)，$\Theta\colon D \to \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ と考えておく[*1]．

**補題 10.1** (命題 7.13, 7.14)**.** 適合枠 $\Theta\colon D \to \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ は次の方程式を満たす：

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \Theta Z, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{z}} = \Theta W, \quad Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_z & e^{\sigma}(1+H) \\ -2e^{-\sigma} q & -\sigma_z \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sigma_{\bar{z}} & 2e^{-\sigma}\bar{q} \\ e^{\sigma}(1-H) & \sigma_{\bar{z}} \end{pmatrix}. \tag{10.1}$$

この方程式系の積分可能条件は

$$\sigma_{z\bar{z}} = -\frac{1}{4}e^{2\sigma}(1-H^2) - e^{-2\sigma} q\bar{q}, \qquad \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{2\sigma}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{10.2}$$

である．

**注意 10.2.** 適合枠 $\Theta$ から曲面 $f$ を復元するには次のようにすればよい：

$$f = \Theta\Theta^*\colon D \longrightarrow H^3 \subset \mathrm{Herm}(2).$$

---

2009 年 7 月 13 日

[*1] $D$ の単連結性は仮定しておく．

## 10.2 Bryant の公式の証明

**命題 10.3.** 前節までの記号の元，なめらかな写像

$$X\colon D \longrightarrow \mathrm{SU}(2)$$

で $\Theta X\colon D \to \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ が複素解析的であるようなものが存在するための必要十分条件は $H=1$ となることである．

**証明**. 方程式 (10.1) を用いれば，$\Theta X$ が複素解析的であるための必要十分条件は

$$(\Theta X)_{\bar z} = \Theta_{\bar z}X - \Theta X_{\bar z} = \Theta(WX - X_{\bar z}) = O$$

となることである．これは

$$X_{\bar z} = WX$$

が成り立つことと同値である．ここで $X\in\mathrm{SU}(2)$ であるから，$X^{-1}=X^*$ なので，

$$X_z = -X(X^{-1})_zX = -XX_z^*X = -X(X_{\bar z})^*X = -X(WX)^*X = -W^*X.$$

したがって，条件を満たす $X$ が存在するための必要十分条件は

$$X_z = -W^*X, \qquad X_{\bar z} = WX$$

である．この積分可能条件

$$(W^*)_{\bar z} + W_a = W^*W - WW^* \qquad W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sigma_{\bar z} & 2e^{-\sigma}\bar q \\ e^{\sigma}(1-H) & \sigma_{\bar z}\end{pmatrix}$$

は，(10.2) を用いれば $H=1$ と同値となることがわかる． □

したがって，平均曲率が 1 のときは $F:=\Theta X$ とおけば $f=FF^*$ とかけるような正則写像 $F\colon D\to \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ が得られる．

# 参考文献


[1] R. Bryant, Surfaces of constant mean curvature one in hyperbolic space, Asterisque Vol.154-155, 1987.

[2] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications Inc. (1986).

[3] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature*-1 *in the hyperbolic* 3-*space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.

[4] 梅原雅顕，山田光太郎，「3 次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面の幾何」，数学 47 (1995), 145–157