2009 年 4 月 13 日 (2009 年 4 月 20 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 1

重要なお知らせ

受講希望者は，**本日の宿題を必ず提出**してください．提出者リストがそのまま受講者名簿となります．（別に web 上の教務システムでの受講登録を忘れずに行ってください）

授業の概要

■Web ページ　http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/class/geometry-intro/

■科目名　数学特論 4（理学部数学科 4 年）・微分幾何学大意（大学院数理学府）

■授業の目的　リーマン多様体の基礎的な概念を理解する．

■授業の概要　リーマン多様体とその上の諸量を定義し，その幾何学的な意味を紹介します．とくに断面曲率が一定であるようなリーマン多様体の局所的な決定を行います．

■授業の進め方　主として講義．講義の後の復習は必須です．

■履修条件　幾何学 C で学んだ多様体，接ベクトル，ベクトル場，可微分写像の概念は既知とします．

■教科書及び参考書　必要に応じて講義資料を配布します．参考書として例えば

- 加須栄 篤，「リーマン幾何学」，数学レクチャーノート基礎編 2，培風館，2001.
- S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, RIEMANNIAN GEOMETRY, Springer-Verlag, 1987.
- M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, LE SPECTRE D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE, Lecture Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag, 1971.

■オフィス・アワー　授業のある日の 12 時 00 分から 12 時 30 分まで，1433（山田の部屋）にて．

■成績評価の方法：　次の 1, 2 を各回 5 点満点，3 を 50 点満点で採点し，合計を評価の材料とします．

1 毎回，宿題（授業に関連した問題）を出題します．所定の用紙に解答し，締切日までに提出して下さい．締切は，原則として，授業のあった週の**木曜日 17 時**です．
2 同じ用紙に授業内容に対する質問，講義資料などの誤りの指摘を記入してください．
3 定期試験期間中に**試験**を行います．詳細は試験 3 週間前までに連絡します．

■注意　山田は**わかりにくい授業**をめざしています．講義を聴いてわかった気になるのではなく，省略した部分を埋め，関連する問題を解き，さらに内容が自分の頭のなかで再構成できるように復習してください．もし，講義がわかりやすすぎるようでしたら，クレイムをつけてください．

1 二次形式と内積

この節では V を $\boldsymbol{R}$ 上の**有限次元**線型空間，$n = \dim V$ としておく．

1.1 双線型形式

定義 1.1. 線型空間 V 上の**双線型形式** *bilinear form* とは，写像

$$\varphi\colon V \times V \ni (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{R}$$

で，

- 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ を固定したとき，写像 $V \ni \boldsymbol{w} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{R}$ が線型,
- 任意の $\boldsymbol{w} \in V$ を固定したとき，写像 $V \ni \boldsymbol{v} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{R}$ が線型

となることである．さらに，双線型形式 φ が**対称**であるとは

$$\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$$

が任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して成立することである．

例 1.2. 数ベクトル空間 $V = \boldsymbol{R}^n$ の要素を列ベクトルとみなす．n 次対称行列 G に対して

$$\varphi_G(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := {}^t\boldsymbol{v} G \boldsymbol{w} \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^n)$$

と定めると，φ_G は V 上の対称な双線型形式である．

定義 1.3. 線型空間 V 上の双線型形式 φ に対応する**二次形式** *quadratic form* とは写像（同じ記号 φ で表す）

$$\varphi\colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \varphi(\boldsymbol{v}) := \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{R}$$

のことである．

補題 1.4. 線型空間 V 上の対称双線型形式が一致するための必要十分条件は，対応する二次形式が一致することである．

証明： 十分性を示せばよい．対称双線型形式 φ に対して

$$\varphi(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) + \varphi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$$

だから，対称性を用いれば

$$\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\bigl(\varphi(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) - \varphi(\boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{w})\bigr)$$

なので，双線型形式は，対応する二次形式が決まれば決まってしまう．

2009 年 4 月 13 日 (2009 年 4 月 20 日訂正)

1.2 行列表示

線型空間 V の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ を一つとる．すると，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v^n\boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

を満たす ${}^t(v^1, \dots, v^n) \in \boldsymbol{R}^n$ がただ一つ存在する．これを $\boldsymbol{v}$ の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する**成分**という．成分をとることにより，同型写像

$$\iota\colon V \ni \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \tag{1.1}$$

が得られる．

いま，V 上に対称双線型形式 φ が与えられたとき，n 次対称行列 G を

$$G := (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \qquad \bigl(g_{ij} = \varphi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\bigr) \tag{1.2}$$

とおき，対称双線型形式 φ の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する**表現行列**という．このとき，

$$\varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = {}^t\bigl(\iota(\boldsymbol{v})\bigr)G\bigl(\iota(\boldsymbol{w})\bigr) \tag{1.3}$$

となる．すなわち，

> (1.1) の対応により，対称双線型形式 φ は，例 1.2 の φ_G と対応する．ただし G は基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する φ の表現行列である．

1.3 標準型

命題 1.5. 線型空間 V 上の対称双線型形式 φ に対して，V の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ で，それに関する φ の表現行列が

$$G = \begin{pmatrix} -I_k & O & O \\ O & I_l & O \\ O & O & O_m \end{pmatrix} \qquad (k + l + m = n)$$

となるものが存在する．ただし I_k, I_l はそれぞれ k 次，l 次の単位行列，O_m は m 次の零行列，O は適当な大きさの零行列である．

> **証明：** 基底 $[\boldsymbol{u}_j]$ に関する表現行列を $\widetilde{G}$ と書くと，これは対称行列だから，直交行列 P により対角化できる：${}^tP\widetilde{G}P =$ 対角行列 とくに，固有値は実数なので，右辺の対角行列は，最初の k 行が負の固有値，次の l 行が正の固有値，最後の m 行が零固有値に対応するようにできる．このとき，うまく正則な対角行列 Q をとれば ${}^t(PQ)\widetilde{G}(PQ)$ が 結論の G になるようにできる．そこで $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)PQ$ とすれば，これが求める基底である．

注意 1.6. 命題 1.5 の k, l, m の値は，このような $[\boldsymbol{e}_j]$ のとり方によらない．

1.4 非退化二次形式

定義 1.7. 線型空間 V 上の対称双線型形式（二次形式）φ が**非退化** *nondegenerate* であるとは,

$$\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{がすべての } \boldsymbol{x} \in V \text{ に対して成り立つならば} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つことである．

定義 1.8. 線型空間 V 上の対称双線型形式（二次形式）φ が**正値** *positive definite*（**負値** *negative definite*）であるとは,

$$\text{任意の } \boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\} \text{ に対して} \qquad \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0 \qquad (< 0)$$

が成り立つことである．正値または負値の二次形式を **定値**，それ以外の二次形式を**不定値**ということもある．

命題 1.9. 線型空間 V 上の対称双線型形式（二次形式）φ が

1 非退化であるための必要十分条件はその表現行列が正則となることである．これは，命題 1.5 で $m = 0$ となることと同値である．

2 正値（負値）であるための必要十分条件は，その表現行列の固有値がすべて正（負）となることである．これは，命題 1.5 で $k = m = 0$（$l = m = 0$）となることと同値である．

とくに，定値二次形式は非退化である．

定義 1.10. 非退化二次形式 φ に対して，命題 1.5 のような (k, l)（$k + l = n$）を φ の**符号数**という．

1.5 内積

定義 1.11. 線型空間 V の**内積** *inner product* または**計量**とは，正値な対称双線型形式のことである

また，**不定値内積**（単に内積ということもある）とは，非退化かつ不定値な対称双線型形式のことである．

定義 1.12. 次元が n である線型空間 V に（正値）内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき，組 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を**内積空間**または**ユークリッド的ベクトル空間**という．

また，V と符号数 $(n-1, 1)$（または $(1, n-1)$）の内積の組を**ミンコフスキー的ベクトル空間**という．

定義 1.13. 一般に V の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対して命題 1.5 のような基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ を**正規直交基底**という．

問題

1 第 1.2 節に倣って，「線型変換 $A\colon V \to V$ の表現行列」を説明しなさい．

2 等式 (1.3) を示しなさい．

3 命題 1.5 を示しなさい．

4 命題 1.9 を示しなさい．