2009 年 4 月 20 日

山田光太郎

kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 2

お知らせ

- 4 月 27 日，5 月 4 日（国民の休日）はお休みです．次回は 5 月 11 日からになります．
- 提出物の締切は 4 月 24 日（木曜日）17 時（通常どおり）です．
- 提出物（答案）は文章にしてください．あなたが「わかっている」ことが採点者に伝えられない，ということではいけません．
- 提出物の裏面（質問，誤りの指摘）も成績評価対象です．

前回までの訂正

- 講義資料 1，2 ページ 5 行目：“$\varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$” → “$\varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$”.
- 講義資料 1，3 ページ (1.3) 式：“$\iota\boldsymbol{w}$” → “$\iota(\boldsymbol{w})$”.

  線型写像 “$L\colon V \to V$” を “$\boldsymbol{x} \mapsto L\boldsymbol{x}$” と独立変数を囲む括弧を書かないことも普通なので，一概に誤りとは言えませんが，“$\iota(\boldsymbol{v})$” の方には括弧がついていてバランスが悪いので，こちらに揃えましょう．

授業に関する御意見

- 初めて微分幾何学にふれたのでがんばりたいです．

  山田のコメント： よろしく
- イメージのし易い 3 次元の例を多く取り挙げて欲しいです．

  山田のコメント： (1) 3 次元だと本当にイメージしやすいでょうか．(2) イメージしにくいものでも考えることができるのが数学の強みだと思うのですが．
- プリントに提正箇所（原文ママ）が多々ありますね．

  山田のコメント： 答案にも. . . だから誤りを指摘してください（それが課題）．
- 教室が狭いので移動してほしい．

  山田のコメント： 次回，もう一度様子を見ます．
- 今回はわかりやすかったです．

  山田のコメント： そうですか
- 遅刻のため聴講できませんでした．申し訳ございません．

  山田のコメント： 私は構いません．
- 自分の専門は解析なので，そのような分野とのかかわりや応用についてもあつかったほしい（原文ママ）と思います．
- リーマン幾何が他の数学の分野や物理とどのように関係しているかを説明してほしいです．

  山田のコメント： 時間がとれるだろうか．手を動かせるまで鍛える，ということを諦めればできるかもしれませんが，あまり意味がなさそうな. . .

- 山田先生の講義は色が多くわかりやすいのですが，時々色が多すぎて見にくいように感じます．

  山田のコメント： ごめんなさい．

質問と回答

質問： $\forall v \in V \setminus \{0\}$ に対して $\varphi(v, v) > 0$ となる V 上の二次形式 φ を "正値である" と呼びましたが，$\forall v \in V \setminus \{0\}$ に対して $\varphi(v, v) \geqq 0$ となるものには特に呼び方は無いのでしょうか？

お答え： 半正値または半正定値といいます．

質問： Riemann 多様体 M において，各 $T_p(M)$ $(p \in M)$ 上に異なる内積を与える Riemann 計量を考える必要性はどのような時にありますか？

お答え： たとえば，リーマン多様体のリーマン計量を変形していくことによって位相的な性質が捕まることがあります．

質問： $\boldsymbol{R}^n$ に限らず $\boldsymbol{C}^n$ に拡張した方が，数学的にはいくらか複雑になると思いまず（原文ママ）が数学的な構造はそれ以上に豊かになると思います．そのようなことをすることはできるのですか？また，できないとすれば，どのような不都合が起きるのですか？

お答え： もちろん複素多様体は豊かな数学的対象です．ただし，実の幾何学が複素幾何学の部分集合というわけではなく，ある意味で別物と考えたほうがよいと思います．

質問： Nash の埋め込み定理について：M をリーマン多様体とするとき，十分高い次元のユークリッド空間に距離を保って M を埋め込むことができると言われましたが，これはリーマン多様体としての距離とユークリッド距離が一致するということですか？

お答え： 少し違います．たとえば，球面 S^2 が 3 次元ユークリッド空間に埋め込まれている状況を考えましょう．このとき，球面上の 2 点の（球面上での）距離は 2 点を通る大円の劣弧の長さでした．これは，2 点を球面上で結ぶ曲線の，$\boldsymbol{R}^3$ の曲線としての長さ（$\boldsymbol{R}^3$ のリーマン計量から誘導された計量で測った長さ）の下限となります．このような状況を想定しています．これから学ぶ言葉で言えば「リーマン多様体としての等長埋め込み」です．

補足： もう 1 件，命題 1.5 の証明「これでいいか」という質問がありました．回答は省略いたします．

2 多重線型形式

前節に引き続き，V を $\boldsymbol{R}$ 上の**有限次元**線型空間，$n = \dim V$ としておく．

2.1 双対空間

写像の集合

$$V^* := \{\alpha\colon V \to \boldsymbol{R}\,;\ \alpha \text{ は線型写像}\}$$

に通常の方法で和とスカラ倍を定義して得られる線型空間を V の**双対空間** *dual space* という．V の基底

$$[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]$$

に対して $\sigma^j \in V^*$ $(j = 1, \dots, n)$ を

$$\sigma^j(\boldsymbol{v}) = v^j, \qquad \text{ただし}\quad \boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + v^n\boldsymbol{e}_n \tag{2.1}$$

とおくと，

$$[\sigma^1, \dots, \sigma^n] \tag{2.2}$$

は V^* の基底となる．これを基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する**双対基底** *dual basis* という．とくに

$$\sigma^j(\boldsymbol{e}_k) = \delta^j_k = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つ．

今，$[\boldsymbol{f}_k]$ を V のもう一つの基底とすると，

$$\boldsymbol{f}_k = \sum_{j=1}^n a^j_k \boldsymbol{e}_j \qquad (k = 1, \dots, n),$$

行列を用いれば

$$[\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n] = [\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n]A \qquad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

と書ける．ここで a^j_k は実数で，行列 A は n 次正則行列である．この A を基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ から $[\boldsymbol{f}_k]$ への**基底変換行列**とよぶ．

ここで $[\boldsymbol{e}_j]$ の双対基底を $[\sigma^j]$, $[\boldsymbol{f}_k]$ の双対基底を $[\mu^k]$ とすれば

$$\sigma^j = \sum_{k=1}^n a^j_k \mu^k \tag{2.4}$$

が成り立つ．

2009 年 4 月 20 日

有限次元線型空間 V とその双対空間 V^* は次元が一致するから，線型空間としては同型である．たとえば対応

$$V \ni \boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v^n\boldsymbol{e}_n \longleftrightarrow v^1\sigma^1 + \cdots + v^n\sigma^n \in V^*$$

は同型を与えるが，これは基底の取り方に依存するので，V と V^* の自然な同型とは言えない．しかし，V と V^* の双対 $(V^*)^*$ の間には次のような同型が存在する：

補題 2.1. 写像

$$\iota\colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \iota(\boldsymbol{v}) = \xi \in (V^*)^*, \qquad \xi(\alpha) = \alpha(\boldsymbol{v}) \quad \bigl(\alpha \in V^*\bigr)$$

は線型同型写像である．

この写像の定義は基底を用いていないから，V と $(V^*)^*$ は自然に同型になるといってよい．以下，同型写像 ι を通して V と $(V^*)^*$ を同一視することにする．補題 2.1 の ξ を $\boldsymbol{v}$ と同一視すれば $\boldsymbol{v}(\alpha) = \alpha(\boldsymbol{v})$ なので

$$\alpha(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}(\alpha) = \langle \alpha, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \alpha \rangle$$

などと書くことがある．

2.2 多重線型写像

定義 2.2. 線型空間 U, V, W に対して，写像 $\varphi\colon V \times W \to U$ が**双線型** *bilinear* であるとは，

- 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ を固定したとき $\varphi(\boldsymbol{a}, \cdot)\colon W \to U$ が線型写像であり，
- 任意の $\boldsymbol{p} \in W$ を固定したとき $\varphi(\cdot, \boldsymbol{p})\colon V \to U$ が線型写像となる

となることである．とくに，$U = \boldsymbol{R}$ のとき，φ は**双線型形式** *bilinear form* とよぶことがある．

3 つ以上の線型空間 $V_1, \dots, V_m$ の直積から線型空間 U への写像が m-**重線型** であるということも同様に定義する．

線型空間 V, W の双対空間の元 $\alpha \in V^*, \psi \in W^*$ に対して

$$\alpha \otimes \psi\colon V \times W \ni (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}) \longmapsto \alpha(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{p}) \in \boldsymbol{R}$$

と定めると $\alpha \otimes \psi$ は双線型形式である．ただし右辺は $\alpha(\boldsymbol{a})$ と $\psi(\boldsymbol{p})$ の実数としての積である．この $\alpha \otimes \psi$ を α と ψ の**テンソル積**という．$V \times W$ 上の双線型形式全体の集合に和とスカラ倍の構造を入れて得られる線型空間を

$$V^* \otimes W^* := \bigl\{\varphi\colon V \times W \to \boldsymbol{R} \mid \varphi \text{ は双線型}\bigr\}$$

を V^* と W^* の**テンソル積** *tensor product* という．テンソル積 $\alpha \otimes \psi$ は $V^* \otimes W^*$ の要素であるが，$V^* \otimes W^*$ の要素がすべてこの形で書けるわけではない．

煩雑さを避けるため，$V = W$ の場合を考える：

補題 2.3. 有限次元線型空間 V の双対空間 V^* の基底 $[\sigma^1, \dots, \sigma^n]$ に対して

$$\bigl\{\sigma^i \otimes \sigma^j \mid 1 \leqq i, j \leqq n\bigr\}$$

は $V^* \otimes V^*$ の基底を与える．とくに，$V^* \otimes V^*$ は n^2 次元線型空間である．

2.3 1 次変換

線型空間 V から W への線型写像全体の集合に線型空間の構造を与えたものを

$$\mathrm{Hom}(V,W) := \{T\colon V \to W \mid T \text{ は線型写像}\}$$

と書く．とくに $\mathrm{Hom}(V,V)$ は V 上の 1 次変換全体の集合である．

補題 2.4. 線型写像 $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ に対して $\varphi_T\colon V \times W^* \to \boldsymbol{R}$ を

$$\varphi_T\colon V \times W^* \ni (\boldsymbol{v},\alpha) \longmapsto \varphi_T(\boldsymbol{v},\alpha) = \alpha\,(T(\boldsymbol{v})) \in \boldsymbol{R}$$

で定めると，$\varphi_T \in V^* \otimes W$ で，対応 $\mathrm{Hom}(V,W) \ni T \mapsto \varphi_T \in V^* \otimes W$ は同型写像である．

とくに $V^* \otimes V$ は $\mathrm{Hom}(V,V)$ と同一視することができる．

2.4 2 次形式

双線型形式 $\varphi \in V^* \otimes V^*$ が**対称**であるとは

$$\varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \qquad \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$$

が成り立つことである．対称双線型形式のことを単に**2 次形式** *quadratic form* とよぶことがある．$\alpha,\beta \in V^*$ に対して

$$\alpha\cdot\beta := \frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta + \beta\otimes\alpha)$$

とおくと，これは 2 次形式である．“$\cdot$” を**対称積**とよぶ．

補題 2.5. n 次元線型空間 V 上の 2 次形式全体の集合は $V^* \otimes V^*$ の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次元部分空間である．とくに，$[\sigma^j]$ を V^* の基底とするとき，

$$\{\sigma^j\cdot\sigma^k \mid 1 \leqq j \leqq k \leqq n\}$$

は 2 次形式全体の空間の基底を与える．

とくに $[\boldsymbol{e}_j]$ を V の基底，$[\sigma^j]$ をその双対基底とするとき，2 次形式 φ に対して $\varphi_{ij} := \varphi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$ とおくと，

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{ii}\,\sigma^i\cdot\sigma^i + 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\varphi_{ij}\,\sigma^i\cdot\sigma^j \tag{2.5}$$

と表される．このとき $G := (\varphi_{ij})$ は対称行列となるが，これを 2 次形式 φ の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する表現行列とよぶ．以下は前回学んだ：

補題 2.6. 2 次形式 φ の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ に関する表現行列を G とするとき，

- G の固有値はすべて実数，
- G は直交行列によって対角化可能，かつ
- G の n 個の固有値のうち正のものの個数，負のものの個数，0 の個数は基底の取り方によらない．

特に，非退化な対称二次形式のことを**内積**と呼ぶのだった．

定義 2.7. V 上の非退化 2 次形式（内積) φ の表現行列の正の固有値の個数を l，負の固有値の個数を k とするとき，(l,k) $(l+k=\dim V)$ を φ の**符号数**という．

例 2.8. G を正則な n 次対称行列，$\varphi_G\colon \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を

$$\varphi_G(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) := {}^t\boldsymbol{v}G\boldsymbol{w}$$

と定めると φ_G は $\boldsymbol{R}^n$ の非退化な対称双線型形式を与える．とくに，G が単位行列のとき，φ_G は $\boldsymbol{R}^n$ の通常の内積

$$\varphi_G(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \sum_{j=1}^n v^j w^j$$

となる．これを**ユークリッド内積**という．一方，

$$G=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

とすると，

$$\varphi_G(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -v^1w^1+\sum_{j=2}^n v^j w^j.$$

となる．この内積を**ミンコフスキー内積**という．

とくに φ を明示する必要がない場合は，$\varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ のことを $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle$ などと書くこともある．

問題

1 (1) 式 (2.1) で定義された σ^j が V^* の要素であることを確かめなさい．
(2) 式 (2.2) の $[\sigma^j]$ が V^* の基底となることを示しなさい．
(3) 式 (2.3) の行列 A が正則であることを示しなさい．
(4) 式 (2.4) を示しなさい．
(5) 補題 2.1 を示しなさい．

2 (1) m 個の線型空間の直積上の m 重線型写像の定義を正確に述べなさい．
(2) 補題 2.3 を示しなさい．（ヒント：V の基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ を $[\sigma^j]$ がその双対基底となるようにとり，$\varphi\in V^*\otimes V^*$ に対して $\varphi_{ij}=\varphi(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$ とおくと，$\varphi=\sum\varphi_{ij}\sigma^i\otimes\sigma^j$ となる）

3 補題 2.4 を示しなさい．

4 (1) 補題 2.5 を示しなさい．
(2) 式 (2.5) を示しなさい．