2009 年 5 月 11 日 (2009 年 5 月 18 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 3

前回までの訂正

- 講義資料 2，1 ページ，下から 2 行目：ということ諦めれば ⇒ ということを諦めれば
- 講義資料 2，2 ページ，16 行目：リーマン多様体とするおき ⇒ リーマン多様体とするとき
- 講義資料 2，2 ページ, 補題 2.6：$\Phi \Rightarrow G$ （3 箇所）
- 板書について：線型空間とその双対空間の対応

$$V \ni v^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v^n\boldsymbol{e}_n \longmapsto v^1\sigma^1 + \cdots + v^n\sigma^n \in V^*$$

の右側が $\sigma^1\sigma^1 + \cdots + \sigma^n\sigma^n$ となっていたようです.

授業に関する御意見

- $(V^*)^*$（“V の双対空間” の双対空間）は定義が複雑でなかなか想像ができないと思ってしまいましたが，実は V と同一視できるということを知り，頭の中が少しスッキリしました.
  山田のコメント： 本当ですか？しかし，この程度のことで複雑，と思ってはいけません.
- ルールは守らないといけないですね．次回以降は 0 点にならないようにします.
  山田のコメント： はい，よろしく.
- 先生がとびはねるのがびっくりしました.
  山田のコメント： それくらいで驚かないでください.
- GW が楽しみです.
  山田のコメント： Gateway ですか？
- やはり，テストはつらいです...（笑）
  山田のコメント： なんで？
- 山田先生の講議（原文ママ）を授けて（原文ママ）いると，今まで難しく感じていたことがさほど難しい事ではないと思えてきます.「一言で説明できる」って大切ですね.
  山田のコメント： しかし，それは「分かった気になっている」だけでしかありません．自分で論理を再構成できるように理解するには，それからの各自の努力が必要です．講義はそのための「景気づけ」と思って下さい.
- プリントの配分（原文ママ；配布のことか？）など，とても親切な授業だと思いました．あと答案に赤ペンが入るなど，いままで大学の授業を受けた中で一番親切な（丁寧な）授業だと感じました.
  山田のコメント： はあ...「ガキ扱いしている」ということかもしれませんよ.
- “脱線” や “内積のすみか” などと独特の表現を使っていますが，これが楽しくて退屈しません．もっと使ってください.
  山田のコメント： はい
- 冗談が冴えてて好きです.
  山田のコメント： ついていけない，という人もいます.

- 自分も線型のように“型”という漢字にこだわっています．函数解析のときも“函”にこだわっていますが，関数のときは“関”にしています．
  山田のコメント： 何か基準があるんですか？

質問と回答

質問： 内積の定義で，双線形性と対称性を要求していましたが，対称性があるのなら，片方の変数についての線形性のみ要求すれば定義としては十分ではないでしょうか．

お答え： そうですね．

質問： 授業で V と $(V^*)^*$ は自然に同型になること言われていましたが，自然に同型になっているメリットは何なのでしょうか．

質問： 自然な同型対応に何か利点があるんでしょうか？同型対応で十分互いを同一視できると思いますが．

お答え： 座標や基底を特定しない議論ができる．線型空間 V と W の間の同型対応が，V や W の基底のとりかたによって違うものになってしまっては，同一視できた，とはいえないでしょう．

質問： $V \simeq (V^*)^*$ を示すときに $V \simeq V^* \simeq (V^*)^*$ としてもいいと思いますが，基底に依存していると思います．基底に依存しているとどのような不都合があるのですか？

お答え： 基底を取り替える毎に同型写像が変わる．

質問： V と V^* の間に自然な同型が存在しないのでしょうか？

お答え： 「自然」の定義にもよります．自然に基底が入る状況であれば，自然な同型が存在します．しかし，大抵の場合，無限個ある基底のうちどれが「自然」であるかを決めることができないので，基底を固定することによる対応関係は「自然ではない」ことになります．なお，授業で扱ったように V に内積が与えられているなら，自然な同型が存在します．

質問： V と $(V^*)^*$ を同一視するときは，特に断りがなければ同型写像 ι（山田注：講義で挙げた写像）を用いると考えてよいですか．

お答え： よいです．

質問： プリントや講義では $V^* \otimes W^*$ は定義されていますが，講義資料 p. 5 の $V^* \otimes W$ は定義されていないと思います．

お答え： たしかにそうですね．$V = (V^*)^*$ と同一視して，定義します．

質問： $V \times W$ 上の双線型形式全体を形式的な記号として $V^* \otimes W^*$ としましたが，これはベクトル空間としての V^* と W^* のテンソル積と自然に同型ですよね？それをきちんと言わないと補題 2.4 の記号は $V^* \otimes (W^*)^*$ としないとまずいと思います．

お答え： ここではテンソル積の定義を“ $V \times W$ 上の双線型形式全体”としてしまいました．（そのほうが面倒が少ない？）ご指摘はごもっともですが，いずれにせよ $(W^*)^* = W$ ですので，ご自分の定義にしたがっていただいても何ら問題はありません．

質問： $\alpha \otimes \psi \in V^* \otimes W^*$（山田注：$\alpha \in \mathcal{V}^*$, $\psi \in W^*$ としているようです）とかけるみたいですが，$\{\alpha \otimes \psi \,|\, \alpha \in V^*, \psi \in W^*\}$ を完備化などをして，もっと拡張しても $V^* \otimes W^*$ といっち（原文ママ）はしないのですか？するのですか？

お答え： 完備化ってなんでしょうか．講義で説明したように $\{\alpha \otimes \psi \,|\, \alpha \in V^*, \psi \in W^*\}$ が生成する $V^* \otimes W^*$ の部分空間は $V^* \otimes W^*$ に一致します．

質問： p.4 の下から 4 行目に "煩雑さを避けるため $V=W$ の場合を考える" と書いてありますが，$V\neq W$ のとき，補題 2.3 はどうなるんですか？

お答え： V^* の基底 $\{\sigma^j\}$, W^* の基底 $\{\mu^l\}$ に対して $\{\sigma^j\otimes\mu^l\}$ は $V^*\otimes W^*$ の基底をなす．とくに $V^*\otimes W^*$ の次元は $\dim V\dim W$ である．

質問： 一次形式は線型写像，二次形式は前回と今回の授業で出てきましたが，（n が 3 以上での）「n 次形式」とはどのようなものですか？

お答え： ベクトル空間 V $V^*\otimes V^*\otimes V^*$ 元（で対称性をもつもの）すなわち，三重線型写像（定義は自分で発明すること）$C\colon V\times V\times V\to \boldsymbol{R}$ （で，$C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ に対して対称であるもの）のこと．

質問： 双対空間に使う記号は∗なのですか，それとも $\ast$ ですか.

お答え： 区別はしていないようです.

質問： この授業では，内積と単にいう場合は，それは正値ではなく，非退化なものと解釈していいですか？

お答え： 状況により使い分けます.「正値でないことを仮定することはまずないです.

質問： (2.2) $[\sigma^1,\dots,\sigma^n]$ はベクトルなんですか？

お答え： いいえ.

質問： 多様体に座標を入れるのは，多様体上で微積分をやるためだと聞きましたが，多様体上でテンソル（場）を考えるのは，多様体上で線型代数を扱うためでしょうか.

お答え： 多次元の，微積分で扱える量を表すためです.

質問： V が無限次元線型空間の場合，一般に $V\subset(V^*)^*$ となる事実は直感的にはどのように理解すれば良いですか.

お答え： 関数解析の本を見てごらんなさい.

質問： 対称双線型形式の次元が $\frac{1}{2}n(n+1)$ であるのは，n 次対称行列の上三角成分が $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個である，という認識でいいでしょうか.

お答え： いいです.

質問： 講義の中で「対称双対線型形式全体」（原文ママ：双線型のことか）というのが出てきましたが，「〜形式」と言う言葉にあまりなじみがありません．この場合では「対称双対線型となる空間の全体」というような意味でよろしいでしすか？

お答え： いいえ，よろしくありません.「対称双線型形式」で一語の名詞です.

質問： Riemannian mfd. は必ず $\boldsymbol{R}^A$ (A: index set) とか L^4 のようにもっと大きな空間に入っていなくてもいいですか？

お答え： いいです．多様体の本来の定義は「外の空間を考えない」ものです.

質問： 無限次元 Riemannian mfd. は存在するんですか？存在するのならどのようなものなのでしょうか.

お答え： 内積をもつ無限次元線型空間はどんなものだったでしょうか？

3 リーマン多様体

3.1 多様体

可微分多様体 *differentiable manifold* とは，ハウスドルフ位相空間 M と M 上の C^∞ 級**アトラス** *atlas* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \,|\, \alpha \in A\}$ の組のことである．ただし，各添字 $\alpha \in A$ に対して $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は M の開集合 U_α と同相写像 $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \boldsymbol{R}^n$ の組で次を満たすものである：(1) $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$, (2) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ が空でない限り可微分同相写像である．この n を多様体 M の**次元** *dimension* といい，$n = \dim M$ と書く．

可微分多様体のことを単に多様体ということがある．さらに，多様体 $(M, \mathcal{A})$ のことを，アトラスを明示せずに多様体 M と書くのが普通である．

アトラス $\mathcal{A}$ の要素 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ は M の**局所座標系** *local coordinate system* あるいは**チャート** *chart* とよぶ．とくに点 $p \in U_\alpha$ に対して $\varphi_\alpha(p)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の要素であるから，$\varphi_\alpha(p) = \bigl(x^1(p), \dots, x^n(p)\bigr)$ と書いて (x^j) を M の局所座標系とよぶことが多い．

可微分多様体 M 上の関数 $f\colon M \to \boldsymbol{R}$ が C^∞ 級であるとは任意のチャート $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対して $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \boldsymbol{R}^n$ 上で定義された可微分関数となることである．ここで $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は，関数 f の，局所座標 $\varphi_\alpha = (x^j)$ による表現と見なすことができることに注意する．C^∞ 級関数のことを単に**可微分関数** *differential function* という．M 上可微分関数全体の集合 $\mathcal{F}(M)$ には，通常の関数の和・積を用いて可換環の構造を入れることができる．

多様体 $(M, \mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$ に対して，M の開集合 U と同相写像 $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \boldsymbol{R}^n$ が**適合的**とは，任意の α に対して $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ が微分同相写像となることである．通常，多様体 M のアトラス $\mathcal{A}$ としては，極大のものをとる．すなわち，(U, φ) が $\mathcal{A}$ と適合的なら $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ が成り立つものとする．

3.2 パラコンパクト性と単位の分割

定義 3.1. 位相空間 M が**パラコンパクト** *paracompact* であるとは，M の任意の開被覆 $\{U_\alpha \,|\, \alpha \in A\}$ に対して次をみたす開被覆 $\{V_\beta \,|\, \beta \in B\}$ が存在することである：

- 各 $\beta \in B$ に対して $V_\beta \subset U_\alpha$ を満たす $\alpha \in A$ が存在する．
- 任意の β に対して $V_{\beta'} \cap V_\beta \neq \emptyset$ となる $\beta' \in B$ は有限個である．

多様体 M がパラコンパクトであるとは，M が位相空間としてパラコンパクトとなることである．

次は容易に示すことができる．

補題 3.2. パラコンパクト多様体の部分多様体はパラコンパクトである．また，パラコンパクト多様体同士の積多様体はまたパラコンパクトである．

命題 3.3 (単位の分割)**.** パラコンパクト多様体 M 上の可微分関数 $\eta_\beta \in \mathcal{F}(M)$ の族 $\{\eta_\beta\}$ で次を満たすものが存在する：

2009 年 5 月 11 日 (2009 年 5 月 18 日訂正)

- 各 β に対して $0 \leqq \eta_\beta \leqq 1$.
- 各 β に対して $V_\beta = \{p \in M \mid \eta_\beta(p) \neq 0\}$ とおくと，$\overline{V_\beta}$ はコンパクトで，一つの局所座標系の定義域に含まれる．
- 各 β に対して $V_\beta \cap V_{\beta'} \neq \emptyset$ を満たす β' は有限個.
- $\sum_{\beta\in B} \eta_\beta = 1$.

この 最後の条件の総和は，3 番目の条件より有限和となる．命題 3.3 $\{\eta_\beta\}$ を M 上の**単位の分割** *partition of unity* という．単位の分割の証明は，たとえば，松島与三「多様体入門」II 章 §14 を見よ．

3.3 接空間と余接空間

多様体 M 上の点 p を固定するとき，線型写像 $X\colon \mathcal{F}(M) \to \boldsymbol{R}$ でライプニッツ・ルール $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$ を満たすものを M の p における**接ベクトル** *tangent vector* とよぶ．p を含む M の局所座標系 $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ をとり，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p : \mathcal{F}(M) \ni f \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p f = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j}(\varphi(p)) \in \boldsymbol{R}$$

は p における接ベクトルである．M の p における接ベクトル全体の集合を M の p における**接空間**あるいは**接ベクトル空間**といい，T_pM と書く．多様体 M の次元を n とすれば, T_pM は

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right] \tag{3.1}$$

で生成される n 次元線型空間である．もう一つの局所座標系 $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ に対して座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}\colon (x^j) \mapsto (y^l)$ を考えれば,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p \tag{3.2}$$

となる．一方，$X \in T_pM$ を

$$X = \sum_{j=1}^n X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{k=1}^n \tilde{X}^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_p$$

とすれば,

$$\tilde{X}^k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p) X^j \tag{3.3}$$

が成り立つ．

線型空間 T_pM の双対空間を T_p^*M と書き，M の p における**余接空間** *cotangent space* という．とくに，基底 (3.1) の双対基底を

$$\left[(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\right] \tag{3.4}$$

と書く．(3.2) を用いれば,

$$(dy^k)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p)(dx^j)_p \tag{3.5}$$

を得る．

3.4 接束とベクトル場

n 次元多様体 M 上の各点における接空間を集めて得られる集合

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$$

を M の**接束** *tangent bundle* という．TM から M への自然な射影を π と書く：$\pi(X) = p$ $(X \in T_pM)$．M の各チャート $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ に対して

$$\tilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \ni X = \sum_{j=1}^{n} X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \longmapsto \bigl(\varphi(p), X^1, \dots, X^n\bigr) \in \varphi(U) \times \boldsymbol{R}^n$$

を TM の座標系と見なすことにより，TM には $2n$ 次元多様体の構造を入れることができる．

可微分写像 $X\colon M \to TM$ が $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ (M の恒等写像) を満たすとき，X を**ベクトル場**とよぶ．言い換えれば，X は M の各点 p に対して T_pM の要素を対応させる「滑らかな」対応である．局所座標系を用いれば

$$X = \sum_{j=1}^{n} X^j(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (\ X^j(x^1, \dots, x^n) \text{ は } (x^k) \text{ の可微分関数}) \tag{3.6}$$

と書ける．ただし $\partial/\partial x^j$ は $p \mapsto (\partial/\partial x^j)_p$ で与えられる局所的なベクトル場である．

3.5 接束から誘導されるベクトル束

接束と同様にして $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$ に $2n$ 次元多様体の構造を入れて**余接束** *cotangent bundle* という．また，余接空間のテンソル積を用いて，たとえば

$$T^*M \otimes T^*M := \bigcup_{p\in M} T_p^*M \otimes T_p^*M$$

などを考えることができる．

一般に，多様体 E, M，可微分写像 $\pi\colon E \to M$ の組が次を満たすとき，(E, M, π) を M 上の**ベクトル束** *vector bundle* という：

- π は全射．
- 各 $p \in M$ に対して $E_p = \pi^{-1}(p)$ には N 次元線型空間の構造が与えられている（したがって，M の次元を n とすると E の次元は $N + n$ となる）．
- M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と可微分同相写像 $\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^N$ の族 $\{\tilde{\varphi}_\alpha\}$ で，$\tilde{\varphi}_\alpha|_{E_p}\colon E_p \to \{p\} \times \boldsymbol{R}^N \simeq \boldsymbol{R}^N$ が線型同型写像となるものが存在する．

ここで挙げた TM, T^*M, $T^*M \otimes T^*M$ などは M 上のベクトル束である．

ベクトル束 (E, M, π)（簡単のためにベクトル束 E と書くこともある）の**切断** *section* とは，

$$\xi\colon M \longrightarrow E \qquad \pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$$

となる可微分写像のことである．とくに，ベクトル場は接束の切断である．ベクトル束 E の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と書く．習慣にしたがって，ベクトル場全体の集合 $\Gamma(TM)$ は $\mathfrak{X}(M)$ とも書く．

一般に $\Gamma(E)$ は線型空間の構造をもつ．さらに，$\mathcal{F}(M)$ を係数環とする加群の構造を持っている．

3.6 リーマン計量

n 次元多様体 M 上のベクトル束

$$S(T^*M\otimes T^*M)=\cup_{p\in M}S(T_p^*M\otimes T_p^*M),\qquad S(T_p^*M\otimes T_p^*M)=\{\,T_pM\ \text{上の（対称）2 次形式}\,\}$$

の切断を，M 上の対称 2 次形式の場，あるいは単に 2 次形式という．

補題 3.4. 多様体 M の各点 p に，T_pM の 2 次形式 Q_p を対応させる規則 $Q\colon p\mapsto Q_p$ 与えられているとき，Q が $S(T^*M\otimes T^*M)$ の（滑らかな）切断となるための必要十分条件は，任意の滑らかなベクトル場 X, $Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$M\ni p\longmapsto Q_p(X_p,Y_p)\in\boldsymbol{R}$$

が可微分関数となることである．

証明. M の局所座標系 $(U,\varphi=(x^j))$ に対して $E=S(T_p^*M\otimes T_p^*M)$ の基底を

$$\left[(dx^j)_p\cdot(dx^k)_p\,|\,1\leqq j\leqq k\leqq n\right]$$

ととることができる．ただし $\cdot$ は対称積である．E の可微分多様体としての構造は，この基底に関する成分を用いて定義する．いま，

$$Q_{ij}(p)=Q_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$$

とおけば，$Q_{ij}=Q_{ji}$ だから

$$\begin{aligned}Q_p&=\sum_{i,j=1}^n Q_{ij}(p)\,(dx^i)_p\otimes(dx^j)_p\\&=\sum_{j=1}^n Q_{jj}(p)\,(dx^j)_p\cdot(dx^j)_p+2\sum_{1\leqq j<k\leqq n}Q_{jk}(p)\,(dx^j)_p\cdot(dx^k)_p\end{aligned}$$

とおけるので，E のチャートの定義のしかたより，Q が M から E への可微分写像となるための必要十分条件は各 Q_{ij} が可微分となることである．

この事実と，ベクトル場の局所表示を用いれば結論に至ることができる．□

定義 3.5. 多様体 M 上の**リーマン計量** *Riemannian metric*（**擬リーマン計量** *pseudo Riemannian metric*）とは，$S(T^*M\otimes T^*M)$ の切断 g で，各点 p で g_p が T_pM の正値（非退化）な内積を与えるものである．

多様体 M と M 上のリーマン計量 g の組 (M,g) を**リーマン多様体** *Riemannian manifold* とよぶ．

以下，(M,g) をリーマン多様体とする．M の局所座標系 $(U,(x^j))$ に対して

$$g=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx^i\otimes dx^j\qquad g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

と表すと，g_{ij} は U 上の滑らかな関数で，行列 (g_{ij}) は正値な対称行列である．

リーマン計量 g を明示する必要がない場合は，$g(X,Y)$ のことを $\langle X,Y\rangle$ と表すこともある．

定理 3.6. 任意のパラコンパクト多様体上にリーマン計量が存在する．

証明．命題 3.3 の単位の分割 $\{\eta_\beta\}$ をとり，$V_\beta=\{p\in M\,|\,\eta_\beta(p)\neq 0\}$ とする．各 β に対して V_β はひとつの局所座標系に入るので，その座標を (x^j) とおき，

$$g_\beta := \sum_{i=1}^{n} dx^i\otimes dx^i$$

とおくと，g_β は V_β 上のリーマン計量である．V_β の外では η_β は 0 になるので，$\eta_\beta g_\beta$ は M 全体で定義された 2 次形式となるが,

$$g\colon\ = \sum_\beta \eta_\beta g_\beta$$

とおけば，g が正値となることが容易に示される． □

3.7 リーマン多様体の例 (1)

一般に，多様体 M 上には無数のリーマン計量を定義することができる．実際， g を M のリーマン計量 $f\in\mathcal{F}(M)$ を正の値をとる関数とすると，fg もまたリーマン計量であるから，M のリーマン計量「全体」は,「無限次元」である．しかし，特別な多様体には，その特別な構造に依存して「標準的な」リーマン計量が与えられることがある．

例 3.7 (ユークリッド空間)**.** $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元多様体と見なすとき，$T_p\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ と同一視できる．すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ の標準座標系を $(x^1,\dots,x^n)$ とするとき,

$$T_p\boldsymbol{R}^n \ni X = \sum X^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \leftrightarrow (X^1,\dots,X^n)\in\boldsymbol{R}^n.$$

したがって $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な内積を $T_p\boldsymbol{R}^n$ の内積と見なすことにより $\boldsymbol{R}^n$ にリーマン計量 g_0 を与えることができる．標準座標を用いれば

$$g_0 = dx^1\otimes dx^1 + dx^2\otimes dx^2+\cdots+dx^n\otimes dx^n$$

である．

例 3.8 (部分多様体)**.** 多様体 N の部分集合 M が N の部分多様体となっているとすると，各 $p\in M$ に対して T_pM は T_pN の線型部分空間となっている．もし N にリーマン計量が g 与えられているならば，g_p を T_pM に制限すれば，これは T_pM の内積を与えているので M にリーマン計量を与えることになる．これを N のリーマン計量から誘導される M の計量とよぶ.

例 3.9 (球面)**.** ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準座標系を $(x^1,\dots,x^{n+1})$ とするとき，陰関数定理より

$$S^n := \left\{\boldsymbol{x}=(x^1,\dots,x^{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid \langle x,x\rangle=\sum_{j=1}^{n+1}(x^j)^2=1\right\}$$

は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の n 次元部分多様体となる．したがって $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準計量から S^n のリーマン計量が誘導される．これを S^n の標準計量という.

例 3.10 (ミンコフスキー空間). 線型空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の符号数 $(n,1)$ をもつ内積

$$\langle X, Y\rangle_L := -X^0Y^0 + X^1Y^1 + \dots + X^nY^n \qquad X = (X^0, X^1, \dots, X^n), \quad Y = (Y^0, Y^1, \dots, Y^n)$$

を**ミンコフスキー内積**とよび，この内積が定義された $\boldsymbol{R}^{n+1}$ を**ミンコフスキー的ベクトル空間**という．ミンコフスキー空間のベクトル X が $\langle X, X\rangle_L > 0$ を満たすとき，X は**空間的**，$\langle X, X\rangle_L < 0$ を満たすとき**時間的**，$\langle X, X\rangle_L = 0$ を満たすとき**零的** または**光的**という．これらの用語は相対論に由来する．

$\boldsymbol{R}^{n+1}$ を多様体と見なし，標準座標系を $(x^0, \dots, x^n)$ と書くときユークリッド空間の場合と同様にミンコフスキー内積から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上に擬リーマン計量 g_L が定義される：

$$g_L := -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n$$

擬リーマン多様体 $(\boldsymbol{R}^{n+1}, g_L)$ は**ミンコフスキー空間**とよばれ，（計量も含め）L^{n+1} と表すことがある．

例 3.11 (双曲空間). まず，次のことを確認する：

> ミンコフスキ—的ベクトル空間の時間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直交補空間 $\{X \mid \langle X, \boldsymbol{v}\rangle_L = 0\}$ は空間的ベクトルと零ベクトルからなる．

いま L^{n+1} をミンコフスキー的ベクトル空間と同一視して

$$H^n_{\pm} := \{\boldsymbol{x} = (x^0, \dots, x^n) \in L^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = -1\}$$

とおくと，陰関数定理より $H^n_{\pm}$ は L^{n+1} の部分多様体である．しかし $H^n_{\pm}$ は連結ではない（なぜか）ので，その連結成分

$$H^n := \{\boldsymbol{x} = (x^0, \dots, x^n) \in L^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = -1, x^0 > 0\}$$

をとると，L^{n+1} の連結な部分多様体が得られる．

点 $\boldsymbol{x} \in H^n$ に対して

$$T_{\boldsymbol{x}}H^n = \{\boldsymbol{v} \in L^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle_L = 0\}$$

となる．すなわち，接空間は時間的ベクトル $\boldsymbol{x}$ の直交補空間だから，空間的ベクトルからなる．このことは，ミンコフスキー内積の $T_{\boldsymbol{x}}H^n$ への制限が正値であることを示している．したがって L^{n+1} の擬リーマン計量 g_L は H^n 上の**リーマン計量** g_H を誘導する．リーマン多様体 (H^n, g_H) を**双曲空間** *hyperbolic space* とよぶ．

問題

1 補題 3.4 を証明しなさい．

2 (M, g) をリーマン多様体，$(x^1, \dots, x^n)$, $(y^1, \dots, y^n)$ を局所座標系とする．

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{g}_{kl}\, dy^k \otimes dy^l$$

と表すとき，

$$\tilde{g}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l} g_{ij}$$

が成り立つことを確かめなさい．

3 (1) 定理 3.6 の証明を完全にしなさい.

(2) 定理 3.6 の「リーマン計量」を「擬リーマン計量」に変えると，結論は正しくない．証明のどの部分がうまくいかなくなるのか.

4 $\boldsymbol{R}^2$ のユークリッド計量 g_0 の極座標 (r,θ) に関する成分表示を求めなさい.

5 S^n の開集合

$$U = \{(x^1,\dots,x^{n+1}) \in S^n \,|\, x^{n+1} \neq -1\}$$

上で座標系

$$\xi^j = \frac{x^j}{x^{n+1}+1} \qquad (j=1,\dots,n)$$

をとる（南極からの立体射影）．S^n の標準計量を座標系 (ξ^j) を用いて表示しなさい.

6 ミンコフスキー的ベクトル空間の時間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直交補空間 $\{X \mid \langle X,\boldsymbol{v}\rangle_L = 0\}$ は空間的ベクトルと零ベクトルからなることを示しなさい.

7 例 3.11 について

(1) $H^n_{\pm}$ は連結ではないが，H^n は連結であることを示しなさい.

(2) H^n は $\boldsymbol{R}^n$ と微分同相であることを示しなさい.

(3) $\varphi\colon H^n \to \boldsymbol{R}^n$ を

$$\varphi(x^0,\dots,x^n) = (\xi^1,\dots,\xi^n) = \frac{1}{1+x^0}(x^1,\dots,x^n)$$

とおくと，

$$\varphi(H^n) = B^n = \{(\xi^1,\dots,\xi^n)\in \boldsymbol{R}^n \mid \sum(\xi^j)^2 < 1\}$$

で，φ は H^n から B^n の可微分同相写像であることを示しなさい（立体射影).

(4) 上の問いの (ξ^k) を H^n の座標と見なし, その座標に関する計量 g_H の表示を求めなさい．この座標による双曲空間の表示を Poincarè モデルとよぶ.

(5) $\psi\colon H^n \to \boldsymbol{R}^n$ を

$$\psi(x^0,\dots,x^n) = (\eta^1,\dots,\eta^n) = \frac{1}{x^0-x^n}(x^1,\dots,x^{n-1},1)$$

とおくと，

$$\psi(H^n) = \boldsymbol{R}^n_+ = \{(\eta^1,\dots,\eta^n) \,|\, \eta^n > 0\}$$

で，ψ は H^n から $\boldsymbol{R}^n_+$ の可微分同相写像であることを示しなさい.

(6) 上の問いの (η^k) を H^n の座標と見なし, その座標に関する計量 g_H の表示を求めなさい．この座標による双曲空間の表示を上半空間モデルとよぶ.