2009 年 5 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 4

お知らせ

- サーバクラッシュのため，web ページの公開が停止しています．5 月中をめどに復旧する予定です．

前回までの訂正

- 講義資料 3，2 ページ，一番下の質問：もっと格調しても ⇒ もっと拡張しても
- 講義資料 3，3 ページ，上から 4 番目のお答え：家庭 ⇒ 仮定
- 講義資料 3，3 ページ，上から 2 番目のお答え：いいえす ⇒ いいです
- 講義資料 3，6 ページ，ベクトル束の定義の 2 番目：$\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^n$ ⇒ $\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \boldsymbol{R}^n$
- 講義資料 3，7 ページ，補題 3.4 の証明：ことができるただし ⇒ ことができる．ただし
- 講義資料 3，8 ページ，例 3.8：リーマン計量が g ⇒ リーマン計量 g が
- 講義資料 3，9 ページ，2 行目："+" をひとつ入れる．
$$\langle X, Y\rangle_L := -X^0Y^0 + X^1Y^1 + \dots X^nY^n \quad \Rightarrow \quad \langle X, Y\rangle_L := -X^0Y^0 + X^1Y^1 + \dots + X^nY^n$$
- 講義資料 3，10 ページ，問題 6：と零ベクトルからなるころを示しなさい ⇒ と零ベクトルからなることを示しなさい
- 黒板に「座標変換」を "$\psi^{-1} \circ \varphi$" と書いていたそうです．"$\psi \circ \varphi^{-1}$ です．
- 同じことですが，$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ ではなく $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ です．

授業に関する御意見

- 多様体を 1 回の講義で終わらせてしまうなんて，ビックリしました．
  山田のコメント： だって去年やったじゃないですか．
- 3.6 リーマン計量以降の話をもう少しして欲しかったです．問題もリーマン計量についての問題ばかりですし．
  山田のコメント： もうしわけありません．今回もう少し言及します．
- 本試験でどの程度の問題が出題されるのかが気になります．
  山田のコメント： 気にしないでください．
- 難しいです．
  山田のコメント： それはよかった．大学院に来てまでやさしいことをやってちゃいけませんよね．
- 問題が難しすぎるのでヒントをのせてください．
  山田のコメント： そんなに難しいですか？もし，手がつかないのなら手がついたところまでで提出してください．

- 提出用紙の問題回答欄が足りません.
  山田のコメント： ごめんなさい.
- かまぼこ板については笑いが止まりません.
  山田のコメント： そうですか？

質問と回答

質問： 多様体が連結でないと，講義中に話していた次元の話は成り立たないのでは？たとえば $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^2$ の disjoint union とか.

お答え： そうですね．やはり「次元が同じ」仮定が必要ですね.

質問： 講義資料 3, p.10 の問題 3 についてですが，任意のパラコンパクト多様体上にリーマン計量が存在するという定理がありますが，この命題においてリーマンを擬リーマンに変えると結論は正しくないとあります． g_p が T_pM に正値な内積を与えているならば非退化な内積を与えるので擬リーマン計量も存在するような気がするのですが，擬リーマン計量の定義を私がかんちがいしているのでしょうか.

お答え： 形式的かも知れませんが. . . 与えられた符号をもつ擬リーマン計量があるか，という問題と思って下さい.

質問： リーマン計量の定義で,，講義では g がベクトル束 $T^*M \otimes T^*M$ の切断で $\sim$ となっていましたが，レジュメでは $S(T^*M \otimes T^*M)$ の切断で $\sim$ なっています．$S(T^*M \otimes T^*M)$ の S は何を意味しているのでしょうか？

お答え： ごめんなさい．説明してませんでしたっけ．$T^*M \otimes T^*M$ の元のうち対称 (Symmetric) なものだけをあつめたものです.

質問： $TM = \cup_{p\in M} T_pM$ 射影 $\pi\colon TM \ni x \mapsto p \in M$ が一意的に定まる写像となるのは自明なのでしょうか.

お答え： 自明の定義にもよりますが，定義からすぐ分かります：TM は T_pM たちの和集合で $p \neq q$ なら $T_pM \cap T_qM = \emptyset$ (disjoint union だから) なので，$X \in TM$ ならば，$X \in T_pM$ となる $p \in M$ がただ一つ存在します．この p を $\pi(X)$ とすればよいのです.

質問： $TM = \cup_p TpM$ が値域を書くため以外にも重要なことってあるんですか？ぶ厚い本にはたいていのっているんですが. . . どうつかわれるのかがおおまかに知りたいです.

お答え： ベクトル束の（自明でない）もっとも簡単な例ですね．ベクトル束は多様体の微分幾何学の重要な概念ですから，それはもういろいろな場面で使われます．おおまかなんてとてもとても．数や行列のように自然なもの，と思って下さい.

質問： リーマン計量の定義を “各点 $p \in M$ に T_pM の正値な内積 g_p を対応させる対応 $p \mapsto g_p$” と書く方が分かりやすいとおもいますが，講義のようにベクトル束や切断の言葉を使って定義しているのは何か利点あるのですか？

お答え： (1) なめらかさを座標やベクトル場など余計なものを使わずに定義したい．(2) 他の様々なテンソル場などと統一的な定義にしたい.

質問： M のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と書くとのことでしたが，$\mathfrak{X}$ は何と読むのでしょうか．あと何の言語の文字なのですか.

お答え： えっくす．ドイツ語.

質問： 可微分多様体の定義で，第二加算公理は仮定しないのでしょうか？仮定しなくてもこの講義では困ら

ないのでしょうか？もしこれについて講義中に言及してたらごめんなさい．

お答え：　仮定します．しないと困ります．

質問：　M はコンパクト，σ コンパクト，パラコンパクトという仮定は，何を基準に仮定を使い分けているのでしょうか．

お答え：　通常「多様体」はパラコンパクト性/ σ コンパクト性を仮定します．適当な教科書を見てご覧なさい．「コンパクト性」は非常に特殊な性質です．「多様体」とただ言ったときに「コンパクト」まで仮定することはまずありません．（あたりまえですね．前回の資料にあった例はコンパクトなものだけではありませんでした．）

質問：　リーマン多様体が $\boldsymbol{R}^A$ に入らない例があるでしょうか．

お答え：　ありません．

質問：　多様体をもっと大きい次元に埋め込むことは可能でしょうか？その時にリーマン計量を統一的にあつかうことはできるのでしょうか．

お答え：　前半：最初の講義で少しだけコメントを加えた．後半：どういう意味でしょう．

質問：　Hilbert 空間の場合，中線定理が成り立つノルムは 1 つしか存在しませんが，多様体の構造をリーマン計量の族のようなもので決定することはできるのでしょうか．

お答え：　前半と後半の関係がよくわかりません．「よいリーマン計量が入る多様体」ということで多様体が決められるか？ということでしょうか？

質問：　なぜ切断というんでしょか．

お答え：　かまぼこを横に切ってください．

質問：　毎回の課題の解答はないのでしょうか．

お答え：　必要なら尋ねてください．その際，自分がどこまで考えたかを説明してくださいね．あるいは，受講者全員で分担して解答を作るなんていうのもよい勉強．

4 リーマン多様体の例

4.1 リーマン多様体の例 (1)

一般に，多様体 M 上には無数のリーマン計量を定義することができる．実際， g を M のリーマン計量 $f \in \mathcal{F}(M)$ を正の値をとる関数とすると，fg もまたリーマン計量であるから，M のリーマン計量「全体」は，「無限次元」である．しかし，特別な多様体には，その特別な構造に依存して「標準的な」リーマン計量が与えられることがある．

例 4.1 (ユークリッド空間)**.** $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元多様体と見なすとき，$T_p\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ と同一視できる．すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ の標準座標系を $(x^1,\dots,x^n)$ とするとき，

$$T_p\boldsymbol{R}^n \ni X = \sum X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \leftrightarrow (X^1,\dots,X^n) \in \boldsymbol{R}^n.$$

したがって $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な内積を $T_p\boldsymbol{R}^n$ の内積と見なすことにより $\boldsymbol{R}^n$ にリーマン計量 g_0 を与えることができる．標準座標を用いれば

$$g_0 = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + \cdots + dx^n \otimes dx^n$$

である．

例 4.2 (部分多様体)**.** 多様体 N の部分集合 M が N の部分多様体となっているとすると，各 $p \in M$ に対して T_pM は T_pN の線型部分空間となっている．もし N にリーマン計量 g が与えられているならば，g_p を T_pM に制限すれば，これは T_pM の内積を与えているので M にリーマン計量を与えることになる．これを N のリーマン計量から誘導される M の計量とよぶ．

例 4.3 (球面)**.** ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準座標系を $(x^1,\dots,x^{n+1})$ とするとき，陰関数定理より

$$S^n := \left\{ \boldsymbol{x} = (x^1,\dots,x^{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} (x^j)^2 = 1 \right\}$$

は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の n 次元部分多様体となる．したがって $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準計量から S^n のリーマン計量が誘導される．これを S^n の標準計量という．

例 4.4 (ミンコフスキー空間)**.** 線型空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の符号数 $(n,1)$ をもつ内積

$$\langle X, Y\rangle_L := -X^0Y^0 + X^1Y^1 + \cdots + X^nY^n \qquad X = (X^0, X^1, \dots, X^n), \quad Y = (Y^0, Y^1, \dots, Y^n)$$

を**ミンコフスキー内積**とよび，この内積が定義された $\boldsymbol{R}^{n+1}$ を**ミンコフスキー的ベクトル空間**という．ミンコフスキー空間のベクトル X が $\langle X, X\rangle_L > 0$ を満たすとき，X は**空間的**，$\langle X, X\rangle_L < 0$ を満たすとき**時間的**，$\langle X, X\rangle_L = 0$ を満たすとき**零的** または**光的**という．これらの用語は相対論に由来する．

2009 年 5 月 18 日

$\boldsymbol{R}^{n+1}$ を多様体と見なし，標準座標系を $(x^0,\dots,x^n)$ と書くときユークリッド空間の場合と同様にミンコフスキー内積から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上に擬リーマン計量 g_L が定義される：

$$g_L := -dx^0\otimes dx^0 + dx^1\otimes dx^1 + \cdots + dx^n\otimes dx^n$$

擬リーマン多様体 $(\boldsymbol{R}^{n+1}, g_L)$ は**ミンコフスキー空間**とよばれ，（計量も含め）L^{n+1} と表すことがある．

例 4.5 (双曲空間)**.** まず，次のことを確認する：

> ミンコフスキー的ベクトル空間の時間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直交補空間 $\{X \mid \langle X,\boldsymbol{v}\rangle_L = 0\}$ は空間的ベクトルと零ベクトルからなる．

いま L^{n+1} をミンコフスキー的ベクトル空間と同一視して

$$H^n_{\pm} := \{\boldsymbol{x} = (x^0,\dots,x^n)\in L^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = -1\}$$

とおくと，陰関数定理より $H^n_{\pm}$ は L^{n+1} の部分多様体である．しかし $H^n_{\pm}$ は連結ではない（なぜか）ので，その連結成分

$$H^n := \{\boldsymbol{x} = (x^0,\dots,x^n)\in L^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = -1, x^0>0\}$$

をとると，L^{n+1} の連結な部分多様体が得られる．

点 $\boldsymbol{x}\in H^n$ に対して

$$T_{\boldsymbol{x}}H^n = \{\boldsymbol{v}\in L^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle_L = 0\}$$

となる．すなわち，接空間は時間的ベクトル $\boldsymbol{x}$ の直交補空間だから，空間的ベクトルからなる．このことは，ミンコフスキー内積の $T_{\boldsymbol{x}}H^n$ への制限が正値であることを示している．したがって L^{n+1} の擬リーマン計量 g_L は H^n 上の**リーマン計量** g_H を誘導する．リーマン多様体 (H^n, g_H) を**双曲空間** *hyperbolic space* とよぶ．

4.2 誘導計量

4.2.1 関数の微分

多様体 M の点 p における接ベクトル $X\in T_pM$ は $\mathcal{F}(M)$ から $\boldsymbol{R}$ への写像と見なすことができたが，ここで, 関数 $f\in\mathcal{F}(M)$ を固定して,

$$(df)_p\colon T_pM \ni X \longmapsto (df)_p(X) := Xf \in \boldsymbol{R} \tag{4.1}$$

と定めると，$(df)_p$ は T_pM から $\boldsymbol{R}$ への線型写像となる．言い換えれば $(df)_p\in T_p^*M$．さらに，点 $p\in M$ に対して $(df)_p\in T_p^*M$ を対応させる写像 $df\colon M\to T^*M$ は余接束の切断を与えている．一般に，余接束の切断を**（１次）微分形式**とよぶが，1 次微分形式 df のことを，関数 f の**微分** *differential* とよぶ．

補題 4.6. 多様体 M のチャート $(U,\varphi=(x^1,\dots,x^n))$ に対して，

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j$$

が成り立つ．

4.2.2 写像の微分

二つの可微分多様体 M, N の間の写像 $f\colon M \to N$ が**可微分** *differentiable*[*1] であるとは，任意の可微分関数 $g \in \mathcal{F}(N)$ に対して，$g \circ f$ が M 上の可微分関数となることである．M から N への可微分写像全体の集合を $C^\infty(M,N)$ と書くことにする．

補題 4.7. 写像 $f\colon M \to N$ が可微分であるための必要十分条件は，任意の点 $p \in M$ に対して p を含む M のチャート (U,φ) と $f(p)$ を含む N のチャート (V,ψ) に対して

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \boldsymbol{R}^m \supset \varphi\bigl(U \cap f^{-1}(V)\bigr) \longrightarrow \psi(V) \subset \boldsymbol{R}^n$$

が可微分写像となることである．ここで $m = \dim M$, $n = \dim N$ である．

可微分写像 $f\colon M \to N$ が与えられたとき，各点 $p \in M$，$X \in T_pM$ に対して

$$(df)_p(X)\colon \mathcal{F}(N) \ni g \longmapsto X(g \circ f) \in \boldsymbol{R}$$

と定義すると，$(df)_p(X) \in T_{f(p)}N$ となることがわかる．このようにして得られる $(df)_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ を写像 f の p における**微分** *differential* という．

補題 4.8. 写像 $f\colon M \to N$ の点 p における微分 $(df)_p$ は T_pM から $T_{f(p)}N$ への線型写像を与える．とくに，p の近傍における M のチャート $(U, \varphi = (x^j))$ と $f(p)$ の近傍における N のチャート $(V, \psi = (y^k))$ をとれば，基底

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right], \qquad \left[\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_{f(p)}\right]$$

に関する $(df)_p$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(\varphi(p)) & \dots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}(\varphi(p)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}(\varphi(p)) & \dots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}(\varphi(p)) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

で与えられる．ただし

$$f^k = y^k \circ f \circ \varphi^{-1}$$

である．

とくに，$\boldsymbol{R}$ の区間 $I = (a,b)$ から多様体 M への可微分写像 $\gamma\colon (a,b) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ を M 上の**曲線**とよぶ．I のパラメータ（座標）を t とするとき，

$$\dot\gamma(t) := (d\gamma)_t \left(\frac{d}{dt}\right)_t \in T_{\gamma(t)}M$$

を曲線 γ の接ベクトルあるいは速度ベクトルとよぶ．M のチャート $\varphi = (x^j)$ に対して $\varphi \circ \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ と書くと，

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{dx^j}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\gamma(t)}$$

[*1] この講義では「可微分」を C^∞-級の意味で用いる．

である．

補題 4.9. 多様体 M の任意の点 p と接ベクトル $X \in T_pM$ に対して，M 上の曲線 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ で

$$\gamma(0) = p, \qquad \dot\gamma(0) = X$$

となるものが存在する．さらに，このような曲線 γ に対して

$$Xg = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \circ \gamma(t) \qquad g \in \mathcal{F}(M)$$

が成り立つ．また，可微分写像 $f\colon M \to N$ に対して，

$$(df)_p(X) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(0)$$

である．

4.2.3 誘導計量

記号を簡単にするために，可微分写像 $f\colon M \to N$ の p における微分 $(df)_p$ のことを $(f_*)_p$ と書く．さらに，p を明示せずに $df = f_*$ と書くこともある．

定義 4.10. 多様体 M から多様体 N への可微分写像 $f\colon M \to N$ が**はめ込み** *immersion* であるとは，M の各点 p で微分 $(df)_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射となることである．

とくに，はめ込み $f\colon M \to N$ が存在するならば，$\dim M \leqq \dim N$ である．

多様体 N 上の 2 次形式 $g \in \Gamma(S(T^*N \otimes T^*N))$ が与えられているとき，可微分写像 $f\colon M \to N$ によって

$$(f^*g)_p(X, Y) := g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) \qquad X, Y \in T_pM$$

で与えられる $(f^*g)_p\colon T_pM \times T_pM \to \boldsymbol{R}$ は T_pM 上の 2 次形式を与えている．さらに p を動かせば M 上の 2 次形式 $f^*g \in \Gamma(S(T^*M \otimes T^*M))$ を得る．ただし $\Gamma(S(T^*N \otimes T^*N))$ は $T_p * N$ の対称双線型形式全体がなす線型空間 $S(T^*_pN \otimes T^*_pN)$ から得られるベクトル束 $S(T^*N \otimes T^*N)$ の切断全体の集合を表す．

これを 2 次形式 g の写像 f による**引き戻し** *pull-back* という．

補題 4.11. (N, g) をリーマン多様体とする．写像 $f\colon M \to N$ による g の引き戻しが M 上のリーマン計量を与えるための必要十分条件は f がはめ込みとなることである．

証明. f^*g が M 上の 2 次形式であることは容易にわかる（？）から，f^*g が正値であることと f がはめ込みであることの同値性を示せばよい．

まず f をはめ込みとしよう．g が正値であることから，任意の $X \in T_pM$ に対して

$$f^*g(X, X) = g(f_*X, f_*X) \geqq 0, \qquad (\text{等号成立は } f_*X = 0 \text{ のとき})$$

であるが，仮定より f_* は単射であるから，$f_*X = 0$ ならば $X = 0$．したがって f^*g は正値．

逆に f^*g が正値とする．いま $X \in \operatorname{Ker}(f_*)_p \subset T_pM$ をとると，

$$f^*g(X, X) = g(f_*X, f_*X) = g(0, 0) = 0$$

であるから，$f^*g(X, X) = 0$．ここで f^*g は正値だから $X = 0$．したがって $\operatorname{Ker} f_* = \{0\}$ となり，f_* は単射． □

定義 4.12. 多様体 M からリーマン多様体 (N, g) へのはめ込み $f\colon M \to N$ によって得られる M 上のリーマン計量 f^*g を f による**誘導計量**とよぶ.

例 4.13. D を $\boldsymbol{R}^2$ の領域とし, D の座標を (u, v) と表す．このとき, D から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像 $f\colon D \to \boldsymbol{R}^3$ がはめ込みであるための必要十分条件は

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

が D の各点 (u, v) で 1 次独立となることである.

このとき,

$$E(u,v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \right\rangle, \qquad F(u,v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\rangle,$$
$$G(u,v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\rangle$$

とおき,

$$\begin{aligned} g &= E\,du \cdot du + 2F\,du \cdot dv + G\,dv \cdot dv \\ &= E\,du \otimes du + F\,du \otimes dv + F\,dv \otimes du + G\,dv \otimes dv \end{aligned}$$

とおくと，g は $\boldsymbol{R}^3$ の標準計量 $\langle\ ,\ \rangle$ の f による引き戻しである.

この $g = f^*\langle\ ,\ \rangle$ を曲面の**第一基本形式**とよぶことがある.

2 次元多様体 M の $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込み $f\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ のことを**曲面** *surface* ということもある．曲面は局所的には例 4.13 のように表される.

注意 4.14. 補題 4.11 は，g が擬リーマン計量の場合は一般に正しくない.

問題

1 $\boldsymbol{R}^n$ の各点 q における接空間 $T_q\boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ と同一視する．このとき，可微分写像 $f\colon M \to \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$(df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$$

となることを示しなさい．ただし (x^j) は M の p の近傍におけるチャートである.

2 補題 4.11 を証明しなさい.

3 例 4.13 を確かめなさい.

4 ミンコフスキー空間への $\boldsymbol{R}^n$ の領域のはめ込みで，ミンコフスキー計量の引き戻しで得られる 2 次形式が非退化でないようなものを挙げ，注意 4.14 を確かめなさい.

5 リーマン多様体 (M, g) から (N, h) への写像 $f\colon M \to N$ が等長的ならば，f ははめ込みであることを示しなさい.