2009 年 5 月 25 日 (2009 年 6 月 8 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 5

前回までの訂正

- 黒板で「曲面の（パラメータ表示の）第一基本形式は，は,」となっていたようです．
- 講義資料 4，7 ページ：記号 $\Gamma\bigl(S(T^*N\otimes T^*N)\bigr)$ の意味についてのご質問が複数でました．申し訳ありません．定義が抜けていたようですね．

  $T_p^*N\otimes T_p^*N$ のうち対称なものだけを集めた線型空間 $S(T_p^*N\otimes T_p^*N)$ をあつめてできるベクトル束 $S(T^*N\otimes T^*N)$ の切断全体の集合

  を表します．
- 講義資料 4，2 ページ，2 番目の質問：この命題にお ⇒ この命題において
- 講義資料 4，4 ページ，例 4.2：リーマン計量が g ⇒ リーマン計量 g が
- 講義資料 4，6 ページ，下から 4 行目：$(d\gamma)_t\left(\dfrac{d}{dt}\right) \Rightarrow (d\gamma)_t\left(\dfrac{d}{dt}\right)_t$
- 講義資料 4，6 ページ，10 行目：$(d(g\circ f))_p(X) \Rightarrow X(g\circ f)$

  間違いではありません．同じ意味なので問題はないのですが，こちらにした方がよいかもしれません．
- 講義資料 4，6 ページ，下から 3 行目：$\varphi\circ\gamma \Rightarrow \varphi\circ\gamma(t)$
- 講義資料 4，8 ページ，注意 4.14：「一般に正しくない」は「一般には正しくない」の誤りではないかとのご指摘がありましたが，前者のような用例もあるようです．
- 講義資料 4，8 ページ問題 1：$(df)_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \Rightarrow (df)_p\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$
- 講義資料 4，8 ページ問題 1：「$\boldsymbol{R}^n$ の各点 q における接空間 $T_q\boldsymbol{R}^n$」の点は “p” ではないか，とのご指摘がありましたが，p はすぐ後で M の点を表すのに使っていますので，p に変更してはなりません．
- 講義資料 4，8 ページ問題 5：仮定は「局所等長的」で十分だというご指摘がありました．ごもっともです．
- 「$f\colon M\to M$ が等長変換」という定義について，「$M\to N$」ではないか，というご指摘がありましたが，**違います**．「変換」という語は，自分自身への写像を表すようです．

授業に関する御意見

- “微分” がいったい何なのかわからなくなってきました．

  山田のコメント： 多義的ですが，あえていえば「一次近似」
- 講義の開始時に本時の目標（話の流れ）を話してください．

  山田のコメント： 善処します
- “dx^i や $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 等の記号がたくさん出てきて，頭が混乱します．記号の意味が忘れがちで，講義や資料の後を追うのに苦労しますが頑張ります．

  山田のコメント： 頑張って下さい．
- $(df)_p\colon T_pM\ni X\mapsto (df)_p(X)\in\boldsymbol{R}$ を関数 f の微分といったり，$(df)_p\colon T_pM\to F_{f(p)}N$ を写像 f の p におけ

る微分といったり紛らわしいです．

山田のコメント： 写像 f がどこに値をとるか，で決まるので，紛らわしいことはまったくありません．

- f^* と f_* は紛らわしくないですか．

  山田のコメント： 丁寧にかけば紛らわしくありません．丁寧に書いてください．
- 多様体ではめこみを勉強したときに，導入の意味が分からなかったんですが，今日の講義で少し分かりました．

  山田のコメント： それはよかった
- 300 円スリッパは大丈夫ですか．

  山田のコメント： だめです

質問と回答

質問： $T_p\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^n$ を同一視するのは $T_p\boldsymbol{R}^n$ で内積を定義するためですか？

お答え： 内積を定義していなくても $\boldsymbol{R}^n$ では同一視できる，ということが重要．たとえば「ベクトル場の方向微分」は（内積を定義してもしなくても）$\boldsymbol{R}^n$ では定義できますが，一般の多様体上では定義できません．（だから「接続」の概念が必要）．

質問： 問題を一般化して，M: m-dim mfd, N: n-dim mfd, $f\colon M \to N$ がはめ込み $\Leftrightarrow$ $M \ni (x^1,\dots,x^m)$ $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1,\dots,x^m)$, …, $\frac{\partial f}{\partial x^m}(x^1,\dots,x^m)$ が 1 次独立という考えでいてよさそうですか．次元が増える or 無有次元（原文ママ）となるとダメな場合がありそうです．

お答え： 最初から m-dim といっているんだから有限次元を想定していませんか？有限次元だったら正しいです．証明してごらんなさい．

質問： 講義中の微分写像の定義の仕方 (3) は，講義資料の補題 4.8 のことですよね．講義で $F\colon |R^m \to \boldsymbol{R}^n : f$ の座標による表現というものがありましたが，$(df)_p = (dF)_p$ で定義していのですか．

お答え： そういうことですが，“等号” の意味をきちんと把握してください．

質問： “df” と “f_*” の使い分けはあるのですか．

お答え： オフィシャルにはないです．同一文脈では統一するべきだとは思います．

質問： リーマン多様体は，一般の多様体にものさしを与えたものだという認識でよいのでしょうか？また，そのときに，ものさしがリーマン計量ということでしょうか？

お答え： たとえ話としてはよいです．

質問： リーマン多様体のリーマン計量で，リーマン多様体に位相構造を入れることができますか？局所凸位相などの．

お答え： （ちょっと話したと思いますが）距離が入ります．したがって，位相が入ります．

質問： リーマン計量の代数構造をしらべたり，位相を入れるとおもしろいような気がしますがどうですか？

お答え： おもしろいです．いろいろと調べている人がいます．与えられた多様体上のリーマン計量全体を考えるだけでなく，リーマン多様体全体の集合に位相を入れたりもします．

質問： リーマン多様体 M の等長変換全体はコンパクト開位相により位相群となるようですが，その群の位相的な性質は M に依りますか．

お答え： よります．

質問： ノルムの同値性などのように，リーマン計量にも「本質的に同じ計量」のような概念はありますか．

お答え： さまざまあります．

質問： 問題 5 の「写像 $f\colon M \to N$ が等長的」とは「f が微分同相かつ局所等長写像」という意味でよいのでしょうか．

お答え： ここではそういうことにします．次回説明します．

質問： 任意のリーマン多様体（もしくは擬リーマン多様体）は Euclidean space からの誘導計量で定義することもできるんですか？

お答え： Nash の埋め込み定理．

質問： σ コンパクト性とパラコンパクト性はどういう条件があれば同値になるのでしょうか？

お答え： 松本幸夫「多様体入門」の付録をご覧ください．

質問： 一般論を学ぶ際，1 回 1 回ユークリッド空間に置き換えて考えた方がよいですか．

お答え： なれるまでは．そのうち「当たり前」に見えてきます．

5　等長写像 (2)・例

5.1　等長写像・等長変換

リーマン多様体 (M,g) から (N,h) への可微分写像 $f\colon M \to N$ が**等長的** *isometric* であるとは，$g = f^*h$ が成り立つことである．とくに $f\colon M \to N$ が微分同相写像であり，かつ等長的であるとき，f を**等長写像** *isometry* とよび，等長写像が存在するような二つのリーマン多様体を**等長的** *isometric* とよぶ．リーマン幾何学では，等長的なリーマン多様体を区別しない（区別できない）．

リーマン多様体 (M,g) から自分自身への等長的な可微分同相写像 $f\colon M \to M$ を (M,g) の**等長変換**という．(M,g) の等長変換全体の集合は写像の合成に関して群をなす．これを (M,g) の**等長変換群**という．

例 5.1. n 次の直交行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$f_{A,\boldsymbol{b}}\colon \boldsymbol{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$$

とおくと，$f_{A,\boldsymbol{b}}$ は n 次元ユークリッド空間の等長変換である．

5.2　積多様体とトーラス

多様体 M と多様体 N に対して，積位相空間 $M \times N$ には $\dim M + \dim N$ 次元の多様体の構造が入る．これを**積多様体**という．点 $p \in M$ の近傍 U 上の局所座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ と点 $q \in N$ の近傍 V 上の局所座標系 $(y^1,\dots,y^n)$ を用いれば，(p,q) の近傍 $U \times V \subset M \times N$ の局所座標系 $(x^1,\dots,x^m;y^1,\dots,y^n)$ が得られる．

$$T_pM = \operatorname{Span}\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \right\rangle, \qquad T_qN = \operatorname{Span}\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_q \right\rangle$$

であったから，自然な同型

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \oplus T_qN \tag{5.1}$$

を考えることができる．

いま，(M,g), (N,h) をともにリーマン多様体とするとき，$M \times N$ 上のリーマン計量 $g \times h$ を

$$(g \times h)(X,Y) := g(X_M, Y_M) + h(X_N, Y_N) \tag{5.2}$$

で定義する．ただし $X = X_M + X_N$ は $X \in T_{(p,q)}(M \times N)$ の (5.1) による分解である．

このようにして得られるリーマン多様体 $(M \times N, g \times h)$ を (M,g), (N,h) の**リーマン積**という．

例 5.2. $\boldsymbol{R}^2$ の部分多様体

$$S^1 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

に $\boldsymbol{R}^2$ からの誘導計量 g を与える．このとき，積多様体

$$T^2 = S^1 \times S^1$$

2009 年 5 月 25 日 (2009 年 6 月 8 日訂正)

を 2 **次元トーラス**という．$\boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{C}$ と同一視して

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \,|\, \theta, \varphi \in \boldsymbol{R}\} \subset \boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{R}^4$$

とすると，(θ, φ) は T^2 の局所座標を与え，

$$g \times g = (d\theta)^2 + (d\varphi)^2$$

と書ける．すなわち $(T^2, g \times g)$ はユークリッド平面 $\boldsymbol{R}^2$ の領域と等長的である．

さらに，

$$T^n := \overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^{n\text{ 個}}$$

を n 次元トーラスとよぶ．

5.3 トーラス（2）

$\boldsymbol{R}^2$ の 1 次独立な二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が生成する $\boldsymbol{R}^2$ の**格子** *lattice* とは，

$$\Gamma = \{m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} \,|\, m, n \in \boldsymbol{Z}\}$$

のことである．任意の $\boldsymbol{c} \in \Gamma$ によって

(5.3) $$\tau_{\boldsymbol{c}} \colon \boldsymbol{R}^2 \ni p \longmapsto p + \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^2$$

とすると $\tau_{\boldsymbol{c}}$ は（標準計量をもつ）$\boldsymbol{R}^2$ からそれ自身への等長写像をあたえる．

格子 Γ に対して $\boldsymbol{R}^2$ の同値関係 $\sim$ を

(5.4) $$p \sim q \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ある } \boldsymbol{c} \in \Gamma \text{ が存在して } q = p + \boldsymbol{c}$$

で定義する．商空間 $M := \boldsymbol{R}^2/\sim$ に商位相を入れると，これはコンパクト・ハウスドルフ空間である．さらに M に可微分多様体の構造を入れて，射影

$$\pi \colon \boldsymbol{R}^2 \ni p \longmapsto [p] \in M = \boldsymbol{R}^2/\sim$$

が可微分となるようにできる．

とくに射影 π は**被覆写像** *covering map* である．すなわち，任意の $[p] \in M$ に対して M における $[p]$ の近傍 U が存在して，その π による逆像が

$$\pi^{-1}(U) = \sum_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \qquad U_\lambda \cap U_{\lambda'} = \emptyset \quad (\lambda \neq \lambda')$$

と分解され，

$$\pi|_{U_\lambda} \colon U_\lambda \longrightarrow U$$

が可微分同相写像となる．この状況で，各 λ, λ' に対してある $\boldsymbol{c} \in \Gamma$ が存在して

$$U_{\lambda'} = \{p + \boldsymbol{c} \,|\, p \in U_\lambda\} = U_\lambda + \boldsymbol{c}$$

が成り立つ．

いま，点 p に対して上のような近傍 U をとり，

$$\pi^{-1}\colon U \longrightarrow U_\lambda \subset \boldsymbol{R}^2$$

による $\boldsymbol{R}^2$ の標準計量の引き戻しにより U にリーマン計量を導入することができる．このリーマン計量は λ の取り方，U の取り方によらないことがわかるので，M 上にリーマン計量 g が定義されたことになる．

この (M, g) を，格子 Γ に対応する**平坦トーラス** *flat torus* という．とくに $\boldsymbol{a} = (2\pi, 0)$, $\boldsymbol{b} = (0, 2\pi)$ で生成される格子 Γ に対応する平坦トーラスは，$T^2 = S^1 \times S^1$ と等長的である．

まったく同様にして $\boldsymbol{R}^n$ の格子から平坦トーラスを構成することができる．

5.4 実射影空間

n 次元球面 $S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ に同値関係

$$p \sim q \quad \Longleftrightarrow \quad q = \pm p$$

を与えると，商空間 $S^n/\sim$ はコンパクトハウスドルフ空間となる．この位相空間を

$$\boldsymbol{RP}^n := S^n/\sim$$

と書いて，n 次元**実射影空間** *real projective space* という．このとき，射影

$$\pi\colon S^n \longrightarrow \boldsymbol{RP}^n$$

は被覆写像である．これを用いて，トーラスの場合と全く同様に $\boldsymbol{RP}^n$ にリーマン計量を導入することができる．これを実射影空間の標準計量とよぶ．

問題

1 ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で生成される $\boldsymbol{R}^2$ の格子 Γ を考える．

(1) $\boldsymbol{c} \in \Gamma$ に対応する写像 $\tau_{\boldsymbol{c}}$（式 5.3）は $\boldsymbol{R}^2$ の等長変換であることを示しなさい．

(2) 関係 $\sim$（式 5.4）は同値関係となることを示しなさい．

(3) 射影 $\pi\colon \boldsymbol{R}^2 \to M = \boldsymbol{R}^2/\sim$ は被覆写像となることを示しなさい．すなわち

- π は全射．
- 各 $p \in M$ に対して，p の近傍 U が存在して，その π による逆像が

$$\pi^{-1}(U) = \sum_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda, \qquad U_\lambda \cap U_{\lambda'} = \emptyset \quad (\lambda \neq \lambda')$$

と分解され，

$$\pi|_{U_\lambda} : U_\lambda \longrightarrow U$$

が同相写像となる．

ヒント：$\widetilde{U} = \{s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \,|\, 0 < s, t < 1\}$ 上に制限すると π は同相写像を与えることを示しなさい．

(4) この被覆写像の性質によって，$\boldsymbol{R}^2$ から誘導される M のリーマン計量が well-defined であることを示しなさい．

(5) $\boldsymbol{a} = (2\pi, 0)$, $\boldsymbol{b} = (0, 2\pi)$ で生成される格子 Γ に対応する平坦トーラスは，$T^2 = S^1 \times S^1$ と等長的であることを示しなさい．