2009 年 6 月 8 日 (2009 年 6 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 6

お知らせ

- 先週は休講掲示が遅れ，ご迷惑をお掛けしました．申し訳ありません．
- 実は来週も休講です．次回は 6 月 22 日となります．

前回までの訂正

- 講義資料 5, 1 ページ，前回までの訂正の最後：ご指摘あ ⇒ ご指摘が
- 講義資料 5, 1 ページ，最後の行：$F_{f(p)}N \Rightarrow T_{f(p)}N$ ご指摘あ ⇒ ご指摘が
- 講義資料 5, 2 ページ，3 番目のお答え：$|R^m \Rightarrow \boldsymbol{R}^m$
- 講義資料 5, 2 ページ，6 番目のお答え：話た ⇒ 話した
- 講義資料 5, 2 ページ，下から 2 番目の質問：同値になるいのでしょうか ⇒ 同値になるのでしょうか.
- 講義資料 5, 4 ページ式 (5.3) の下：「$\boldsymbol{R}^2$ からそれ自身への等長写像」を「$\boldsymbol{R}^2$ からそれ自身への等長変換」とすべき，というご指摘がありました.「等長変換」とするなら「$\boldsymbol{R}^2$ の等長変換」と言うべきでしょう．原文のまま（すなわち全体として等長変換）でもよいと思います.
  注：「講義プリントでは等長写像と等長変換を区別していないようです」というご指摘がありましたが，ここのことでしょうか.
- 講義資料 5，4 ページ下から 8 行目：$p \in M \Rightarrow [p] \in M$ (2 箇所)
- 講義資料 5，4 ページ下から 6 行目および 6 ページの問題 1(3)：
$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda}$$
  たしかに disjoint sum の場合は $\sum$ と書くこともありますが，$\cup$ の方が一般的でしょう.
- 講義資料 5，4 ページ下から 6 行目：
$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda, \qquad U_\lambda \text{ は開集合で} \quad U_\lambda \cap U_{\lambda'} = \emptyset \quad (\lambda \neq \lambda')$$
  (「U_λ は開集合」を挿入)
- 黒板に「平担トーラス」と書いたようです.「平坦トーラス」が正しいです.
- 講義資料 5，3 ページ 5.2 節：「$\dim M + \dim N$ 次元」は 「$M + N$ 次元」の誤りではないか，というご指摘がありましたが，M と N は数ではありませんので，原文の方が正しいです.

授業に関する御意見

- 講義の目標がわからないです.

  山田のコメント： 最初の授業で述べたと思います．リーマン多様体上のさまざまな量（概念）を知り，断面曲率一定なリーマン多様体の局所的な一意性を示します.
- 口頭でいっきにご説明されると，ついていけません.

  山田のコメント： 失礼しました
- 一度休んだだけで全くわからなくなっていました

  山田のコメント： 大丈夫です．また抽象論に入るとわかりやすくなります.
- 授業についていけるようにがんばっていきます.

  山田のコメント： よろしく
- 講義の web ページのアドレスをもう一度おしえていただけませんか？

  山田のコメント： すみません．まだ復活していません．復活しましたら，部屋の前に掲示します
- 新しいスリッパになりましたか？

  山田のコメント： はい．とうとう崩壊しましたので

質問と回答

質問： $\{\boldsymbol{R}^2/\Gamma \,|\, \Gamma \subset \boldsymbol{R}^2 : \text{lattice}\}$ を等長的という同値関係で割ったものは，どれくらいの大きさになりますか．また，何か構造は入りますか.

お答え： 3 次元開多様体になります．実際，格子の生成元 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ は $\boldsymbol{a} = (a, 0)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ という形をしているとして一般性を失わないので $\{(a, b_1, b_2) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, a \neq 0, b_2 \neq 0\}$ という $\boldsymbol{R}^3$ の開集合をある同値関係で割ったものになりますが，それは

$$\{(a, b_1, b_2) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, a > 0, 0 \leqq b_1 \leqq a/2, (b_1)^2 + (b_2)^2 = a^2\}$$

と同一視できます.

質問： 講義資料，例 5.1 で「$f_{A,\boldsymbol{b}}$ は n 次元ユークリッド空間の等長変換である」とは

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b} \rangle$$

が成り立つということなのでしょうか？

お答え： 違います（ここでは)．リーマン多様体 $(\boldsymbol{R}^n, g_0)$ (g_0 は標準計量) からそれ自身への写像として等長変換である（定義はどうでしたか？）ということです.

質問： 写像 $f\colon (\boldsymbol{R}^m, g_0) \to (\boldsymbol{R}^n, g_0)$ が等長変換のとき，f は Euclid 距離を保つということになるんですか？

お答え： 結論としてはそうなります（この講義での等長変換の定義ではありません）

質問： 等長的なリーマン多様体同士はリーマン計量も区別しないのですか？

お答え： リーマン多様体（すなわち，多様体とリーマン計量の組）として区別しないのです.

質問： T^2 と平坦トーラスの違いがよく分かりません．異なる性質を持つのであれば教えて下さい.

お答え： T^2 に（平坦な：後で説明する．この講義で与えた計量は平坦）リーマン計量を与えたものが平坦トーラス.

質問： 平坦トーラスの概形は書けるのですか？

お答え：「概形を書く」というのはどういうことでしょう．平坦トーラスは $\boldsymbol{R}^3$ のリーマン部分多様体としては実現されません（授業中に少しだけコメントした）が.

質問： レジュメや授業で使う「近傍」とは「開近傍」のことでしょうか.

お答え： そうです.

質問： トーラスという図形が意外にも自然な流れで構成することができるのだと思いました．何か新しい多様体をリーマン積でつくるとき，その作った多様体は，もとの多様体にはないようなおもしろい性質をもつということはかなりおこるのですか？それとおも，もとの多様体のようなものになることも多いのですか？等長変換の群を考えるということは，内部自己同型群のような普通の代数のものを多様体で考えたりするのですか？

お答え： 前半，どのような「性質」をお考えか具体的に分かりませんのでなんとも言えません．後半，これもご質問の意図が分かりません．代数で学ぶ「群論」は単なる言葉としてさまざまな数学に現れます．

質問： 講義資料 5 の 4 ページ，$g \times g = (d\theta)^2 + (d\varphi)^2$ と書けるというところがよく分かりません．

お答え： 局所座標 θ によって S^1 のリーマン計量は $(d\theta)^2$ と表される．あとはリーマン積の定義．

質問： π が全射であることは図からわかるのですが，式で示すことができないです．図を証明に使うわけにはいかないですよね．

お答え： いきません．まず「全射の定義」をきちんと式で書いてみてください．「直感的に分かるが，示せない」という「文句」はきちんと定義が言えていない（示そうとすることを定式化できていない）ことが多いです．

質問： covering map としては fiber が discrete となる必要があると思います．

お答え： 定義から出てきませんか．U_λ たちが互いに共通部分を持たないので．

6 弧長と体積

リーマン多様体 (M,g) のリーマン計量 g から定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書くことにする．とくに

$$|X| = \sqrt{\langle X, X\rangle} \qquad (X \in TM)$$

を接ベクトル X の大きさという．

さらに，M の局所座標系 $\bigl(U,(x^1,\dots,x^m)\bigr)$ における計量 g の表現を

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

としておく。

なお，本節では擬リーマン計量は考えない．

6.1 曲線の弧長

リーマン多様体 (M,g) の滑らかな曲線

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$$

の**弧長** *arc length* とは

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\, dt \tag{6.1}$$

のことである．ただし，$\dot\gamma = d\gamma/dt$ は γ の速度ベクトルである．とくに局所座標近傍 U 内の曲線を

$$\gamma(t) = \bigl(x^1(t),\dots,x^m(t)\bigr) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

と書けば,

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt$$

である．弧長は曲線のパラメータの取り方によらない．

曲線 γ が正則であるとは，$\dot\gamma(t) \neq 0$ がすべての t に対して成り立つことである．正則な曲線 γ は，適当にパラメータを取り替えることによって $|\dot\gamma| = 1$ とすることができる．このようなパラメータを**弧長パラメータ**という．

6.2 距離

補題 6.1. 連結な多様体 M 上の任意の異なる 2 点 p, q に対して，p と q を結ぶ滑らかな曲線 γ が存在する．

証明．まず，多様体は局所弧状連結な位相空間であるから，連結性から弧状連結性が従う．したがって p，q を結ぶ連続曲線 γ_0 が存在する．この曲線の像はコンパクトであるから，有限個の局所座標近傍で覆うことができる．各々の座標近傍は $\boldsymbol{R}^m$ の円板と可微分同相であるから，この座標系の中で γ_0 を滑らかな曲線に修正すればよい． □

2009 年 6 月 8 日 (2009 年 6 月 22 日訂正)

連結な多様体 M の 2 点 p, q に対して

$$\mathcal{C}_{p,q} := \bigl\{p,\ q \text{ を結ぶ } M \text{ 上の滑らかな曲線}\bigr\}$$

とおく．補題 6.1 より $\mathcal{C}_{p,q}$ は空でない．そこで

$$d(p,q) := \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{p,q}\} \tag{6.2}$$

とおく．

命題 6.2. 連結なリーマン多様体 (M,g) に対して (6.2) で定義される $d\colon M\times M\to \boldsymbol{R}$ は M の距離を与える．さらに d が定める位相は M の多様体としての位相と同じものである．

証明. まず $\mathcal{L}(\gamma)\geqq 0$ であるから (6.2) の右辺の "inf" をとるべき集合は下に有界である．したがって $d\colon M\times M\to\boldsymbol{R}$ は well-defined であり，とくに $d(p,q)\geqq 0$ が従う．さらに $d(p,p)=0$, $d(p,q)=d(q,p)$, $d(p,r)\leqq d(p,q)+d(q,r)$ は容易に示すことができる．

次に「$p\neq q$ ならば $d(p,q)>0$」を示そう．$p\neq q$ とすると，M がハウスドルフであることから，p の近傍 U と q の近傍 V で共通部分をもたないものが存在する．必要なら U を小さくとって $\bigl(U,(x^1,\dots,x^m)\bigr)$ が局所座標系で，

$$p=(0,\dots,0),\qquad U=\{(x^1,\dots,x^m)\,|\,(x^1)^2+\dots(x^m)^2<r^2\}$$

としてよい[*1]．とくに閉包 $\overline{U}$ はコンパクトである．

ここで $S^{m-1}\subset\boldsymbol{R}^m$ を $m-1$ 次元球面（単位ベクトルの全体）に対して

$$F\colon \overline{U}\times S^{m-1}\ni(x^1,\dots,x^m;v^1,\dots,v^m)\longmapsto\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x^1,\dots,x^m)v^i\,v^j\in\boldsymbol{R} \tag{6.3}$$

を考えると，F はコンパクト位相空間 $\overline{U}\times S^{m-1}$ 上で定義された連続関数であるから，最大・最小値の定理より F は $\overline{U}\times S^{m-1}$ で最小値をとる．さらに (g_{ij}) が正定値行列であるから，$F(x^j;v^j)>0$ が成り立つので，その最小値は正の数となる：

$$F(x^1,\dots,x^m;v^1,\dots,v^m)\geqq c^2>0\qquad\text{on } \overline{U}\times S^{m-1} \tag{6.4}$$

である．

ここで $\gamma\in\mathcal{C}_{p,q}$ が区間 $[a,b]$ で定義されていると，γ の終点は q であるから，区間 $[a,b]$ のどこかで U からはみ出さなければならない．そこで

$$\tau:=\inf\{t\,|\,\gamma(t)\notin U\}$$

とすると，$a<\tau<b$ であり，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma)&=\int_a^b\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt\\&\geqq\int_a^\tau\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt\\&=\int_a^\tau\sqrt{\sum g_{ij}(x^1,\dots,x^m)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt\end{aligned}$$

*1 座標関数 $\varphi\colon U\to\boldsymbol{R}^m$ を省略している．本当は $\varphi(p)=(0,\dots,0)$, $\varphi(U)=\dots$.

$$= \int_a^\tau \sqrt{F(x^1,\dots,x^m;v^1,\dots,v^m)}\sqrt{\sum_{i=1}^m\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$\left(v^j = \frac{dx^j}{dt}\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^m\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\right)$$
$$\geqq c\int_a^\tau \sqrt{\sum_{i=1}^m\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\,dt$$

を得る．ただし $\bigl(x^1(t),\dots,x^m(t)\bigr)$ は曲線 $\gamma(t)$ の座標系 U 上での表示である．この最後の式はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ 上で測った曲線 $\gamma|_{[a,\tau]}$ の長さであるから，

$$\mathcal{L}(\gamma) \geqq c|\gamma(\tau)-\gamma(a)|$$

が成り立つ．ただし，右辺の $|\cdot|$ は $\boldsymbol{R}^m$ のベクトルとしての大きさである．ここで τ の定義から $\gamma(\tau)\in\partial U$ となるが，U が（$\boldsymbol{R}^m$ の開集合として）半径 r の円板であって，$\gamma(a)=p=(0,\dots,0)$ となることから

$$\mathcal{L}(\gamma) \geqq c|\gamma(\tau)-\gamma(a)| \geqq cr$$

となる．右辺は γ の取り方によらないから，

$$d(p,q) \geqq cr > 0$$

となる．以上より d が距離となることが示された．

最後に，M の多様体としての位相を $\mathcal{O}$，d が定める M の位相を $\mathcal{O}_d$ としたとき $\mathcal{O}=\mathcal{O}_d$ であることを示す．それには点 p の，位相 $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}_d$) に関する任意の近傍 U に対して，$\mathcal{O}_d$ ($\mathcal{O}$) に関する p の近傍 V で $V\subset U$ となるものが存在することを示せばよいが，これは演習問題としておこう．　□

系 6.3. パラコンパクト多様体は正規位相空間である．

証明. 定理 3.6 より，パラコンパクト多様体 M 上にはリーマン計量が存在するから，それによって距離 d が定まる．M の位相は距離 d から定まる位相であるから，正規空間となる．　□

以後，リーマン多様体にはこのようにして距離が与えられているとする．

6.3 完備性

距離空間 (X,d) が**完備** *complete* であるとは，X の任意のコーシー列が X 内の点に収束することであった．

定義 6.4. 区間 $[a,b)$ で定義された多様体 M 上の曲線 $\gamma(t)$ が**発散する道** *divergent path* であるとは，任意のコンパクト集合 $K\subset M$ に対してある $\tau\in(a,b)$ をとると $\gamma|_{[\tau,b)}$ の像が $M\setminus K$ に含まれるようにできることである．

命題 6.5 (Hopf-Rinow の定理)**.** リーマン多様体 (M,g) が，（g から定義される距離 d に関して[*2]）完備で

[*2] 以後，このフレーズは省略される

あるための必要十分条件は，任意の発散する道 $\gamma\colon [a,b) \to M$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} \langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt = +\infty$$

となることである．

証明は後日与える．

系 6.6. コンパクトなリーマン多様体は完備である．

6.4 体積と積分

リーマン多様体 (M,g) のコンパクト集合 Ω が座標近傍 $\bigl(U,(x^1,\dots,x^m)\bigr)$ に含まれているとする．このとき，Ω の**体積**とは m 重積分

$$\mathrm{Vol}(\Omega) := \int\cdots\int_\Omega \sqrt{g}\,dx^1\,\dots\,dx^m \qquad g=\det(g_{ij}) \tag{6.5}$$

のことである．この積分はパラメータの取り方によらない．

さらに，Ω を含む領域で定義された連続関数 f に対して，その積分を

$$\int_\Omega f\,dv_g := \int\cdots\int_\Omega f\,\sqrt{g}\,dx^1\,\dots\,dx^m \tag{6.6}$$

と定義する．この積分要素

$$dv_g = \sqrt{g}\,dx^1\,\dots\,dx^m \tag{6.7}$$

を M のリーマン計量 g から誘導される**体積要素** *volume form* という．

領域 Ω が一つの座標系に含まれないときは，Ω を座標近傍による局所有限な被覆で覆って，1 の分割を用いて (6.6) を「つなげれば」よい．

とくに M がコンパクトのとき，

$$\mathrm{Vol}(M,g) := \int_M dv_g$$

を M の**体積**という．習慣にしたがって M の次元が 2 のときは**面積**ともいう．

問題

1「曲線の弧長がパラメータの取り方によらない」ことを正確に述べ，証明しなさい．また「正則な曲線は弧長パラメータで表すことができる」ことを示しなさい．

2 双曲空間は完備であることを証明しなさい．

3 (6.5) の積分が局所座標系の取り方によらないことを示しなさい．

4 球面 S^2, S^3 の体積を求めなさい．