2009 年 6 月 22 日 (2009 年 6 月 29 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 7

お知らせ

- 先週は休講にてご迷惑をお掛けしました．補講はどうするか，というご質問がありましたが，とりあえず公式には行いません．内容的に補講が必要でしたら，試験の後に行います．

前回までの訂正

- 講義資料 6，1 ページ，6 番めの訂正：四季 (5.3) ⇒ 式 (5.3)
- 講義資料 6，5 ページ，19 行目：F は $\overline{U}$ で最小値 ⇒ F は $\overline{U} \times S^{m-1}$ で最小値
- 講義資料 6，6 ページ，系 6.3 の証明：定理?? より，多様体 M 上には ⇒ 定理 3.6 より，パラコンパクト多様体 M 上には ⇒
- 講義資料 6，6 ページ下から 7 行目：いるする ⇒ いるとする．
- 講義資料 6，8 ページ問題 1：取り方にのよらない ⇒ 取り方によらない．
- 黒板にて，2 点を結ぶ曲線全体の集合 $C_{p,q}$ について $C_{p,q} = \emptyset$ と書いたようです．もちろん $\not\emptyset$ です．

授業に関する御意見

- 講義資料の間違いはわざとつくっているのでしょうか．
  山田のコメント： いいえ
- この用紙の右上に HP のアドレスが追加された ⇒ HP が復活したということでしょうか？
  山田のコメント： 残念ながらまだです．
- いつもプリントの制作ごくろうさまです．
  山田のコメント： ありがとうございます
- 先生のスリッパが新しくなって安心しました．
  山田のコメント： ご心配おかけしました
- どうでもいいことですが「球面 S^2 の体積」という表現になれません．
  山田のコメント： 2 次元に限って議論をしている場合は「面積」といってもよいと思います．
- 難しくて理解できませんが，この分野もおもしろそうだと感じました．単位をとれなかったら来年も受けにくるのでよろしくお願いします．
  山田のコメント： ありがとうございます．しかし，来年度は担当しません．
- 今回の話の曲面版を最近セミナーで勉強しているので，講義がとてもたのしかったです．
  山田のコメント： なるほど．解らない話を聞くスキルも身につけてね．
- 図が多くておもしろかったです．
  山田のコメント： 自分で図が描けるようになってください．

質問と回答

質問： dv_g の積分がなぜ体積になるのかがよくわかりません.

お答え： $\boldsymbol{R}^n$ の場合は当たり前，2 次元の場合，特に $\boldsymbol{R}^3$ の曲面に誘導リーマン計量を与えた場合は曲面の面積ですね.

質問： リーマン多様体が完備でないとき完備化をしてもとのリーマン多様体をうめこむようなものを考えたりはするのですか？

お答え： 考えたりすることもありますし，そうしないこともあります.

質問： リーマン多様体に面積の概念を導入するとどのようないいことがおこるのですか？

お答え： 面積を測ることができる．さらに積分をすることができる.

質問： プリント p. 6 について，$\gamma(\tau) \in \partial U$ のとき，$|\gamma(\tau) - \gamma(a)| = r$ にならない場合はあるのですか.

お答え： おっしゃるとおりですね．ありません.

質問： リーマン多様体 (M, g) 内のコンパクト集合 Ω で 2 つのコンパクト集合 Ω_1，Ω_2 によって $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ となっているとき，$\mathrm{Vol}(\Omega) = \mathrm{Vol}(\Omega_1) + \mathrm{Vol}(\Omega_2) - \mathrm{Vol}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ は成り立つんでしょうか？

お答え： 成り立つんです．積分の定義から，積分の線形性が分かりますが，次が成り立つので：

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_M \chi_\Omega \, dv_g \qquad (\chi_\Omega \text{ は } \Omega \text{ の定義関数}).$$

質問： Closed, smooth Riem. mfd 上の長さを測れる連続な，最短の曲線と測地線の長さが異なる場合もありそうな気がします．もしあるとしたらどんなものでしょうか.（一応探してみたが，見つけなかったです.）

お答え： 区分的に滑らか（C^1 で ok です）なら，最短線は自動的に測地線になります．ご質問はこの滑らかさを落としたときにどうなるか，ということでしょうか.

質問： 5 ページ 9 行目にも書いてあるのですが，「well-defined」という言葉がいつも自分の中であいまいなのですが，何かいい考え方がありますか?

お答え： 定義をする道筋が何通りもあるときに，その道筋の取り方によらず答えが一つに決まる，と言う状況を “well-defined” ということが多いようです.

質問： “発散する道の長さが $+\infty$” というイメージがよくわかりません.

お答え： 「発散する道 $\gamma(t)$」とは,「任意のコンパクト集合 C に対して，ある t_0 が存在して t_0 より先の $\gamma(t)$ は C の外側にある」ことです.「コンパクト集合」を「有界閉集合」と読み替えれば,「どんどん遠くへいく道」を定式化したものだということがわかります．そこで「どんどん遠くへいく道の長さが無限大」なる条件を考えると，それが完備性と同値，ということです．$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ が（普通の計量で）完備でないことを確かめてご覧なさい（ヒント：原点に近づく道が発散する道であることを示せばよい）

質問： 完備なリーマン多様体では，今回定義した 2 点間の距離と 2 点間を結ぶ測地線の長さは同じですか？

お答え： 2 点間の距離と同じ長さをもつ測地線で，その 2 点を結ぶものは存在します．しかし，2 点を結ぶ測地線の長さは 2 点間の距離と一致するとは限りません．球面の 2 点を結ぶ大円の弧のうち「長い方」を想像してください.

質問： $\gamma(\theta) = \begin{cases} (\cos\theta, \sin\theta) & (0 \leqq \theta \leqq \pi) \\ (\cos\theta, -\sin\theta) & (\pi \leqq \theta \leqq 2\pi) \end{cases}$ この場合（山田注：図省略，半円周を一往復する道）弧長の長さ（原文ママ：白い白馬，危険が危ないの類か）を 2π とするのは自然な考え方なのでしょうか.（見た目は π）ある意味単射性のようなものを認めた（山田注：仮定した？）ほうがいい気もしますがどうなのでしょう.

お答え： だから高等学校の教科書（現行の指導要領では消えてしまいましたが）では「道のり」といっていましたよね．気がつかれていると思いますが．これを π とみなすならば $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合として γ の像 $\gamma([0, 2\pi]) \subset \boldsymbol{R}^2$ を考え，その 1 次元測度を考える， ということにすればよいですよね.

質問： 今回のレジュメ p. 4 の式 (6.1) の 2 行下の「$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$」 という表し方がよく分かりません．$(x_1, \dots, x_m)$ とは開集合 U に付随する局所座標系ですよね.

お答え： 何回か（いい加減に）説明しましたが，チャート U 上で U を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合と同一視しています．すると局所座標系は $\boldsymbol{R}^m$ の座標そのものになりますからご質問のような書き方になるのです.

質問：「Hopf-Rinow の定理」の Hopf 氏は，測度論に出てくる「Hopf の拡張定理」の Hopf 氏と同じ方ですか.

お答え： 違います．Hopf-Rinow の Hopf さんは Heinz Hopf (1894–1971), 拡張定理の Hopf さんは Eberhard Hopf (1902–1983) だそうです．ほぼ同時代の人ですね.

7　リーマン接続

この節では (M, g) を（擬）リーマン多様体とし，g から定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書く．

■ベクトル場の交換子　多様体 M のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して Xf はまた M 上の関数である．そこで $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

により $[X, Y]\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を定義すると，これは線型写像で，さらに

$$[X, Y](fg) = f([X, Y]g) + g([X, Y]f) \qquad (f, g \in \mathcal{F}(M))$$

が成り立つことがわかるから，$[X, Y]$ は M 上のベクトル場である．したがって，対応

$$[\ ,\ ]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \longmapsto [X, Y] \in \mathfrak{X}(M) \tag{7.1}$$

が得られる．これをベクトル場の**交換子積**または**リー括弧積** *Lie bracket* とよぶ．次のことは容易にわかる：

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= -[Y, X], \\
[aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\
[X, aY + bZ] &= a[X, Y] + b[X, Z], \\
[X, fY] &= f[X, Y] + (Xf)Y, \\
[fX, Y] &= f[X, Y] - (Yf)X, \\
[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] &+ [Z, [X, Y]] = 0.
\end{aligned}$$

ただし $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, $f \in \mathcal{F}(M)$ である．

M の局所座標系 (x^j) を用いて

$$X = \sum_{j=1}^{m} X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と書くと，

$$[X, Y] = \sum_{j,k=1}^{m} \left(X^k \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

となる．とくに

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = 0$$

である．

■内積による接空間と余接空間の同一視　内積を用いると，接空間 T_pM と余接空間 T_p^*M を（座標によらずに）自然に同一視できる．実際，$X \in T_pM$ に対して

$$X^\flat\colon T_pM \ni Y \longmapsto X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle \in \boldsymbol{R}$$

とおくと $X^\flat$ は線型写像であるから $X^\flat \in T_p^*M$ である．このようにして写像

$$\flat\colon T_pM \ni X \longmapsto X^\flat \in T_p^*M$$

が定義されるが，これは線型写像となることが容易にわかる．さらに $\mathrm{Ker}(\flat)=\{0\}$ となり，T_pM と T_p^*M は同じ次元なので，$\flat$ は全単射，すなわち，線型同型写像となっている．そこで $\flat$ の逆写像を

$$\sharp\colon T_p^*M \ni \alpha \longmapsto \alpha^\sharp \in T_pM$$

と書く．この写像 $\sharp$, $\flat$ の定義は局所座標を用いていないので，リーマン多様体上自然に定義される．

局所座標 (x^j) に関する g の成分を g_{ij} とおくと，行列 (g_{ij}) は正則行列なので，逆行列が存在する．それを (g^{ij}) (添字が上) と書く：

$$\sum_{k=1}^m g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}.$$

このとき，

$$X=\sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{に対して} \qquad X^\flat = \sum_{i,j} g_{ij}X^j dx^i,$$
$$\alpha=\sum_j \alpha_j dx^j \qquad \text{に対して} \qquad \alpha^\sharp = \sum_{i,j} g^{ij}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^j}$$

が成り立つ．

■リーマン接続

定理 7.1. M 上の二つのベクトル場 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対してベクトル場 $\nabla_XY\in\mathfrak{X}(M)$ を対応させる写像

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\ni(X,Y)\longmapsto\nabla_XY\in\mathfrak{X}(M)$$

で次を満たすものがただ一つ存在する：

1 $\nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y]$,
2 $X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle$.

証明. 一意性を示す：結論を満たす ∇ が存在したとする．このとき

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle \\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_YZ,X\rangle+\langle Z,\nabla_YX\rangle \\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ．この第一式と第二式の和から第三式を引くと，

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &+ Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ &= \langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle+\langle\nabla_YZ,X\rangle+\langle Z,\nabla_YX\rangle-\langle\nabla_ZX,Y\rangle-\langle X,\nabla_ZY\rangle \\ &= \langle\nabla_XY+\nabla_YX,Z\rangle+\langle\nabla_XZ-\nabla_ZX,Y\rangle+\langle\nabla_YZ-\nabla_ZY,X\rangle \\ &= \langle 2\nabla_XY+\nabla_YX-\nabla_XY,Z\rangle+\langle\nabla_XZ-\nabla_ZX,Y\rangle+\langle\nabla_YZ-\nabla_ZY,X\rangle \\ &= 2\langle\nabla_XY,Z\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle+\langle[X,Z],Y\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle \end{aligned}$$

となるから，

$$2\langle\nabla_XY,Z\rangle = X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle \tag{7.2}$$

を得る．とくに，1 次微分形式 $\varphi\in\Gamma(T^*M)$ を

$$\varphi\colon Z\longmapsto \frac{1}{2}\bigl(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle\bigr)$$

で定義すると，$\nabla_XY=\varphi^{\#}$ である．φ は，M の可微分多様体としての構造（交換子積）とリーマン計量 g だけから決まるから，∇ の一意性が従う．さらに $\nabla_XY=\varphi^{\sharp}$ とおくことで，存在も言えた． □

補題 7.2. 定理 7.1 の ∇ は次の性質をもつ：

1 $\nabla\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ は双線型写像.
2 任意の $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ と $f\in\mathcal{F}(M)$ に対して $\nabla_{fX}Y=f\nabla_XY$.
3 任意の $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ と $f\in\mathcal{F}(M)$ に対して $\nabla_XfY=f\nabla_XY+(Xf)Y$.
4 ベクトル場 $X_1,X_2\in\mathfrak{X}(M)$ が $X_1(p)=X_2(p)$ を満たしているならば $\nabla_{X_1}Y(p)=\nabla_{X_2}Y(p)$.

証明. 定理 7.1 の証明中の式 (7.2) から **1**–**3** は従う．

これらから **4** を示す：∇ の線型性から $X(p)=0$ ならば $\nabla_XY(p)=0$ となることを示せば十分．$X=\sum X^j(\partial/\partial x^j)$ とおくと，$X(p)=0$ より $X^j(p)=0$．これと **2** より結論を得る． □

定義 7.3. 一般に（リーマンとは限らない）多様体 M に対して, 補題 7.2 の **1**–**3** を満たす $\nabla\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を M の（あるいは TM の）**線型接続** *linear connection* あるいは**アファイン接続** *affine connection* という．さらに定理 7.1 の **1** を満たすような ∇ を**捩れのない** *torsion free* 線型接続という．

一般に，多様体 M 上の捩れのない線型接続は無数に存在するが，リーマン計量が与えられているときは，その中から定理 7.1 により，標準的な線型接続が一つ指定されている，と考えることができる．

定義 7.4. 定理 7.1 で与えられる M 上の線型接続 ∇ を計量 g から定まる **リーマン接続** *Riemannian connection* あるいは**レビ・チビタ接続** *Levi-Civita connection* とよぶ.

多様体 M の局所座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ に関する，リーマン計量 g の成分が (g_{ij}) と表されているとする:

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle.$$

このとき，(7.2) を用いれば

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^m\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k},\qquad \Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^m g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\tag{7.3}$$

となることがわかる．この Γ_{ij}^k をリーマン接続の**接続係数** あるいは**クリストッフェル記号** *Christoffel's symbol* とよぶ.[*1] リーマン接続は捩れのない接続であるから，

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k\tag{7.4}$$

が成り立つ．

[*1] 一般の線型接続の係数を Γ_{ij}^k，リーマン接続の係数（クリストッフェル記号）を $\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}$ と書く流儀もある．

これを用いれば，局所座標系 (x^j) のもと，

$$\nabla_X Y = \sum X^j \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} Y^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{7.5}$$

となることがわかる．

例 7.5. $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な計量 g_0 に関するレビ・チビタ接続 D は

$$D_X Y = dY(X) = \bigl(dY^1(X), \dots, dY^n(X)\bigr)$$

で与えられる．ただし $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル場 Y は $Y = \bigl(Y^1, \dots, Y^n\bigr)$ と成分表示されているものとする．とくに $\boldsymbol{R}^n$ の標準座標に関するクリストッフェル記号は 0 である．

例 7.6. m 次元多様体 M から n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ （$n > m$）へのはめ込み $f\colon M \to \boldsymbol{R}^n$ を考え，$\boldsymbol{R}^n$ の標準計量から f によって誘導される M のリーマン計量を g とする．

各点 $p \in M$ に対して，微分写像

$$(df)_p\colon T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^n$$

は単射であるから，$(df)_p\bigl(T_pM\bigr)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の線型部分空間である．そこで，その直交補空間を N_p とすると N_p は $\boldsymbol{R}^n$ の $n-m$ 次元部分空間で

$$\boldsymbol{R}^n = T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = (df)_p\bigl(T_pM\bigr) \oplus N_p \qquad N_p := \bigl((df)_p(T_pM)\bigr)^\perp \tag{7.6}$$

と直和分解できる．N_p を p におけるはめ込み f の**法空間** *normal space*，$N = \cup_p N_p$ を**法束** *normal bundle* とよぶ．

ベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\widetilde{Y} = df(Y)$ は対応

$$\widetilde{Y}\colon M \ni p \longmapsto (df)_p(Y) \in T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^n$$

を与えている．このような対応を，**写像 f に沿ったベクトル場**という．

さて，$\widetilde{Y} = (Y^1, \dots, Y^n)$ と成分表示すると，各 Y^j は M 上の関数であるから，

$$D_X\widetilde{Y} = \bigl(dY^1(X), \dots, dY^n(X)\bigr)$$

はまた f に沿った $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル場となるから，とくに各点 $p \in M$ で $D_X\widetilde{Y}(p) \in \boldsymbol{R}^n = T_{f(p)}\boldsymbol{R}^n$．そこで直和分解 (7.6) にしたがって

$$D_X\widetilde{Y} = A + B \qquad A \in (df)_p(T_pM), \quad B \in N_p$$

と分解すると，$(df)_p$ が単射であることから，

$$D_X\widetilde{Y} = (df)_p(\nabla_X Y(p)) + \alpha_p(X, Y) \qquad \nabla_X Y(p) \in T_pM, \quad \alpha_p(X, Y) \in N_p \tag{7.7}$$

を満たす $\nabla_X Y(p)$ がただ一つ存在する．すると

$$M \ni p \longmapsto \nabla_X Y(p) \in T_pM$$

は滑らかなベクトル場を与えるので，写像

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

が定義された．この ∇ が (M, g) のリーマン接続に他ならない．

問題

1 (1) 公式 (7.3) を示しなさい．

(2) 座標系 (x^j) に関するクリストッフェル記号 $\{\Gamma_{ij}^k\}$ と座標系 (y^a) に関するクリストッフェル記号 $\{\widetilde{\Gamma}_{ab}^c\}$ との間には

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{a,b,c} \left(\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} \widetilde{\Gamma}_{ab}^c + \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial x^k}{\partial y^c}$$

なる関係があることを示しなさい．

2 正の値をとる関数 $\rho \in \mathcal{F}(M)$ を用いて $\tilde{g} = \rho g$ とすると，$\tilde{g}$ はリーマン計量となる．これをリーマン計量 g と**共形的** *conformal* な計量という．g と $\tilde{g}$ のレビ・チビタ接続をそれぞれ ∇, $\widetilde{\nabla}$ とすると，

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\big((X \log \rho) Y + (Y \log \rho) X - g(X,Y)(d \log \rho)^\sharp\big)$$

が成り立つことを示しなさい．

3 2 次元リーマン多様体 (M,g) の局所座標 (u^1, u^2) が**等温座標系** *isothermal coordinate system* あるいは**共形座標系**であるとは，この座標に関してリーマン計量 g が

$$g = e^\sigma \big((du^1)^2 + (du^2)^2\big) \qquad \sigma = \sigma(u^1, u^2) \text{ は滑らかな関数}$$

と表せることである．(2 次元リーマン多様体の場合，任意の点の近傍で等温座標系をとることができる．) この座標に関するクリストッフェルの記号を求めよ．

4 ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分多様体としての単位球面

$$S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1\}$$

を考える．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準内積である．以下，$T_p\boldsymbol{R}^{n+1}$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同一視する．包含写像 $\iota\colon S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ ははめ込みであるが，とくに $d\iota\colon T_pS^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ は単射になるので，$T_pS^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ と見なしておく．

(1) $p \in S^n$ に対して，

$$T_pS^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, p \rangle = 0\}, \qquad N_p = \boldsymbol{R}p$$

であることを示しなさい．ただし $p \in S^n$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルと見なしている．

(2) S^n のレビ・チビタ接続を ∇ とすると，任意の $X, Y \in S^n$ に対して

$$\nabla_X Y = dY(X) + \langle X, Y \rangle\, p$$

となることを示しなさい．

(3) S^n の様々な座標系について，クリストッフェル記号を計算しなさい．

5 式 (7.7) の法成分 α を用いて，対応

$$\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X,Y) \longmapsto \alpha(X,Y) \in \Gamma(N)$$

が得られる．これをはめ込み f の**第二基本形式** *second fundamental form* という．(伝統的な用語で，第一基本形式とは誘導計量のことである)．

(1) 任意の関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して

$$\alpha(fX, Y) = f\alpha(X, Y), \qquad \alpha(X, fY) = f\alpha(X, Y)$$

が成り立つことを示しなさい．

(2) $X, Y, \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ が $X(p) = \widetilde{X}(p)$, $Y(p) = \widetilde{Y}(p)$ を満たしているならば，

$$\alpha_p(X, Y) = \alpha_p(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$$

が成り立つことを示しなさい．したがって，

$$\alpha_p \colon T_pM \times T_pM \longrightarrow N_p$$

は well-defined である．

(3) 任意の X, Y に対して $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$ が成り立つことを示しなさい．

(4) 以下，m 次元多様体の余次元 1 のはめ込み $f \colon M \to \boldsymbol{R}^{m+1}$ を考える．このとき，法空間 N_p の次元は 1 であるから，任意の $p \in M$ に対して，p の近傍 U で定義された写像

$$\nu \colon M \supset U \ni q \longmapsto \nu_q \in N_q$$

で，$\langle \nu_q, \nu_q \rangle = 1$ となるものが存在し，

$$N_q = \boldsymbol{R}\nu_q$$

と表すことができる．この ν を f の**単位法ベクトル場** *unit normal vector field* という．このとき，第二基本形式は

$$\alpha(X, Y) = h(X, Y)\nu \qquad h(X, Y) \in \boldsymbol{R}$$

と書ける．このとき，h は 2 階対称テンソル $h \in S(T^*M \otimes T^*M)$ となることを示しなさい．

(5) 上の状況で，M の局所座標系 $(x^1, \dots, x^m)$ をとると，

$$h_{ij} = h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial \nu}{\partial x^j} \right\rangle$$

となることを示しなさい．