2009 年 6 月 29 日 (2009 年 7 月 6 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 8

お知らせ

- 授業の web ページです：
  http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/class/2009/geometry-intro/
  http://www.official.kotaroy.com/class/2009/geometry-intro/
- 試験予告：**7 月 27 日の 13 時より試験**を行います．
  - 場所：1401
  - 試験範囲：授業で扱った内容．
  - 試験問題：演習問題程度．なるべくやさしくします．
  - 持ち込み：可

  やむを得ない事情により試験を受けられない方は山田まで**事前に**ご連絡ください．

前回までの訂正

- 講義資料 7，1 ページ，授業に関するご意見の 2 つ目：「鱶っ津」⇒「復活」(「ふかっつ」ですね. . .)
- 講義資料 7，2 ページ，下から 2 行目：する局所座標系 ⇒ すると局所座標系
- 講義資料 7，4 ページ，1 行目：T_pX と $T_p^*X \Rightarrow T_pM$ と T_p^*M
- 講義資料 7，7 ページ，問題 4，問題文の 4 行目（2 箇所）と 7 行目：$T_pM \Rightarrow T_pS^n$
- 講義資料 7，7 ページ，問題 4，問題文の 7 行目：$\langle x, p\rangle \Rightarrow \langle \boldsymbol{x}, p\rangle$
- 講義資料 7, 5 ページ，定義 7.4 の下で $g_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle$ は $g_{ij} = g\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle$ と直すべきとのご意見がありましたが，**後者のような書き方はしません．**そう書くなら $g_{ij} = g\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$ と書くべきですが，3 ページの冒頭に「g から定まる内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書く」と宣言していますので，もとのままでよいわけです．

授業に関する御意見

- 定理 7.1 の証明で ∇ の存在を証明せずに ∇ の存在を仮定して議論をしたのは斬新でした！
  山田のコメント： 一意性，ってそういうことではないんですか？いままで見たことがないはずはないんですが．
- 前回締切り日を勘違いしてレポートを出し損ねたので今回から気をつけたいです．
  山田のコメント： 気をつけてください．
- テスト簡単な問題でお願いします．単位ください．
  山田のコメント： 「簡単」とは主観的な語で，あなたにとって何が簡単かわかりませんので，対応できません．単位は，私が出すのではなく，あなたがとっていくのです．
- 考えるよりも計算を行うほうが気が楽です．
  山田のコメント： Me too (?)
- 弧長を孤長とかいたのは自分のことでしたね．すみませんでした．
  山田のコメント： あやまることはないですが，覚えてください．
- いつも採点ごくろうさまです．
  山田のコメント： ありがとうございます．いい加減ですが．
- 「レビ・チビタ」や「クリストッフェル」など名前がおもしろいですね．
  山田のコメント： それって失礼では？

質問と回答

質問： 計量 g が共形的（問 2）であることと，共形座標系（問 3）とは定義としてはあまり関連性が見あたらないのですが，どのような関連があるのでしょうか．

お答え： 二つの計量 g_1, g_2 が共形的である，とは $g_2 = \rho g_1$ となる正値関数 ρ が存在する，ということ．計量 g が**共形平坦**であるとは，局所的にユークリッド空間と共形的となること．このとき，ユークリッド空間の標準座標 $(x^1, \dots, x^n)$ をとると $g = \rho\bigl((dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2\bigr)$ と表すことができます．とくに， 2 次元のリーマン多様体はいつでも共形平坦となることが知られていて，上のような座標系を**等温座標系**，**共形座標系**などと呼びます．

質問： 定理 7.1 の証明ははじめから φ を定義して存在を確かめてもいいのですか？

お答え： いいのです．実際，講義資料では「存在の証明」はそのようにやっているはずです．

質問： 接続を考えるとどのようなよいことがあるのですか？

お答え： ベクトル場を微分できる．曲率を定義できる．

質問： レビ・チビタ接続が具体的に表すことは難しいのですか？リーマン計量が具体的に与えられているときはレビ・チビタ接続も式で表せそうですよね？

お答え： 日本語が変では？レビ・チビタ接続の存在証明は，具体的に表したことになっていませんか？あるいは，クリストッフェル記号 Γ_{ij}^k を g_{ij} で表す式は具体的でありませんか？あなたにとって具体的とは？

質問： クリストッフェル記号はどのような量なのですか？

お答え： 接続の，基底 “$\{\partial/\partial x^j\}$” に関する成分．

質問： クリストッフェル記号からはどのような情報が得られるますか？

お答え： 接続のすべての性質．

質問： “微分が自明でない” のはベクトル場の微分のことですか？

お答え： この文脈ではそのつもり．

質問： “標準的” な線型接続といった場合，それは Thm 7.1 をみたすようなものを言うのですか？

お答え： ここでは，この文脈ではそうです．

質問： “標準的” という言葉はどうとらえればいいですか？

お答え： とくに定義はありません．ここでは，リーマン計量から定まるリーマン接続は「標準的である」ということにします．

質問： 「多様体 M にリーマン計量が与えられると標準的な TM の線型接続がある」とのことでしたが，どのように標準的だったのでしょうか．定理 7.1 の 2 つの性質がそんなに良いものだったのでしょうか？

お答え： そんなに良いものだったのです．だから一般相対論もできたし，ポアンカレ予想も証明できたので．

質問： 接続という名称の由来は何ですか．

お答え： Connection の訳語ですが，近接した接空間たちの間を「継ぐ」ということのようです．

質問： リーマン接続の “捩れのない” とはどういうことなのか．また，$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ が捩れがないことを意味するのはなぜなのか（もう一度）教えてください．

お答え： 捩れがない，とは $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ が成り立つことです（どういうことか，といえばそれが定義ですから）．$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ と定めてこれを接続 ∇ の捩れテンソル，または捩率テンソル torsion tensor とよびます．それが 0 だから捩れがない，というわけですが...

質問： Affine 接続の affine とはどういう意味ですか？

お答え： 原義は「歪んだ」という意味のようです．ここでは「線型のちょっとずれたやつ」という感じです．

質問： $\mathfrak{X}(M)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の Lie 環となっていますよね？

お答え： なっていますよ．無限次元ですが．

質問： 板書の最後の板で $\Gamma_{12}^1 = \sum g^{kl}(g_{1k,2} + g_{k2,1} - g_{12,k})$ (*) となっていましたが，書き下すと

$$(*) = (g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}) + (g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2})$$

となってしまい，$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum g^{lk}(g_{1k,2} + g_{k2,1} - g_{12,k})$ に $(i, j, k) = (1, 2, 1)$ を代入したものと異なります．（中略）値は一緒ですが，(*) で書いているのには何か意味があるのですか？

お答え： とくに意味はありません．定義式の g^{lk} の代わりに g^{kl} と書いてしまっただけです．(g_{ij}) の対称性からこれらは同じものになります．

8 リーマン接続と共変微分

■1 次微分形式 手始めに多様体 M の余接バンドル T^*M を考えよう．T^*M の切断 $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ を **1 次微分形式** *differential form of first order/one form* という．これは各点 $p \in M$ に対して T_p^*M の要素 α_p を対応させる対応の規則であった．ところで $\alpha_p \in T_p^*M$ は T_pM から $\boldsymbol{R}$ への線型写像である．したがって，任意のベクトル場 X に対して $\alpha(X)\colon M \ni p \mapsto \alpha(X)(p) = \alpha_p(X_p) \in \boldsymbol{R}$ とすれば，$\alpha(X)$ は M 上の関数となる．とくに滑らかさから $\alpha(X) \in \mathcal{F}(M)$ となることがわかる．したがって，$\alpha \in \Gamma(T^*M)$ は写像

$$\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \ni X \longmapsto \alpha(X) \in \mathcal{F}(M) \tag{8.1}$$

（同じ α という記号で表す）を誘導する．次は定義から容易にわかる：

補題 8.1. 1 次微分形式 $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ に対して式 (8.1) の写像 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ は次を満たす線形写像である：任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ と $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\alpha(fX) = f\alpha(X)$ が成り立つ．

補題 8.2. 線型写像 $\beta\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ に対して次は同値である：

1 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して $\beta(fX) = f\beta(X)$.
2 点 $p \in M$ とベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ が $X_p = Y_p$ を満たしているならば，$\beta(X)(p) = \beta(Y)(p)$.
3 ある 1 次微分形式が存在して，それから (8.1) によって得られる写像が β と一致する．

証明. **1** $\Rightarrow$ **2**: β の線型性から「$X_p = 0$ ならば $\beta(X)(p) = 0$」を示せばよい．これは補題 7.2 (4) の証明とまったく同じである．

2 $\Rightarrow$ **3**: $x \in T_pM$ に対して $X \in \mathfrak{X}(M)$ で $X_p = x$ となる X を一つ選び，$\hat\beta_p(x) = \beta(X)(p)$ とおくと，仮定よりこれは X の選び方によらない．したがって写像 $\hat\beta_p\colon T_pM \to \boldsymbol{R}$ が定まるが，β の線型性より $\hat\beta_p \in T_p^*M$ となる．とくに $\beta(X)$ が滑らかであるから $p \mapsto \hat\beta_p$ は T^*M の切断を与えている．この 1 次微分形式 $\hat\beta$ によって (8.1) により β は得られる．

3 $\Rightarrow$ **1**: β に **3** により対応する 1 次微分形式を $\hat\beta$ で表すと，

$$\beta(fX)(p) = \hat\beta_p(f(p)X_p) = f(p)\hat\beta_p(X_p) = f(p)\beta(X)(p) = (f\beta(X))(p). \qquad \square$$

■テンソル場 一般に，k 個の T_pM のテンソル積と l 個の T_p^*M のテンソル積から定まるベクトル束

$$TM^{\otimes k} \otimes T^*M^{\otimes l} = \overbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}^{k\text{ 個}} \otimes \overbrace{T^*M \otimes \dots T^*M}^{l\text{ 個}}$$

の切断を (k,l) **型テンソル場**という．(k,l) 型テンソル場に対して上で述べたことを一般化したいが，記号が煩雑になることを避けるため，次の 2 つの場合を見て一般的にはどうなるかを見てとって欲しい．

$T^*M \otimes T^*M$ の場合 テンソル積の定義から，切断 $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ は双線型写像

$$\alpha\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M), \qquad \alpha(X,Y)(p) = \alpha_p(X_p, Y_p) \tag{8.2}$$

を与える．

補題 8.3. 双線型写像 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathcal{F}(M)$ が $\Gamma(T^*M\otimes T^*M)$ の要素から (8.2) によって得られたものであるための必要十分条件は

$$\alpha(fX,Y)=\alpha(X,fY)=f\alpha(X,Y)$$

が成り立つことである.

$TM\otimes T^*M$ **の場合**　切断 $L\in\Gamma(TM\otimes T^*M)$ を **1 次変換**という．これは点 $p\in M$ に対して $L_p\in T_pM\otimes T_p^*M$ を与えるが，補題 2.4 によりこれは線型写像 $L_p\colon T_pM\to T_pM$ と見なすことができる．そこで，$TM\otimes T^*M$ のことを $\mathrm{Hom}(TM,TM)$ あるいは $\mathrm{End}(TM)$ と書くこともある．すると，今までと同様に写像

$$L\colon \mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)\qquad L(X)_p=L_p(X_p)\tag{8.3}$$

が定まる.

補題 8.4. 双線型写像 $\alpha\colon \mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ が $\Gamma(\mathrm{End}(TM))$ の要素から (8.3) によって得られたものであるための必要十分条件は

$$L(fX)=fL(X)$$

が成り立つことである.

例 8.5. リーマン計量 g は $(0,2)$ 型テンソル場である．そこで g のことを**計量テンソル**と呼ぶこともある.

例 8.6. 二つの線型写像 $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を

$$(X,Y)\longmapsto[X,Y],\qquad (X,Y)\longmapsto\nabla_XY$$

で定めると，これらは M 上のテンソル場を定めない.

例 8.7. 多様体 M 上の線型接続 ∇ に対して

$$T(X,Y):=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]$$

によって写像 $T\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を定義すると，これは $(1,2)$ 型テンソル場を与える．T を接続 T の**捩率テンソル** *torsion tensor* という．前回述べたようにリーマン接続の捩率テンソルは 0 である．このように $T=0$ となる接続のことを**捩れのない** *torsion free* 接続，あるいは対称接続という.

例 8.8. 定理 7.1 の証明で少しごまかしていた点があった．写像 $\varphi\colon\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を定義したあとで，それに写像 $\#$ を施したが，$\#$ は各 T_p^*M 上で定義されているので，この操作が許されるためには φ が $TM\otimes T^*M$ の切断でなければならない．すなわち，$\varphi(fX)=f\varphi(X)$ を確かめておく必要がある.

■**交代形式**　有限次元線型空間 V の双対空間 V^* の k 個のテンソル積 $W=V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ を考える．$\alpha\in W$ が**交代的**である，とは，任意の $X_1,\dots,X_k\in V$ と k 文字の置換 $\mu\in S_k$ に対して

$$\alpha(X_{\mu(1)},\dots,X_{\mu(k)})=(\operatorname{sign}\mu)\alpha(X_1,\dots,X_k)$$

が成り立つことである．ただし $\operatorname{sign}\mu$ は置換の符号である．交代的な W の要素を k **次交代形式**とよび，その全体を

$$\wedge^k(V^*)=\bigl\{\alpha\in\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{k\text{ 個}}\ |\ \alpha \text{ は交代的}\bigr\}$$

と書く．

補題 8.9. 線型空間 V の次元が n であるとき

$$\dim \wedge^k(V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

である．とくに $n < k$ ならば $\dim \wedge^k(V^*) = 0$ である．

証明. V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ の双対基底を $\{\sigma^1, \dots, \sigma^n\}$ と書く．いま，

$$\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} := \sum_{\mu \in S_k} (\operatorname{sign} \mu) \sigma^{i_{\mu(1)}} \otimes \dots \otimes \sigma^{i_{\mu(k)}} \tag{8.4}$$

と定めると，これは k 次交代形式で，

$$\{\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} \mid 1 \leqq i_1 < i_2 \dots < i_k \leqq n\} \tag{8.5}$$

は $\wedge^k(V^*)$ の基底を与えている． □

とくに $\wedge^1(V^*) = V^*$, $\wedge^0(V^*) = \boldsymbol{R}$ としておく．

例 8.10. $\boldsymbol{R}^n$ の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ に対して

$$\omega(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \dots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$$

とすると ω は $\boldsymbol{R}^n$ 上の n 次交代形式である．ただし，右辺は $\boldsymbol{v}_j$ を列ベクトルと見なして得られる n 次正方行列の行列式である．とくに $\boldsymbol{R}^n$ の標準基底の双対基底を $\{\sigma^1, \dots, \sigma^n\}$ と表せば

$$\omega = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n$$

である．

式 (8.4) を用いて直和

$$\wedge(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{k=n} \wedge^k(V^*)$$

に積 $\wedge$ を定義することができ，基底のとり方によらないことがわかる．この積を外積，多元環 $\big(\wedge(V^*), \wedge\big)$ を**外積代数**という．

■微分形式　ベクトル空間 T_pM 上の k 次交代形式全体の空間 $\wedge^k(T_p^*M)$ から多様体 M 上のベクトル束 $\wedge^k(T^*M)$ をつくることができる．このベクトル束の切断を k 次**微分形式**という．k 次微分形式全体の集合を

$$\Omega^k(M) := \Gamma(\wedge^k(T^*M))$$

と書く．

例 8.11. 0 次微分形式とは M 上の滑らかな関数のこと，1 次微分形式は T^*M の切断のことである．

例 8.12. 多様体 M が**向きづけ可能** *orientable* であるとは，M のアトラス $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ で，どのような α, β をとっても座標変換 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ のヤコビ行列式がつねに正の値をとるようなものが存在することである．このようなアトラスを一つ指定することが M の向きを一つ指定することと考える．M のチャート (V, ψ) が

アトラス $\mathcal{A}$ が定める向きに同調している，とは，任意の $(U,\varphi_\alpha)\in\mathcal{A}$ に対して $\psi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ のヤコビ行列式が正となることである．

今，(M,g) は向きづけられた（向きづけ可能であって，一つ向きが指定された）リーマン多様体とする．向きに同調した座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ をとり，T_pM の基底 $\{\partial/\partial x^j\}$ の双対基底を $\{dx^1,\dots,dx^m\}$ と書いておく．このとき，

$$\omega_g := \sqrt{g}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^m,\qquad g=\det[g_{ij}]\qquad g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$$

とおくと，ω_g は向きに同調する座標のとり方によらない．この ω_g を M のリーマン計量 g から定まる**体積形式** *volume form* とよぶ．

k 次微分形式 $\omega\in\Omega^k(M)$ に対して

$$d\omega\colon \overbrace{\mathfrak{X}(M)\times\dots\times\mathfrak{X}(M)}^{k+1\text{ 個}}\to\mathcal{F}(M)$$

を

$$\begin{aligned}(8.6)\quad d\omega(X_1,\dots,X_{k+1}) := &\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}X_j\bigl(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)\bigr)\\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\bigl([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k\bigr)\qquad X_j\in\mathfrak{X}(M)\end{aligned}$$

で定める．ただし “$\hat{X}_j$” はその部分を取り除くことを意味する．すると，

補題 8.13. 式 (8.6) の $d\omega$ は $k+1$ 次微分形式である．さらに

$$\mathcal{F}(M)=\Omega^0(M)\xrightarrow{d}\Omega^1(M)\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Omega^m(M)\qquad(m=\dim M)$$

は cochain complex をなす．すなわち $d\circ d=0$ が成り立つ．

証明. まず，$d\omega$ が $(0,k+1)$ テンソル場であることは，

$$d\omega(X_1,\dots,fX_j,\dots,X_k)=f\,d\omega(X_1,\dots,X_j,\dots,X_k)$$

であることからわかる．さらに，交代性は定義からほぼ明らかであるから $d\omega\in\Omega^{k+1}(M)$ である．$d\circ d=0$ は演習問題としよう． □

補題 8.13 の後半より，cochain complex $(\Omega^*(M),d)$ から（$\boldsymbol{R}$-係数）コホモロジーを定義することができる．これを**ド・ラムコホモロジ—** *de Rham cohomology* という．コンパクト多様体に対して，ド・ラムコホモロジ—は有限次元であり，組み合わせ的に定義される実係数コホモロジー群と同型である（ド・ラムの定理）．

例 8.14. 多様体 M 上の捩れのない二つの線型接続 ∇, $\widetilde{\nabla}$ をとる．このとき

$$A(X,Y):=\widetilde{\nabla}_XY-\nabla_XY$$

により $A\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を定義すると，A は $(1,2)$ 型テンソルで，

$$A(X,Y)=A(Y,X)$$

が成り立つ．したがって A はベクトル束

$$S^2(T^*M)\otimes TM \qquad \bigl(S^2(T^*M):=\{A\in T^*M\otimes T^*M\,;\,A(v,w)=A(w,v)\}\bigr)$$

の切断である．

このような $S^2(T^*M)\otimes TM$ の切断を TM **に値をとる対称 2 次形式**とよび，そのようなものの全体を $S^2(M,TM)$ と書くことがある．

命題 8.15. 多様体 M の捩れのない線型接続 ∇ をひとつ固定する．このとき，任意の $A\in S^2(M,TM)$ に対して

$$\nabla^A_X Y := \nabla_X Y + A(X,Y)$$

とおくと，∇^A もまた M 上の捩れのない線型接続である．

とくに，M 上の捩れのない線型接続は，$S^2(M,TM)$ を付随するベクトル空間にもつような（無限次元）アファイン空間となっている．

■ベクトル場の共変微分 多様体 M 上に線型接続 ∇ が与えられているとき，ベクトル場 X,Y に対して $\nabla_X Y$ を Y の X 方向への**共変微分** *covariant derivative* ということがある．次は，リーマン接続に関しては補題 7.2 の最後の主張であった：

補題 8.16. ベクトル場 $X_1,X_2\in\mathfrak{X}(M)$ が $X_1(p)=X_2(p)$ を満たしているならば $\nabla_{X_1}Y(p)=\nabla_{X_2}Y(p)$.

したがって，$Y\in\mathfrak{X}(M)$, $v\in T_pM$ に対して，$X_p=v$ となるベクトル場 X を一つとり

$$\nabla_v Y = \nabla_X Y(p)\in T_pM$$

とおくことにより，「Y の p における v 方向の共変微分」を定めることができる．

とくに

$$\nabla Y\colon T_pM\ni v\longmapsto \nabla_v Y\in T_pM$$

とすれば，∇Y は T_pM の線型変換を与えている．すなわち

$$\nabla Y\in\Omega^1(M,TM)$$

であることがわかる．これを Y の共変微分ということもある．

局所座標 (x^j) に関する接続の係数を Γ^k_{ij} とする：

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

このとき，

$$\nabla_v Y=\sum_{j,k} v^j\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^j}+\sum_l \Gamma^k_{jl}Y^l\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\qquad \left(v=\sum v^j\frac{\partial}{\partial x^j},\quad Y=\sum Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

である．

共変微分 ∇Y が恒等的に 0 となるとき，ベクトル場 Y は接続 ∇ に関して**平行** *parallel* であるといわれる．

■テンソル場の共変微分　次に，線型接続 ∇ によるテンソル場の共変微分を定義する．再び記号の煩雑さを避けるため，特別な場合を見ることで，一般の場合を悟ってほしい．

(0,2) 型テンソルの場合　$\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ を $(0,2)$ 型テンソルとする．このとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_X \alpha \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を

$$\nabla_X \alpha(Y,Z) := X\big(\alpha(Y,Z)\big) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

で定義する．すると，補題 8.3 より $\nabla_X \alpha$ はまた $(0,2)$ 型テンソルである．これを α の ∇ に関する X 方向の共変微分という．とくに $\nabla_{fX}\alpha = f\nabla_X \alpha$ が言えるから，$\nabla\alpha$ は $(0,3)$ 型テンソルである．これを α の共変微分という．

局所座標 (x^j) に関する α の成分を α_{ij} と書く：

$$\alpha_{ij} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

このとき

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \alpha = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\alpha_{ij} - \Gamma^l_{kj}\alpha_{il} - \Gamma^l_{ik}\alpha_{lj}\right) dx^i \otimes dx^j$$

となる．このことを

$$\alpha_{ij;k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\alpha_{ij} - \sum_l \left(\Gamma^l_{kj}\alpha_{il} + \Gamma^l_{ik}\alpha_{lj}\right)$$

と書くことがある．

とくに，$\alpha \in \Omega^2(M)$ の場合，すなわち α が交代的であるとき，$\nabla_X \alpha$ もまた交代的になる．一般に k 次微分形式の共変微分は k 次微分形式である．

命題 8.17. リーマン多様体 (M,g) のリーマン接続を ∇ とする．

1 リーマン計量は ∇ に関して平行である．

2 とくに M が向きづけられているとき，g から誘導される体積要素 ω_g（例 8.12）は ∇ に関して平行である．

(1,1) 型テンソルの場合　$(1,1)$ 型テンソル $L \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ に対して，

$$(\nabla_X L)(Y) := \nabla_X\big(L(Y)\big) - L(\nabla_X Y)$$

と定めると，$\nabla_X L \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ となる．これにより L の共変微分 ∇L を求めることができる．

問題

1 補題 8.2 の証明を完全にしなさい．

2 補題 8.2 の証明にならって補題 8.3, 8.4 を証明しなさい．

3 例 8.6，8.14 を確かめなさい．

4 例 8.10 を確かめなさい．

5 補題 8.13 の証明を完全にしなさい．

6 命題 8.15 を証明しなさい．

7 命題 8.17 を証明しなさい．（後半は，たとえば，成分で計算して (7.3) を用いる）．