2009 年 7 月 6 日 (2009 年 7 月 13 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 9

お知らせ

- 授業 web ページには訂正した講義資料をおいてあります．修正箇所は青字になっています．ご参考までに.
- 試験予告（前回の講義資料に誤りがありました）：**7 月 27 日の 13 時より試験**を行います.
  - 場所：1401
  - 試験範囲：授業で扱った内容.
  - 試験問題：演習問題程度．なるべくやさしくします.
  - 持ち込み：ノート，テキスト，参考書など可.

  やむを得ない事情により試験を受けられない方は山田まで**事前に**ご連絡ください.

前回までの訂正

- 前回の講義資料「お知らせ」にて試験の日程が間違っておりました．今回のお知らせをご覧ください.
- 講義資料 8，1 ページ，下から 8 行目：考えるよりも計算を」行う ⇒ 考えるよりも計算を行う
- 講義資料 8，1 ページ，下から 6 行目：孤長さ ⇒ 孤長
- 講義資料 8，5 ページ，(8.4) 式：

$$\sigma_{i_1}\wedge\dots\wedge\sigma_{i_k} := \sum_{\mu\in S_k}(\operatorname{sign}\mu)\sigma_{i_{\mu(1)}}\otimes\dots\otimes\sigma_{i_{\mu(k)}} \quad\Rightarrow\quad \sigma^{i_1}\wedge\dots\wedge\sigma^{i_k} := \sum_{\mu\in S_k}(\operatorname{sign}\mu)\sigma^{i_{\mu(1)}}\otimes\dots\otimes\sigma^{i_{\mu(k)}}$$

- 講義資料 8，5 ページ，(8.5) 式：

$$\{\sigma_{i_1}\wedge\dots\wedge\sigma_{i_k}\,|\,1\leqq i_1<i_2\dots<i_k\leqq n\} \quad\Rightarrow\quad \{\sigma^{i_1}\wedge\dots\wedge\sigma^{i_k}\,|\,1\leqq i_1<i_2\dots<i_k\leqq n\}$$

- 講義資料 8，6 ページ，補題 8.13 の 2 行上：$X^j \Rightarrow X_j$.
- 講義資料 8，6 ページ，補題 8.13 の証明の 2 行目：

$$d\omega(X^1,\dots,fX^j,\dots,X^k) = fd\omega(X^1,\dots,X^j,\dots,X^k) \quad\Rightarrow\quad d\omega(X_1,\dots,fX_j,\dots,X_k) = fd\omega(X_1,\dots,X_j,\dots,X_k)$$

- 講義資料 8，6 ページ，下から 5 行目：「組み合わせて的」⇒「組み合わせ的」
- 講義資料 8，6 ページ，下から 5 行目：「コホモロジー群」⇒「実係数コホモロジー群」
- 講義資料 8，6 ページ，一番下：$A(X,Y)=-A(Y,X) \Rightarrow A(X,Y)=A(Y,X)$.
- 講義資料 8, 7 ページ，2 行目：

$$\Omega^2(T^*M)\otimes TM \quad\Rightarrow\quad S^2(T^*M)\otimes TM \quad \bigl(S^2(T^*M):=\{A\in T^*M\otimes T^*M\,;\,A(v,w)=A(w,v)\}\bigr)$$

- 講義資料 8，7 ページ，4 行目：「$\Omega^2(T^*M)\otimes TM$」⇒ 「$S^2(T^*M)\otimes TM$」
- 講義資料 8，7 ページ，4 行目：「2 次微分形式」⇒ 「対称 2 次形式」
- 講義資料 8，7 ページ，5 行目，10 行目：「$\Omega^2(M,TM)$」⇒「$S^2(M,TM)$」
- 黒板にて：共変微分の成分表示をするさいに

$$X=\sum X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\qquad Y=\sum Y^i\frac{\partial}{\partial y^i}$$

と（勢い余って）書いてしまったそうです．

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

が正しいです．

- 「$\mathrm{Gr}_2(TM)$ 」が読めなかった方がいらっしゃるようです．この字です．

授業に関する御意見

- どの空間にあるかわからなくなることが多かったので，整理していきたい．
  山田のコメント： そうですね．文字が「どんな量をあらわしているか」をきちんと読み取ってほしいものです．
- 講義資料が入手できるようになって助かっています．
  山田のコメント： 遅くなりご迷惑をお掛けしました．
- 最近難しいので，試験問題は講義の初めの方から出してもらえると助かります．
  山田のコメント： どうしよう...
- ノートを書くさいに私も手が痛くなりました．先生が手をパタパタする姿は痛々しいです．
  山田のコメント： 学生時代にレポートを書いたら手が上がらなくなったことがあります（当時は手書き，一晩で 30 ページ以上書いたような気が...）
- Web ページ見ました！
  山田のコメント： どうも

質問と回答

質問： 体積要素がイメージしにくいです．

お答え： 最初はそうかもしれませんね．2 次元の場合に限るとどうですか？

質問： プリント p. 6 の例 8.14 の $A(X,Y)$ の定義において，二つの線形接続 ∇, $\widetilde{\nabla}$ は自由にとっていいのですか．

お答え： 任意の 2 つの線形接続をとるごとに A が決まるということです．

質問： $\beta(p)$ と β_p の違いがよくわかりません．

お答え： たとえば β を 1 次微分形式としましょう．すると，これは T^*M の切断ですから，写像 $\beta\colon M \to T^*M$ と考えることができます．その p での値ですから $\beta(p) \in T_p^*M$ と書くのが普通な気がします．それでよいのですが，$\beta(p)$ は T_pM の双対空間の要素ですから，そこに「ベクトル」を「入れる」ことができます．このとき $\beta(p)(X)$ と書くより $\beta_p(X)$ と書くほうが気持ちがいいかなあ，とおもい，ベクトル場や微分形式の p における値には「下つきの p」をしばしば使っています．

質問： 共変微分が恒等的に 0 になるときに，なぜ「平行」という言葉を使うのですか？

お答え： ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ 上のベクトル場 X を

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} \qquad (X^1, \dots, X^n \text{ は定数})$$

とします．ただし $(x^1, \dots, x^n)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な座標系．すなわち，各 $T_p\boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ と同一視すれば「一定な」ベクトル場ですが，$X = X_p \in T_p\boldsymbol{R}^n$ と $X = X_q \in T_q\boldsymbol{R}^n$ をそれぞれ p, q から「生えている」ベクトルとみなせばそれらは互いに平行移動でうつりあっています．このようなベクトル場を「ユークリッド空間の平行なベクトル場」と呼ぶのは自然だと思います．さて，$\boldsymbol{R}^n$ 上のベクトル場が平行であるための必要十分条件は $DX = 0$ となることです．ただし D は $\boldsymbol{R}^n$ の標準（Levi-Civita）接続．このことを踏まえて，一般のリーマン多様体上のベクトル場 X が $\nabla X = 0$ を満たすとき，平行，と呼ぶことにしたと思ってください．

質問： さまざまな接続がありそうですが，それは接平面んつなげ方が様々あるということだと思うのですが，いろいろありすぎると，ベクトル場の微分であるから，曲率が様々になるような気がします．こういうときは○○接続，△△接続のように使い分けることになるのでしょうか？

お答え： そうです．

質問： 確か今考えているのは「リーマン多様体上の曲線に対して曲率を定義したい」（間違ってたらゴメンなさい）だったと思いますが，今回の話がそれにどうつながるのかわかりません．こんなに（私の中では）ややこしいことをしないと定義できないのですか？

お答え：　まず「曲線に曲率を定義する」のではなく「リーマン多様体自体に曲率を定義する」のです．慣れてしまえば単純な作業ですが「高次元の量」を記述するのは面倒ですね．

質問：「共変微分」にはどのような意味があるのですか．

お答え：　接続 ∇ による微分．座標によらない概念である，という意味が含まれています．

質問：　$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$：捩率テンソルが 0 だとどういうことがあるのですか．逆にねじれがあると，どのような問題がでてくるのでしょうか．

お答え：　たとえばリッチテンソルが対称にならない．

質問：　メビウスの帯以外で向きづけ可能でない例を教えてください．

お答え：　射影平面，クラインの壷．

質問：　1 次微分形式から類推すると，k 次微分形式 $(k \geqq 2)$ は $(0,k)$ 型テンソル場の切断と思ってしまいますが，定義で交代性の条件を満たすようにしているのはどのような理由がありますか？

お答え：　そういう量（$\boldsymbol{R}^3$ の中の曲面の面積要素など）が実際にあって，それを考える必要があるから．外微分という操作があって，便利だから．それから...

質問：　微分形式を用いることの利点を教えてください．

お答え：　いろいろありすぎる．

9 曲率

■線型接続の曲率テンソル　多様体 M 上に捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとき，$R\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ を

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{9.1}$$

と定める．

補題 9.1. 式 (9.1) で与えられる R は M 上の $(1,3)$ 型テンソル場を与える．

証明. 関数 $f\in\mathcal{F}(M)$ に対して

$$R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)(fZ) = f\bigl(R(X,Y)Z\bigr)$$

が成り立つ． □

テンソル場 R を接続 ∇ の**曲率テンソル** *curvature tensor*，あるいは単に**曲率**という．

命題 9.2. 捩れのない線型接続 ∇ の曲率テンソル R は次を満たす：

1 $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$.
2 $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$
(ビアンキの第一恒等式 Bianchi's first identity).
3 $(\nabla_X R)(Y,Z)W+(\nabla_Y R)(Z,X)W+(\nabla_Z R)(X,Y)W=0$
(ビアンキの第二恒等式).

証明. **1** は定義から直接わかる．**2** は，定義を直接書き下し，ブラケット積に関するヤコビの恒等式

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \tag{9.2}$$

を用いればわかる．さらに **3** も定義を直接書き下せば（$T=0$ を用いて）わかる． □

曲率テンソルの成分表示を与えよう．記号の煩雑さを避けるために，局所座標系 $(x^1,\dots,x^m)$ から誘導される基底ベクトル場 $\partial/\partial x^j$ を ∂_j と書き，接続 ∇ の接続係数を Γ^k_{ij} と書く：

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\sum_k\Gamma^k_{ji}\partial_k \qquad \Gamma^k_{ji}=\Gamma^k_{ij}.$$

曲率テンソルの成分を

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k=\sum_{l=1}^m R^l_{kji}\partial_l \tag{9.3}$$

と書く[*1] と，これは接続係数を用いて

$$R^l_{kji}=\Gamma^l_{kj,i}-\Gamma^l_{ki,j}+\sum_m\left(\Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj}\right) \qquad \Gamma^l_{kj,i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{kj}. \tag{9.4}$$

が成り立つ．

[*1] 曲率テンソルの添字の付け方は書物によって様々である．複数の書物を参考にするときは注意されたい．ここでは「∂_k を ∂_j, ∂_i で微分する」という気持でこの順序にした．

■アファイン座標系　多様体 M 上に捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとする．このとき，∇ の接続係数 Γ_{ij}^k がすべて 0 になるような M の座標系を**アファイン座標系** *affine coordinate system* という．

例 9.3. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の標準計量 g_0 に関するリーマン接続を D と書くと，標準座標系 $(x^1,\dots,x^n)$ に対して

$$D_X Y = \sum_{j,l} X^j \frac{\partial Y^l}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l} \qquad X = \sum X^j\partial_j, \quad Y = \sum Y^j\partial_j$$

となり，とくに $D_{\partial_j}\partial_k = 0$ となる．すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ の標準座標系は D に関するアファイン座標系である．一方，たとえば $\boldsymbol{R}^2$ の極座標系はアファイン座標系ではない．

どんな線型接続に対してもアファイン座標系が存在するわけではない．

定理 9.4. 多様体 M 上の捩れのない線型接続 ∇ が与えられているとき，M の各点の近傍で ∇ に関するアファイン座標系が存在するための必要十分条件は，∇ の曲率テンソルが 0 となることである．

曲率テンソルが 0 となるような接続 ∇ を**平坦な接続** *flat connection* という．定理 9.4 を証明するために，次の事実を挙げておく[*2]：

補題 9.5 (フロベニウスの定理)**.** $\boldsymbol{R}^n$ の単連結な開集合 D 上で定義された n 次正方行列に値をもつ n 個の滑らかな関数 $A_1,\dots,A_n$ が

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_iA_j + A_jA_i = O \qquad (1 \leqq i,j \leqq n) \tag{9.5}$$

を満たしているとする．このとき，任意の点 $p \in D$ と任意の n 次正則行列 P_0 に対して，D 上で定義された n 次正則行列に値をとる滑らかな関数 P で $P(p) = P_0$ かつ

$$\frac{\partial P}{\partial x^j} = PA_j \qquad (j = 1,\dots,n) \tag{9.6}$$

を満たすものがただ一つ存在する．逆に (9.6) を満たす正則な P が存在するならば，A_i は (9.5) を満たす．

式 (9.5) は，(9.6) の両辺を x_i で微分した式と，その i, j を入れ替えた式をつくり，偏微分の順序交換可能性に注意して得られるものであることに注意しておく．(9.5) を (9.6) の**可積分条件**という．

定理 *9.4* の証明の方針．アファイン座標系が存在するならば (9.4) から平坦である．逆は，与えられた座標系から座標変換によってアファイン座標系をとることができることを言えばよい．もし，座標系 (x^j) がアファイン座標系 (y^a) に変換されたとすると，接続係数の変換公式（第 7 節の問題 1，この公式は一般の線型接続について成り立つ）で $\widetilde{\Gamma}_{ab}^c = 0$ であるから，

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_c \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial y^c}.$$

ここで $(\partial x^k/\partial y^c)$ の逆行列は $(\partial y^c/\partial x^k)$ であるから，

$$\frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial y^c}{\partial x^k}$$

[*2] 「フロベニウスの定理」はいろいろなバージョンがある．たとえばベクトル場の可積分性に関するフロベニウスの定理は多様体の入門書なら必ず記述があるが，ここに挙げる定理はその一つのヴァリエーションである．

が成り立つ．これを行列 $(\partial y^c/\partial x^j)$ に関する微分方程式と思うと，その可積分条件は $R^l_{kij}=0$ となることである．このことに注意して，フロベニウスの定理を適用すれば，アファイン座標系を構成することができる． □

■リーマン曲率テンソル　以下，(M,g) はリーマン多様体，g によって得られる内積を $\langle\ ,\ \rangle$, ∇ を (M,g) のリーマン接続とする．このとき，∇ の曲率テンソル R を**リーマン曲率テンソル**あるいは，単に曲率テンソルとよぶ．第 7 節で見たようにリーマン計量により TM と T^*M は同一視できるから，$(1,3)$ 型テンソル R は $(0,4)$ 型テンソルと同一視できる．これも（困ったことに）同じ R で表し，リーマン曲率テンソルという：

$$R(X,Y,Z,T):=\langle R(X,Y)Z,T\rangle\,. \tag{9.7}$$

命題 9.6. リーマン曲率テンソルは次の性質を持つ：

1 $R(X,Y,Z,T)=-R(Y,X,Z,T)=-R(X,Y,T,Z)$.
2 $R(X,Y,Z,T)+R(Y,Z,X,T)+R(Z,X,Y,T)=0$.
3 $(\nabla_X R)(Y,Z,T,W)+(\nabla_Y R)(Z,X,T,W)+(\nabla_Z R)(X,Y,T,W)=0$.
4 $R(X,Y,Z,T)=R(Z,T,X,Y)$.

証明. **1** の第 1 の等式は命題 9.2 の **1**, **2** は命題 9.2 の **2**, **3** は命題 9.2 の **3** と，計量 g が ∇ に関して平行であることからわかる．また，**1** の第 2 式は,

$$\langle R(X,Y)Z,T\rangle=\langle\nabla_X\nabla_Y Z,T\rangle-\langle\nabla_Y\nabla_X Z,T\rangle-\left\langle\nabla_{[X,Y]}Z,T\right\rangle$$

に，g の平行性 $\langle\nabla_V W,U\rangle=V\langle W,U\rangle-\langle W,\nabla_V U\rangle$ を使えば得られる．

最後に **4** を示す．**2** から

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,T)+R(Y,Z,X,T)+R(Z,X,Y,T)&=0\\R(T,X,Y,Z)+R(Y,T,X,Z)+R(X,Y,T,Z)&=0\\R(T,Y,Z,X)+R(Y,Z,T,X)+R(Z,T,Y,X)&=0\\R(T,Z,X,Y)+R(Z,X,T,Y)+R(X,T,Z,Y)&=0\end{aligned}$$

を得るが，これらを加えあわせて **1** および **2** を用いれば結論が得られる． □

いま（接続 ∇ の曲率テンソルとは限らない）$(0,4)$ 型テンソル R が命題 9.6 の **1**, **2**, **4** の性質を満たしているとき，R は**曲率型テンソル**という．

補題 9.7. 2 つの曲率型テンソル R, Q が

$$R(X,Y,Y,X)=Q(X,Y,Y,X)\qquad X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

を満たしているならば $R=Q$ である．

証明. $R(X+Z,Y,Y,X+Z)=Q(X+Z,Y,Y,X+Z)$ を展開すれば，$R(X,Y,Y,Z)=Q(X,Y,Y,Z)$ を得る．以後，パズルと思って頑張ると結論が得られる． □

■断面曲率 リーマン多様体 (M,g) の点 p における接空間 T_pM の 2 次元部分空間 Π_p を一つとる．Π_p の基底 $\{v,w\}$ に対して

$$K(\Pi_p) := \frac{R(v,w,w,v)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2} \tag{9.8}$$

とすると，$K(\Pi_p)$ は Π_p の基底のとり方によらない．ただし R はリーマン曲率テンソルである．この $K(\Pi_p)$ を (M,g) の p における Π_p に関する**断面曲率** *sectional curvature* という．

一般に $\boldsymbol{R}^n$ の 2 次元部分空間全体の集合 $\mathrm{Gr}_2(\boldsymbol{R}^n)$ には $(2n-3)$ 次元のコンパクト多様体の構造が入る．これを $\boldsymbol{R}^n$ の 2 次グラスマン多様体という．ここで多様体の各点で T_pM の 2 次グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_2(T_pM)$ を考えることにより，ファイバーが $\mathrm{Gr}_2(\boldsymbol{R}^n)$ となるようなファイバー束（未定義）を考えることができる．これを $\mathrm{Gr}_2(M)$ と書くことにすれば，断面曲率 K は $\mathrm{Gr}_2(M)$ 上で定義された実数値関数である．

補題 9.7 より，断面曲率を指定することは曲率テンソルを指定することと同値である．

例 9.8. 2 次元リーマン多様体 (M,g) の断面曲率は M 上の関数になる．いま，局所座標系 $(u^1,u^2)=(u,v)$ に関して，計量 g が

$$g = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

で与えられているとき，断面曲率 K は

$$K = \frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2)}{4(EG-F^2)^2} + \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} + \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)}$$

となる．これは，曲面論におけるガウス曲率を第一基本量で表す式（ガウスの驚異の定理，たとえば梅原・山田「曲線と曲面」（裳華房）99 ページ）である．

そこで，2 次元リーマン多様体の断面曲率のことを**ガウス曲率**ということもある．

命題 9.9. リーマン多様体 (M,g) の断面曲率が定数 k ならば，曲率テンソルは

$$R(X,Y,Z,T) = k\bigl(\langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle\bigr)$$

を満たす．

証明. 結論の式の右辺は曲率型テンソルを与えている．さらに，断面曲率が k であることから $Z=Y, T=X$ のときは結論の等式が成り立つ．したがって，補題 9.7 より結論を得る． □

断面曲率が一定のリーマン多様体を**定曲率リーマン多様体**とよぶ．

■リッチ曲率とスカラ曲率 リーマン多様体 (M,g) の点 p における接空間 T_pM の 1 次変換

$$\rho\colon T_pM \ni Z \longmapsto \rho(Z) \in T_pM$$

のトレースとは，T_pM の基底 $\{E_i\}$ に対して

$$\operatorname{tr}\rho = \sum_i \rho_i(E_i) \qquad \rho(X) = \sum_i \rho_i(X)E_i$$

で定まるスカラ $\operatorname{tr}\rho$ である．これは基底のとり方によらない．各点ごとにトレースとることにより，$(1,1)$ 型テンソルから関数をつくることができる．このような操作を**縮約** *contraction* という．

リーマン多様体 (M,g) 上のベクトル場 X, Y を固定すれば，$\rho\colon Z \longmapsto R(Z,X)Y$ は $(1,1)$ 型テンソルを与える．このトレースを

$$\operatorname{Ric}(X,Y) := \operatorname{tr}\{Z \longmapsto R(Z,X)Y\} \tag{9.9}$$

と書けば，これは双線型写像 $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathcal{F}(M)$ を与えるが，とくに，$(0,2)$ 型テンソルになる．これを**リッチ・テンソル** *Ricci tensor* という．命題 9.6 より Ric は対称であることがわかる：

$$\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{Ric}(Y,X).$$

とくに Ric は T_pM 上の 2 次形式を与える．T_pM 上の単位ベクトル v に対して

$$\operatorname{Ric}(v) := \operatorname{Ric}(v,v)$$

を v 方向の**リッチ曲率** *Ricci curvature* という．リーマン曲率を (9.3) のように成分表示すれば，

$$R_{ij} = \operatorname{Ric}(\partial_i,\partial_j) = \sum_l R^l_{jil} \tag{9.10}$$

である．

リッチ曲率は $(0,2)$ テンソルであるが，第 7 節のように計量を用いて TM と T^*M を同一視すれば $(1,1)$ テンソルと見なすことができる：

$$\operatorname{Ric}^{\#}\colon X \longmapsto \bigl(\operatorname{Ric}(X,\cdot)\bigr)^{\#}.$$

このトレース S を**スカラ曲率** *scalar curvature* という．

$$S = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}^{\#}. \tag{9.11}$$

局所的には

$$S = \sum_i \operatorname{Ric}(E_i,E_i) = \sum_{i,j} g^{ij}R_{ij}$$

である．ただし $\{E_i\}$ は T_pM の正規直交基底，(g^{ij}) はリーマン計量の（正規直交基底とは限らない基底に関する）成分 (g_{ij}) の逆行列である．

問題

1 補題 9.1 の証明を完全にしなさい．

2 ヤコビの恒等式 (9.2) を示し，命題 9.2 を証明しなさい．

3 等式 (9.4) を証明しなさい．

4 補題 9.5 の後半の部分を証明しなさい．

5 フロベニウスの定理（とポアンカレの補題）を用いて定理 9.4 を証明しなさい．

6 命題 9.6 を証明しなさい．

7 補題 9.7 を証明しなさい．

8 式 (9.8) の右辺は Π_p の基底のとり方によらないことを示しなさい．