2009 年 7 月 13 日

山田光太郎

kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意/数学特論 4 講義資料 10

お知らせ

- くどいようですが試験予告．来週は「海の日」（謎）のためお休みです．その次，**7 月 27 日の 13 時より試験**を行います．
  - 場所：1401
  - 試験範囲：授業で扱った内容．
  - 試験問題：演習問題程度．なるべくやさしくします．
  - 持ち込み：ノート，テキスト，参考書など可．

  単位が必要で，かつやむを得ない事情により試験を受けられない方は山田まで**事前に**ご連絡ください．
- 今回は提出物はありません．

前回の補足

- 命題 9.2 (ビアンキの第二恒等式) の $\nabla_X R$ の意味が解らなかった方がいらっしゃったので，補足します．講義資料 8 の 8 ページ，テンソル場の共変微分で説明した微分（$(0,2)$ テンソルや $(1,1)$ テンソルで説明しましたが）と同様に微分を行います：

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = \nabla_X\bigl(R(Y,Z)W\bigr) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y,\nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W.$$

  これにより，∇R は $(1,4)$ 型のテンソル場になります．

前回までの訂正

- 講義資料 9，2 ページ，質問と回答の 10 行目：最初から 2 番目の質問のあとに移動．
- 講義資料 9，4 ページ，(9.2) 式：$[X,[Y,Z]]+[Y,[X,Z]]+[Z,[X,Y]] \Rightarrow [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]$.
- 講義資料 9，5 ページ，下から 5 行目：第??節の問題?? $\Rightarrow$ 第 7 節の問題 1
- 講義資料 9，6 ページ，6 行目：第??節 $\Rightarrow$ 第 7 節
- 講義資料 9，6 ページ，命題 9.6 項目 1：$R(X,Y,Z,T)=)-R(Y,X,Z,T) \Rightarrow R(X,Y,Z,T)=-R(Y,X,Z,T)$
- 講義資料 9，6 ページ，下から 7 行目：1–3 の性質 $\Rightarrow$ 1,2, 4 の性質．
- 講義資料 9，7 ページ，(9.8) 式

$$K(\Pi_p) := \frac{R(X,Y,Y,X)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}$$

  の右辺の X, Y は X_p, Y_p ではないか，というご指摘をいただきましたが，すぐ前で「Π_p の基底 $\{X,Y\}$ に対して」とありますので X, Y はベクトル場ではなく接ベクトル（T_pM の要素）なので，そのままで間違いではありません．むしろ X_p とすると意味がなくなります．ただ，記号が悪いような気がしますね．X, Y の代わりに v, w と書きましょう．
- 講義資料 9，7 ページ，7 行目：リーマン曲率 $\Rightarrow$ リーマン曲率テンソル（左のように言うことも多いのですが）
- 講義資料 9，8 ページ，(9.10) 式の 2 行下：第??節 $\Rightarrow$ 第 7 節
- 講義で「断面曲率が正の定数で下からおさえられればコンパクト」と述べましたが，「完備性」の仮定が必要です．「完備リーマン多様体が，上の仮定を満たしたら」と読み替えてください．

授業に関する御意見

- テンソルの概念のイメージがつかめません．
  山田のコメント： 使いまくって，計算しまくって，いろいろ間違えて，そのうちに勘をつかむ，そういうことをする前にイメージが解る，ということはそんなにないと思います．
- いろいろな曲率がでてきて混乱してます．
  山田のコメント： そうでしょう．
- 集中講義のため途中退室しました．失礼をお許しください．
  山田のコメント： お気になさらないでください．
- 次回も集中講義のため休みます．
  山田のコメント： 残念です．
- 今回，確率の授業がありまして，その中で微分幾何との関連があるという話がありました．微分幾何はそれだけでなくその他の分野への応用があると感じました。
  山田のコメント： 大抵の分野がそうだと思います．自分はこれしか興味がないし知らない，ということでは新しいことはできません．
- テストがんばります．
  山田のコメント： そうしてください．
- 海の日は鵜にの記念日から来ており，明治天皇が汽船で東北巡幸なさったときに 7/20 に横浜港にお帰りになられた事に由来するそうです．
  山田のコメント： で，なんでその日を休みにしなければならないのかは，やはり激謎ですよね．

質問と回答

質問： 曲率テンソルやリーマン曲率テンソルを導入したのは断面曲率を定義するためですか？

お答え： ここではそう理解していただいて結構です．

質問： 命題 9.2, 3 $(\nabla_X R)(Y,Z)W$ と言う書き方は標準的な書き方なのですか？ $\nabla_X\bigl(R(Y,Z)W\bigr)$ ではないのですか？

お答え： 書き方の問題でなく，意味が違います．最初の方は，テンソル場 R の共変微分 $\nabla_X R$ に Y, Z, W を入れたもの，後の方，ベクトル場 $R(Y,Z)W$ を共変微分したもの．これらは一般に一致しません.「前回の補足」参照．

質問： 断面曲率，Ricci 曲率，スカラ曲率以外にも曲率はあるのでしょうか．あるとすれば，それはどんな量を知るためのものなのでしょうか．

お答え： ワイルの共形曲率テンソルや射影曲率テンソルも曲率といってよいでしょう．ある種の幾何構造の「可積分条件」として現れるテンソルを曲率とよぶことが多いようです．

質問： リーマン多様体のリッチ曲率やスカラ曲率が言ってのときは，それぞれどのような性質がありますか．

お答え： “リッチ曲率が一定” なら，アインシュタイン空間という特別なリーマン多様体でこれについては様々な研究があります．とくにアインシュタイン・ケーラー計量のに関わる問題は重要ですし，日本人の貢献も大きなところです．一方，次元が 3 以上のすべてのコンパクト多様体にはスカラ曲率一定な計量が存在します（山辺の問題）．すなわち，スカラ曲率一定な計量が入ることでは，多様体の位相的な性質を語ることはできません．

質問： 今回高次元で定義した曲率の 2 次元版がガウス曲率なのですね．

お答え： そうなのです．

質問： テンソルとはどのような概念なのですか？（イメージがつきません）

質問： テンソルはイメージがしにくいです．

お答え： 各点ごとに接空間の多重線型写像を与えるもの．

質問： Ricci はどういう意味なんですか？

お答え： 人名です．Curbastro Gregório Ricci (1853–1925).

質問： アファインとアフィンって同じですか？

お答え： 同じです．An affine connection だと “アファイン” のような気もしますが.

質問： フロベニウスの定理について，(9.5) を (9.6) の可積分条件というのはなぜですか？

お答え： 微分方程式を解くことを「積分する」という習慣からです．

質問： 省略記号の省略の度合いが激しくて分かりづらいです．

お答え： 具体的には？

10　定曲率空間

10.1　ユークリッド空間

例 3.7 で見た**ユークリッド空間** $\boldsymbol{R}^m$ の断面曲率を求めよう．各点 $p \in \boldsymbol{R}^m$ に対して

(10.1) $$T_p\boldsymbol{R}^n \ni \sum_j = 1^m X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \longleftrightarrow \quad (X^1, \dots, X^m) \in \boldsymbol{R}^m$$

なる同一視を行い，$T_p\boldsymbol{R}^n$ の内積を

(10.2) $$g(X,Y) = \langle X, Y\rangle = \sum_{j=1}^m X^j Y^j \qquad X = \sum X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

と定める．ただし $(x^1, \dots, x^m)$ は $\boldsymbol{R}^m$ の標準的な座標である．

■レビ・チビタ接続　ユークリッド空間のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{R}^m)$ は，(10.1) の同一視によって $\boldsymbol{R}^m$ 上で定義された m 個の関数の組

$$X = \bigl(X^1(x^1, \dots, x^m), \dots, X^m(x^1, \dots, x^m)\bigr)$$

とみなすことができる．したがって，点 p における接ベクトル $v \in T_p\boldsymbol{R}^n$ 方向の方向微分

$$dX(v) = \bigl(dX^1(v), \dots, dX^m(v)\bigr), \qquad dX\bigl(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigr) = \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^j}, \dots, \frac{\partial X^m}{\partial x^j}\right)$$

は意味をもつ．とくに，点 $p = (x^1, \dots, x^m)$ に対して p の位置ベクトルを対応させるようなベクトル場 p に対して

$$dp(v) = v$$

が成り立つ．

命題 10.1. ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{R}^m)$ に対して

$$d_X Y := dX(Y) \qquad \mathfrak{X}(\boldsymbol{R}^m)$$

と定めると，d は $\boldsymbol{R}^m$ のレビ・チビタ接続である．

証明. 定理 7.1 の 2 つの条件を満たすことを見ればよい．ベクトル場

(10.3) $$X = \sum X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad Z = \sum Z^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

に対して,

$$
\begin{aligned}
d_X Y - d_Y X &= dY(X) - dX(Y) \\
&= \left(\sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial Y^1}{\partial x^j}, \dots, \sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial Y^m}{\partial x^j}\right) - \left(\sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial X^1}{\partial x^j}, \dots, \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial X^m}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \left(X^j \frac{\partial Y_l}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X_l}{\partial x^j}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= [X, Y], \\
X \langle Y, Z\rangle &= \sum_{l=1}^m X^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sum_{j=1}^m Y^j Z^j\right) \\
&= \sum_{l=1}^m X^l \left(\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial Y^j}{\partial x^l} Z^j\right) + \left(Y^j \sum_{j=1}^m \frac{\partial Z^j}{\partial x^l}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\left(\sum_{l=1}^m X^l \frac{\partial Y^j}{\partial x^l} Z^j\right)\right) + \sum_{j=1}^m \left(\left(Y^j \sum_{l=1}^m X^l \frac{\partial Z^j}{\partial x^l}\right)\right) \\
&= \langle d_X Y, Z\rangle + \langle Y, d_X Z\rangle .
\end{aligned}
$$

以上で d がレビ・チビタ接続であることがわかった. □

■曲率　ユークリッド空間の曲率テンソルを求めよう．式 (10.3) の X, Y, Z に対して

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= d_X d_Y Z - d_Y d_X Z - d_{[X,Y]} Z \\
&= \sum_{l=1}^m \left(d_X \left(\sum Y^j \frac{\partial Z^l}{\partial x^j}\right) - d_Y \left(\sum X^j \frac{\partial Z^l}{\partial x^j}\right) - \left(\sum_{j,s} \left(X^j \frac{\partial Y^s}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial Y^s}{\partial x^j}\right)\right) \frac{\partial Z^l}{\partial x^s}\right) \frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= \sum_{l,j,s} \left(\left(X^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(Y^j \frac{\partial Z^s}{\partial x^j}\right)\right) - \left(Y^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(X^j \frac{\partial Z^s}{\partial x^j}\right)\right) - \left(X^j \frac{\partial Y^s}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial Y^s}{\partial x^j}\right) \frac{\partial Z^l}{\partial x^s}\right) \frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= \cdots = 0
\end{aligned}
$$

となる.

命題 10.2. ユークリッド空間の曲率テンソルは恒等的に 0 である．とくに，ユークリッド空間の断面曲率は 0 である.

10.2　ミンコフスキー空間

例 4.4 のミンコフスキー空間

$$L^{n+1} = (\boldsymbol{R}^{n+1}, g_L), \qquad g_L = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$$

を考える．これは多様体としては $\boldsymbol{R}^{n+1}$ だから，(10.1) により，$T_p L^{n+1}$ は L^{n+1} と同一視でき，内積は

$$\langle X, Y\rangle = -X^0 Y^0 + X^1 Y^1 + \cdots + X^n Y^n$$

と表される（いくつかの記号を定義せず，手を抜いているので，確認してほしい）．したがって，ベクトル場の「方向微分」も同様に定義され，前節の議論がそのまま成り立つ．すなわち

命題 10.3. ミンコフスキー空間 L^{n+1} を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同一視し，ベクトル場の方向微分 d を考えると，これは L^{n+1} のレビ・チビタ接続でもある．さらに L^{n+1} の曲率テンソルは 0 である．

10.3 双曲空間

正の定数 c に対して

$$H^n(-c^2) = \{p = (p^0, \dots, p^n) \in L^{n+1}\,;\, \langle p, p\rangle = -c^{-2}, p_0 > 0\}$$

により L^{n+1} の部分多様体を定義し，双曲空間とよぶ（例 4.5 参照）．点 $p \in H^n(-c^2)$ に対して

$$T_pH^n(-c^2) = \{\boldsymbol{v} \in L^{n+1}\,;\, \langle p, \boldsymbol{v}\rangle = 0\}$$

となるが，ベクトル $p \in L^{n+1}$ に直交する零でないベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle > 0$ を満たすので，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $TH^n(-c^2)$ に制限することで $H^{n+1}(-c^2)$ はリーマン多様体になる．とくに，各点 $p \in H^n(-c^2)$ に対して，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関する直交直和分解

$$L^{n+1} = T_pH^n(-c^2) \oplus \boldsymbol{R}p \tag{10.4}$$

が得られる．

■レビ・チビタ接続　双曲空間 $H^n(-c^2)$ 上のベクトル場 X, Y に対して，「Y の X 方向への方向微分」

$$d_XY$$

は $H^n(-c^2)$ 上の各点で L^{n+1} のベクトルを与えるが，$H^n(-c^2)$ の接ベクトルは一般に与えない．そこで，d_XY を (10.4) にしたがって分解して $TH^n(-c^2)$ の成分をとり，それを D_XY と書く．

補題 10.4. $D_XY = d_XY - c^2 \langle X, Y\rangle p$.

証明. 直和分解 (10.4) にしたがって $d_XY = D_XY + \alpha p$ と分解する．ただし α は $H^n(-c^2)$ 上の関数である．いま，この両辺に p を内積すると，$\langle p, p\rangle = -c^{-2}$，$p \perp T_pH^n(-c^2)$ から

$$-c^{-2}\alpha = \langle d_XY, p\rangle = X\langle Y, p\rangle - \langle Y, d_Xp\rangle = -\langle X, Y\rangle$$

なり，結論が得られた． □

命題 10.5. 補題 10.4 の D は $H^n(-c^2)$ のレビ・チビタ接続である．

証明. D は $H^n(-c^2)$ 上のベクトル場に 2 つのベクトル場を対応させているから，さらに定理 7.1 の 2 つの条件を満たすことを見ればよい．

$$\begin{aligned}
D_XY - D_YX &= d_XY - d_YX - c^2(\langle X, Y\rangle - \langle Y, X\rangle)p = d_XY - d_YX = [X, Y],\\
X\langle Y, Z\rangle &= \langle d_XY, Z\rangle + \langle Y, d_XZ\rangle\\
&= \left\langle D_XY + c^2\langle X, Y\rangle p, Z\right\rangle + \left\langle D_YX + c^2\langle Y, X\rangle p, Z\right\rangle = \langle D_XY, Z\rangle + \langle Y, D_XZ\rangle.
\end{aligned}$$

最後の等式では $\langle p, Z\rangle = 0$ などを用いた． □

■曲率　双曲空間の曲率を求めよう：

$$\begin{aligned}
D_X D_Y Z &= d_X(D_Y Z) - c^2 \langle X, D_Y Z\rangle p d_X\bigl(d_Y Z - c^2 \langle Y, Z\rangle p\bigr) - c^2 \langle X, D_Y Z\rangle p \\
&= d_X d_Y Z - c^2 X \langle Y, Z\rangle p - c^2 \langle Y, Z\rangle d_X p + c^2 \langle X, D_Y Z\rangle p \\
&= d_X d_Y Z - c^2(\langle D_X Y, Z\rangle - \langle Y, D_X Z\rangle) - c^2 \langle Y, Z\rangle X - c^2 \langle X, D_Y Z\rangle p \\
&= d_X d_Y Z - c^2(\langle D_X Y, Z\rangle - \langle Y, D_X Z\rangle) + \langle X, D_Y Z\rangle)p + \langle Y, Z\rangle X), \\
D_Y D_X Z &= d_Y d_X Z - c^2(\langle D_Y X, Z\rangle - \langle X, D_Y Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle)p + \langle X, Z\rangle Y), \\
D_{[X,Y]} Z &= d_{[X,Y]} Z - c^2 \langle [X, Y], Z\rangle p = d_{[X,Y]} Z - c^2(\langle D_X Y, Z\rangle - \langle D_Y X, Z\rangle)p
\end{aligned}$$

だから，d の曲率が 0 であることと合わせて

$$R(X, Y)Z = -c^2\bigl(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\bigr)$$

を得る．したがって

命題 10.6. 双曲空間 $H^n(-c^2)$ は断面曲率 $-c^2$ のリーマン多様体である．

10.4　球面

双曲空間と同様，球面

$$S^n(c^2) = \{p \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\, \langle p, p\rangle = c^{-2}\}$$

は断面曲率 c^2 のリーマン多様体であることがわかる．