2009 年 7 月 27 日 13 時 00 分 ~14 時 30 分
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意・数学特論 4 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 裏面は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は，**解答用紙**を回収します．**持込用紙には学生番号と氏名を記してください**.
- 採点結果は，7 月 31 日から 8 月 4 日の間，山田の部屋（理学部本館 1433）の前に掲示します．答案は 31 日以降，数理事務室にて返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2009 年 8 月 4 日**までに山田まで電子メイルにてご連絡ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

ノート, 参考書, カンニングペーパーなど 持込可

問題 A [70 点]

次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{3}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れ，下線 a ~ d の部分に証明をつけなさい.

- 正の整数 n に対して $\boldsymbol{R}^{n+1}$ を $n+1$ 次元ユークリッド空間とし，そのユークリッド内積を $\langle\ ,\ \rangle$ で表す．点 $p \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ に対して，接空間 $T_p\boldsymbol{R}^{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同一視することにより $T_p\boldsymbol{R}^{n+1}$ に内積を定義することができるので，$(\boldsymbol{R}^{n+1}, \langle\ ,\ \rangle)$ はリーマン多様体となる.
  接空間を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ と同一視することで，ベクトル場 $\xi \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{R}^{n+1})$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の $\boldsymbol{R}^{n+1}$ に値をとる（ベクトル値）関数とみなすことができる：$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n+1})$．もう一つのベクトル場 η に対して

  (1) $\quad d_\eta\xi = \bigl(d_\eta\xi^1, \dots, d_\eta\xi^{n+1}\bigr) \qquad (d_\eta\xi^j = d\xi^j(\eta) = \eta\,\xi^j$ は関数 ξ^j の η 方向の方向微分)

  により新しいベクトル場 $d_\eta\xi$ を定義すると，任意のベクトル場 $\xi,\ \eta,\ \zeta \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{R}^{n+1})$ に対して $d_\xi\eta - d_\eta\xi = [\xi, \eta]$, $\xi\,\langle\eta, \zeta\rangle = \langle d_\xi\eta, \zeta\rangle + \langle\eta, d_\xi\zeta\rangle$ が成り立つ．すなわち d は $(\boldsymbol{R}^{n+1}, \langle\ ,\ \rangle)$ のレビ・チビタ接続である．とくに，点 p に対して p の位置ベクトル（p そのもの）を対応させるベクトル場を（同じ記号）p で表すと，$d_\xi p = \boxed{1}$ が成り立つ.
  この接続 d の曲率テンソル R^d は 0 となるので，$(\boldsymbol{R}^{n+1}, \langle\ ,\ \rangle)$ は平坦なリーマン多様体となる.
- 整数 $n\ (\geqq 2)$ に対して $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分多様体 $S^n = \{p \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\, \langle p, p\rangle = 1\}$ を考える．点 $p \in S^n$ における接空間は ${}_{\mathbf{a}}\underline{T_pS^n = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\, \langle p, \boldsymbol{v}\rangle = 0\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}} = T_p\boldsymbol{R}^{n+1}$ と表すことができるので,

  (2) $$\boldsymbol{R}^{n+1} = T_p\boldsymbol{R}^{n+1} = T_pS^n \oplus \boldsymbol{R}p \qquad (p \in S^n)$$

  なる直交直和分解ができる．とくに，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を T_pS^n に制限することにより，T_pS^n に内積を与えられる．この内積も同じ記号 $\langle\ ,\ \rangle$ で表せば $(S^n, \langle\ ,\ \rangle)$ はリーマン多様体となる.
  ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(S^n)$ から (1) によって得られる d_XY は S^n 上の各点 p に対して $T_p\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルを対応させる写像である．これを (2) にしたがって $(d_XY)_p = (D_XY)_p + \bigl(h(X,Y)_p\bigr)p$ $\bigl((D_XY)_p \in T_pS^n, h(X,Y)_p \in \boldsymbol{R}\bigr)$ と分解することで，ベクトル場 $D_XY \in \mathfrak{X}(S^n)$ と関数 $h(X,Y) \in \mathcal{F}(S^n)$ が定まる：

  $$d_XY = D_XY + h(X,Y)p \qquad \bigl(D_XY \in \mathfrak{X}(S^n), h(X,Y) \in \mathcal{F}(S^n)\bigr).$$

  この式の両辺に p を内積することにより ${}_{\mathbf{b}}\underline{h(X,Y) = -\langle X, Y\rangle}$ を得る.
  また ${}_{\mathbf{c}}$<u>D は $(S^n, \langle\ ,\ \rangle)$ のレビ・チビタ接続である.</u>
  とくに，ベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S^n)$ に対して接続 D の曲率テンソル R は ${}_{\mathbf{d}}\underline{R(X,Y)Z = \boxed{2}}$ と表されるので，$(S^n, \langle\ ,\ \rangle)$ の断面曲率は $\boxed{3}$ となる.

裏面に続く

山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

微分幾何学大意・数学特論 4 定期試験 〔問題 2〕

問題 B [50 点] 次の文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{10}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい．

平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標を (u,v) と書く．領域 U で定義されたなめらかな関数 $\theta=\theta(u,v)$ によって

$$g = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2$$

により U に二階テンソル g を与える．いま，記号を簡単にするため，$(u^1,u^2)=(u,v)$ として

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

とおくと，$g_{11}=\boxed{1}$, $g_{12}=\boxed{2}$, $g_{21}=\boxed{3}$, $g_{22}=\boxed{4}$ となるから，D 上で $0<\theta<\boxed{5}$ を満たすならば g は D 上のリーマン計量を与える．以下，この条件がみたされ，(U,g) がリーマン多様体となっているとする．

計量 g に関するレビ・チビタ接続を ∇ と書くと

$$\nabla_{\partial/\partial u}\frac{\partial}{\partial u} = \boxed{6}, \quad \nabla_{\partial/\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = \boxed{7}, \quad \nabla_{\partial/\partial v}\frac{\partial}{\partial u} = \boxed{8}, \quad \nabla_{\partial/\partial v}\frac{\partial}{\partial v} = \boxed{9}$$

となるので，曲率テンソル R は

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v} = \boxed{10}$$

となる．とくに，θ が方程式

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = \sin\theta$$

を満たしているならば，(D,g) のガウス曲率は -1 となる．

問題 C [0 点] この科目の講義，演習，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

おつかれさまでした ♡

微分幾何学大意・数学特論 4 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 各 10 点

1	2	3
ξ	$\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y$	1

a

接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_pS^n$ に対して，S^n 上の曲線 $\gamma(t)$ $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ で $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = \boldsymbol{v}$ となるものをとる．各 t に対して $\gamma(t) \in S^n$ であるから $\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle = 1$．両辺を t で微分すれば $\langle \dot\gamma(t), \gamma(t)\rangle = 0$ となるが，とくに $t = 0$ とすれば $\langle \boldsymbol{v}, p\rangle = 0$．したがって

$$T_pS^n \subset \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\, \langle p, \boldsymbol{v}\rangle = 0\}.$$

ここで T_pS^n は n 次元線形空間，また，上の式の右辺も n 次元線形空間だから

$$T_pS^n = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\, \langle p, \boldsymbol{v}\rangle = 0\}.$$

である．

b

等式 $d_XY = D_XY + h(X,Y)p$ の両辺に p を内積すると，$\langle p, p\rangle = 1$ と $D_XY \in T_pS^n = \boldsymbol{p}\perp$ から

$$h(X,Y) = \langle dX_Y, p\rangle = X\langle Y, p\rangle - \langle Y, d_Xp\rangle = -\langle Y, X\rangle = -\langle X, Y\rangle.$$

ここで $Y \in T_pS^n$ は p に直交することと，d が内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に関するレビ・チビタ接続であることを用いた．

学生番号	氏　名

微分幾何学大意・数学特論 4 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄（つづき）

c

- 問題 b の結果を用いれば，X, $Y \in \mathfrak{X}(S^n)$ に対して

  $$D_XY - D_YX - [X,Y] d_XY - \langle X,Y\rangle\, p - d_YX - \langle Y,X\rangle\, p - [X,Y] = d_XY - d_YX - [X,Y] = O.$$

  ここで d の捩率が消えることを用いた.

- さらに，d が計量 $\langle\ ,\ \rangle$ に関するレビ・チビタ接続であることを用いれば，X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(S^n)$ に対して

  $$X\,\langle Y,Z\rangle = \langle d_XY,Z\rangle + \langle Y,d_XZ\rangle = \langle D_XY - \langle X,Y\rangle\, p, Z\rangle + \langle Y, D_YZ - \langle Y,X\rangle\, p\rangle$$

  となるが，Y, $Z \in T_pS^n$ は p と直交するから

  $$X\,\langle Y,Z\rangle = \langle D_XY,Z\rangle + \langle Y,D_XZ\rangle$$

  が成り立つ.

以上より D は $(S^n, \langle\ ,\ \rangle)$ のレビ・チビタ接続である.

d

ベクトル場 X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(S^n)$ に対して

$$\begin{aligned}
D_YZ &= d_YZ + \langle Y,Z\rangle\, p \\
D_XD_YZ &= d_X\bigl(d_YZ + \langle Y,Z\rangle\, p\bigr) + \langle X, d_YZ + \langle Y,Z\rangle\, p\rangle\, p \\
&= d_Xd_YZ + X\,\langle Y,Z\rangle\, p + \langle Y,Z\rangle\, d_Xp + \langle X,d_YZ\rangle\, p \\
&= d_Xd_YZ\,\langle Y,Z\rangle\, X + (\langle d_XY,Z\rangle + + \langle Y,d_XZ\rangle + \langle X,d_YZ\rangle)p, \\
D_YD_XZ &= d_Yd_XZ\,\langle X,Z\rangle\, Y + (\langle d_YX,Z\rangle + + \langle X,d_YZ\rangle + \langle Y,d_XZ\rangle)p, \\
D_{[X,Y]}Z &= d_{[X,Y]}Z + \langle [X,Y],Z\rangle\, p = d_{[X,Y]}Z + (\langle d_XY,Z\rangle - \langle d_YZ,Z\rangle)p
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= D_XD_YZ - D_YD_XZ - D_{[X,Y]}Z \\
&= d_Xd_YZ - d_Yd_XZ - d_{[X,Y]}Z + \langle Y,Z\rangle\, X - \langle X,Z\rangle\, Y \\
&= R^d(X,Y)Z + \langle Y,Z\rangle\, X - \langle X,Z\rangle\, Y = \langle Y,Z\rangle\, X - \langle X,Z\rangle\, Y.
\end{aligned}$$

ここで $R^d = 0$ を用いた.

学生番号	氏　名

微分幾何学大意・数学特論 4 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 B の解答欄 各 5 点

1	2	3	4	5
1	$\cos\theta$	$\cos\theta$	1	π

6 $\theta_u\left(\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial u}-\csc\theta\dfrac{\partial}{\partial v}\right)$	7 0
8 0	9 $\theta_v\left(-\csc\theta\dfrac{\partial}{\partial u}+\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial v}\right)$

10

$$\theta_{uv}\left(-\csc\theta\frac{\partial}{\partial u}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

問題 C の解答欄

学生番号	氏　名

微分幾何学大意・数学特論 4 定期試験 〔解答用紙 4〕

計算スペース

学生番号	氏　名