2009 年 10 月 20 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

多様体論特論第二 講義資料 1

重要なお知らせ

- 単位を必要とする方は，今月の課題を必ず提出してください．

授業の概要

■最新情報　この科目の講義概要，講義資料，履修上の注意は，web ページ

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/
http://www.official.kotaroy.com/class/ (ミラー)

に置きます（2009 年 10 月 20 日現在準備中）．ご利用ください．

■授業の概要　双曲空間の曲面の理論，とくにワイエルストラス型表現公式をもつ曲面のクラスを紹介します．

■教科書　とくに指定しません．

■参考書　とくに指定しませんが，授業の際に文献を紹介します．

■授業日程　今回は都合により，月 2 回ずつの講義を 2 月まで行います．別紙予定表をご覧ください．

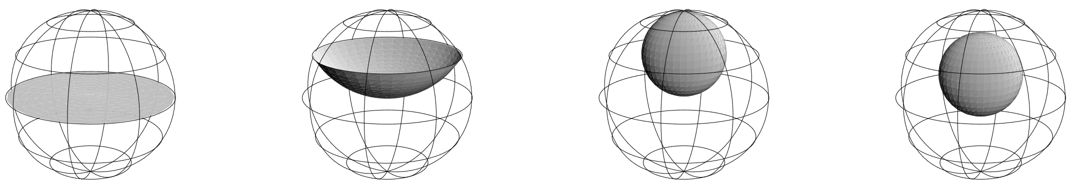
■成績評価の方法

(1) 毎月，宿題として授業の内容に関連した問題を出します．所定の用紙に解答を記入し，翌月の最初の授業までに提出してください．
(2) おなじ用紙に， 前回までの授業内容に対する質問，あるいは講義・講義資料の誤りの指摘を記入してください．

これを材料に評価をいたします．単位の必要な方は忘れずに提出してください．

目標

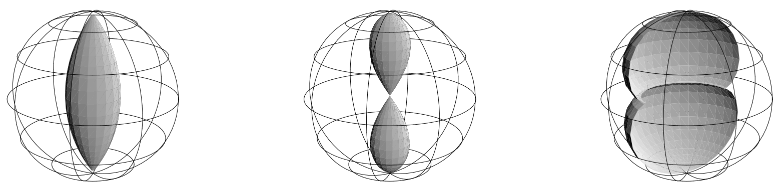
この講義では，双曲空間や球面（おもに双曲空間）の曲面の理論を紹介する．とくに，図 1 や 2 にあるような曲面の背後にある物語を語ることを目標としたい．その中で，空間型の部分多用体の基礎理論，計算テクニックなどを身につけてほしい．



$H=0,\ K=-1$ 極小（双曲平面）　$0<|H|<1,\ -1<K<0$　$|H|=1,\ K=0$ ホロ球面　$|H|>1,\ K>0$

図 1　全臍的な曲面；H は平均曲率，K はガウス曲率

カテノイド・カズン ($H=1$) (1)　カテノイド・カズン ($H=1$) (2); 半分割り



円柱 ($K=0$)　砂時計 ($K=0$)　雪だるま ($K=0$) 半分割り

図 2　CMC-1 回転面と平坦回転面

2009 年 10 月 20 日

1 ユークリッド空間の曲面

1.1 曲面

この講義では，2 次元多様体 Σ から 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ へのはめこみ

$$f\colon \Sigma \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$$

を（ユークリッド空間の）**曲面**とよぶ．多様体 Σ の局所座標系 $(U; u^1, u^2)$ をとれば，f は $\boldsymbol{R}^2$ の領域 U から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像と思うことができる．とくに f が**はめこみ**である，とは，各点 p において

$$\frac{\partial f}{\partial u^1}(p) \quad \text{と} \quad \frac{\partial f}{\partial u^2}(p) \qquad \text{が一次独立} \tag{1.1}$$

が成り立つことと同値である[*1]．

点 $p \in \Sigma$ に対して

$$V_p := f_*(T_p\Sigma) = \operatorname{Span}\left\{\frac{\partial f}{\partial u^1}(p), \frac{\partial f}{\partial u^2}(p)\right\} \tag{1.2}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間をあたえる．これを p における曲面 f の**接平面**とよぶ．すると，V_p の直交補空間は $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次元部分空間となるが，その単位ベクトル $\nu(p)$ を曲面 f の p における**単位法ベクトル**という．

単位法ベクトルのとりかたは二通りあるが，とくに Σ が向きづけられているとき，向きに同調した局所座標 (u^1, u^2) に対して

$$\nu(p) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u^1}(p) \times \dfrac{\partial f}{\partial u^2}(p)}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial u^1}(p) \times \dfrac{\partial f}{\partial u^2}(p)\right|} \tag{1.3}$$

であたえられるものを**向きに同調した単位法ベクトル**という．ただし “$\times$” は $\boldsymbol{R}^3$ の**ベクトル積**である．

単位法ベクトルは，局所的には p に関して滑らかにとることができる．さらに $|\nu(p)| = 1$ だから，ν は曲面（の定義域）から単位球面 S^2 への写像をあたえることになる．この写像を**単位法線ベクトル場**または**ガウス写像**とよぶ．とくに Σ が向き付け可能なときは，向きに同調した単位法線ベクトル場が Σ 全体で滑らかに定義できる．

1.2 第一基本形式または誘導計量

曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を考え，$(u, v) = (u^1, u^2)$ を Σ の局所座標系とする．このとき

$$ds^2 := df \cdot df = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,du^i\,du^j \tag{1.4}$$

を f の**第一基本形式** または **誘導計量** とよぶ．ただし “$\cdot$” は $\boldsymbol{R}^3$ の標準的な内積で，

$$E = f_u \cdot f_u, \quad F = f_u \cdot f_v, \quad G = f_v \cdot f_v, \qquad g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u^j} \quad (i, j = 1, 2)$$

[*1] 多様体に不慣れな人は，$\boldsymbol{R}^2$ の領域 U から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像 $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ で (1.1) を満たすものが曲面だと思って（この講義では大抵）差し支えない．

である．とくに ds^2 は局所座標系のとりかたによらない．以下

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = (g_{ij}) \qquad (g_{12} = g_{21})$$

と書き，第一基本行列とよぶ．これは正値な対称行列である．

第一基本形式 ds^2 は Σ の各点での接空間に内積をあたえる：

$$X = X_1 \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p + X_2 \left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)_p, \quad Y = Y_1 \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p + Y_2 \left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)_p \in T_p\Sigma$$

に対して　$ds^2(X, Y) = \langle X, Y\rangle := \sum g_{ij}(p) X_i Y_j.$

これにより (Σ, ds^2) は 2 次元の**リーマン多様体**となる．

第一基本形式から定まる曲面の不変量を**内的な量**という．

1.3 第二基本形式

曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の単位法線ベクトル場 ν があたえられているとき，

$$II := -df \cdot d\nu = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\,du^i\,du^j \tag{1.5}$$

を f の**第二基本形式**という．ただし，

$$h_{ij} = -\frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \nu, \qquad L = h_{11}, \quad M = h_{12} = h_{21}, \quad N = h_{22}$$

である．単位法線ベクトル場をひとつ固定しておけば，第二基本形式は座標変換で不変である．もし，単位法線ベクトル場を (1.3) で（(u^1, u^2) が定める向きに同調するように）定めるならば，向きを保つ座標変換で不変であるが，向きを反転するような座標変換では，符号が反転する．以下

$$\widehat{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = (h_{ij}) \qquad (h_{12} = h_{21})$$

と書き，第二基本行列とよぶ．

1.4 ガウス・ワインガルテン方程式

曲面 $f\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ の単位法ベクトル場を ν とすると，各点 $p \in M$ において，$\boldsymbol{R}^3$ は

$$\boldsymbol{R}^3 = \left(T_{f(p)}\boldsymbol{R}^3\right) = f_*(T_pM) \oplus \boldsymbol{R}\nu(p) = V_p \oplus \boldsymbol{R}\nu(p) \tag{1.6}$$

と直交直和分解される．ただし $f_*(T_pM) = V_p$ は (1.2) であたえた接ベクトル空間である．

とくに M の局所座標系 $(U; u^1, u^2)$ をとると，各点 $p \in U$ に対して

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial u^1}(p), \quad \frac{\partial f}{\partial u^2}(p), \quad \nu(p)\right\}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の基底をあたえる．これを**ガウス枠**とよぶ．

記号． 記号を簡単にするために $\partial f/\partial u^j$ のことを f_j と書く．また，正値対称行列 $\widehat{I}=(g_{ij})$ の逆行列を (g^{ij}) で表す．逆行列の定義から

$$\sum_{k=1}^{2} g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j \qquad (\text{クロネッカーの } \delta \text{ 記号})$$

が成り立つ．

補題 1.1 (ガウス方程式)**．** 以上の状況で，

$$f_{ij}=\sum_{k=1}^{2}\Gamma^k_{ij}f_k+h_{ij}\nu, \qquad \text{ただし}\quad \Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$

が成り立つ．ここで，Γ^k_{ij} は**クリストッフェル記号**とよばれる．

証明： 各点ごとに $\{f_1,f_2,\nu\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底をあたえるから，

$$f_{ij}=\sum_{m=1}^{2}\Gamma^m_{ij}f_m+b_{ij}\nu$$

と表される．この両辺に ν を内積すると，第二基本形式の定義 (1.5) より $b_{ij}=h_{ij}$ が成り立つ．一方，両辺に f_l を内積すると，

$$f_{ij}\cdot f_l=\sum_{m=1}^{2}\Gamma^m_{ij}f_m\cdot f_l=\sum_{m=1}^{2}\Gamma^m_{ij}g_{ml}$$

を得る．ここで左辺は

$$\begin{aligned}
f_{ij}\cdot f_l&=(f_i\cdot f_l)_j-f_i\cdot f_{lj}=\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-f_i\cdot f_{jl}=\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-(f_i\cdot f_j)_l+f_{il}\cdot f_j\\
&=\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}+f_{li}\cdot f_j=\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}+(f_l\cdot f_j)_i-f_l\cdot f_{ji}\\
&=\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}-f_{ij}\cdot f_l
\end{aligned}$$

なので，

$$\sum_{m=1}^{2}\Gamma^m_{ij}g_{ml}=f_{ij}\cdot f_l=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i}\right)$$

を得る．この式の両辺に g^{kl} をかけて l について和をとれば Γ^k_{ij} が結論の式をみたすことがわかる．

補題 1.2 (ワインガルテン方程式)**．** 補題 1.1 と同じ状況で

$$\frac{\partial\nu}{\partial u^j}=-\sum_{k=1}^{2}A^k_jf_k \qquad \text{ただし}\quad A^k_j=\sum_{l=1}^{2}g^{kl}h_{lj}$$

が成り立つ．

1.5 ガウス曲率と平均曲率

曲面 $f\colon M\to\boldsymbol{R}^3$ の単位法線ベクトル場を $\nu\colon M\to S^2$ とする．補題 1.2 より ν の微分は曲面に接する成分しか持たない．すなわち各 $X\in T_pM$ に対して $\nu_*X\in f_*(T_pM)$．ここで，はめこみの条件から $f_*\colon T_pM\longrightarrow V_p=f_*(T_pM)$ は全単射であるから，各 $X\in T_pM$ に対して

$$\nu_*X=-f_*(A_pX) \qquad \text{となるような線型写像}\quad A_p\colon T_pM\longrightarrow T_pM$$

が存在する．この A_p を**ワインガルテン作用素**または**型作用素**という．

補題 1.2 で表れた行列 (A^j_k) はワインガルテン作用素の基底 $\{\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^2\}$ に関する表現行列である．とくに

$$\widehat{A} := (A^j_k) = \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{I\!I} \tag{1.7}$$

が成り立つ．

注意 1.3. 接空間 T_pM の，計量 ds^2 に関する正規直交基に関する A_p の表現行列は対称行列になる．したがって A_p の固有値は実数である．

定義 1.4. ワインガルテン作用素 A_p の固有値 $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ を曲面の p における**主曲率**，それらの積と平均を，曲面の p におけるガウス曲率，平均曲率とよび，$K(p), H(p)$ と書く：

$$K(p) = \lambda_1(p)\lambda_2(p) = \det(A^j_k), \qquad H(p) = \frac{1}{2}\bigl(\lambda_1(p) + \lambda_2(p)\bigr).$$

ガウス曲率，平均曲率は，(1.7) の行列 $\widehat{A}$ を用いて

$$K = \det\widehat{A}, \qquad H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\widehat{A}$$

と表される．

1.6 例：回転面

区間 $I \in \boldsymbol{R}$ 上でパラメータ表示された平面曲線

$$\gamma(t) = \bigl(x(t), z(t)\bigr) \qquad \bigl(\dot\gamma(t) \neq \boldsymbol{0}\bigr)$$

を考える．ただし $\dot{} = d/dt$ である．ただし，この曲線は xz 平面上の上半平面に含まれているとする：

$$z(t) > 0.$$

単位円 S^1 を

$$S^1 = \{e^{i\theta} \in \boldsymbol{C}\,;\, \theta \in \boldsymbol{R}\}$$

と表すと，θ は S^1 の局所座標系になる．これを用いて，写像

$$f\colon I \times S^1 \ni (t,\theta) \longrightarrow \bigl(x(t), z(t)\cos\theta, z(t)\sin\theta\bigr) \in \boldsymbol{R}^3$$

を考えると，f は，はめこみをあたえる．この曲面（の像）は，xz 平面上の曲線 γ を x 軸を中心として回転させたもの，すなわち**回転面**になっている．

とくに，単位法線ベクトル場，第一基本形式，第二基本形式はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{1}{\sqrt{\dot x^2 + \dot z^2}}(\dot z, -\dot x\cos\theta, -\dot x\sin\theta),\\
ds^2 &= (\dot x^2 + \dot z^2)dt^2 + z^2 d\theta^2,\\
I\!I &= \frac{1}{\sqrt{\dot x^2 + \dot z^2}}\bigl((\ddot x\dot z - \dot x\ddot z)dt^2 + \dot x z\, d\theta^2\bigr)
\end{aligned}$$

となるので，行列 $\widehat{A}$ は

$$\widehat{A}=\frac{1}{(\dot{x}^2+\dot{z}^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}\ddot{x}\dot{z}-\dot{x}\ddot{z} & 0\\ 0 & (\dot{x}^2+\dot{z}^2)\dot{x}/z\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

と，対角行列となるので，その対角成分が主曲率になる．

とくに，$\partial/\partial s$, $\partial/\partial\theta$ はともに，ワインガルテン作用素の固有方向をあたえている．このような座標 (t,θ) を曲面の**曲率線座標**という．

曲線 γ が弧長 s でパラメータづけられているなら，主曲率，ガウス曲率，平均曲率は

$$\lambda_1=x''z'-x'z'',\quad \lambda_2=\frac{x'}{z},\quad K=\frac{x'(x''z'-x'z'')}{z},\quad H=\frac{1}{2}\left(x''z'-x'z''+\frac{x'}{z}\right)$$

となる．ただし $'=d/ds$ である．ここで $(x')^2+(z')^2=1$ より $x'x''+z'z''=0$ に注意すれば $\lambda_1=-z''/x'$ となるので，

$$K=-\frac{z''}{z} \tag{1.9}$$

となる．また，$-\lambda_1$ は平面曲線 γ の曲率である．

参考文献

[1] 梅原雅顕・山田光太郎「曲線と曲面」(裳華房)．6 章，7 章，8 章．
曲率線に関しては 9 章，ガウス・ワインガルテン方程式については 11 節．

[2] 剱持勝衛，曲面論講義—平均曲率一定曲面入門，培風館，2000.

[3] 梅原雅顕（川上裕 記)「3 次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面— 極小曲面との関係をテーマとして」，名古屋大学大学院多元数理科学研究科 講究録，2009.

[4] 梅原雅顕・山田光太郎，双曲型空間の平均曲率 1 の曲面の幾何，数学 **47** (1995), 145–157.

[5] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque **154–155** (1987), 321–347.

[6] J. A. Gálvez, A. Martìnez, F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic* 3*-space*, Math. Ann. **316** (2000), 419–435.

[7] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. of Math., **216**, 149–175.

[8] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications, 1969/1986.

問題

1-1 第一基本形式が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \qquad (\sigma = \sigma(u,v) \text{ は滑らかな関数})$$

の形をしているとき，(u,v) を**等温座標系**または**共形座標系**という．等温座標系におけるクリストッフェル記号を σ とその微分を用いて表しなさい．

1-2 第一基本形式および第二基本形式が

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2, \qquad II = 2\sin\theta\, du\, dv$$

の形をしているとき，(u,v) を**漸近チェビシェフ網**という．ただし θ は (u,v) の関数で $\theta \in (0,\pi)$ を満たすものである．

(1) 漸近チェビシェフ網が存在する曲面のガウス曲率は -1 で一定であることを示しなさい．

(2) 漸近チェビシェフ網に関するガウス・ワインガルテンの方程式を θ を用いて書き表しなさい．

1-3 半径 r の球面のガウス曲率と平均曲率を求めなさい．（計算に用いた表示で，単位法線ベクトルを外向き，内向きのどちらにとったかを明示しなさい）