2009 年 10 月 22 日 (2009 年 11 月 19 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

多様体論特論第二 講義資料 2

お知らせ

- この授業の web ページの公開を始めました：
  http://www.math.titech.ac.jp/ kotaro/class/2009/manifold-2/
  http://www.official.kotaroy.com/class/2009/manifold-2/
  http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/class/2009/manifold-2/
- 単位を必要とする方は，本日配布する用紙にある問題に回答し，次回の授業開始前に提出してください．なお，整理の都合上，所定の用紙以外での提出はご遠慮ください．
- 次回の授業は 11 月 17 日（火），19 日（木）です．

2 球面と双曲空間

2.1 双曲空間

2.1.1 ミンコフスキー空間の双曲面

L^4：符号 $(-,+,+,+)$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つミンコフスキー空間：

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad \boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3).$$

H^3：L^4 の「二葉双曲面」の上半分：

$$H^3 = \{p \in L^4 \mid \langle p, p\rangle = -1, p_0 > 0\} \qquad \big(p = (p_0, p_1, p_2, p_3)\big).$$

事実 2.1. H^3 は L^4 の滑らかで連結かつ単連結な部分多様体である．とくに

$$T_pH^3 = \{\boldsymbol{v} \in L^4 \mid \langle p, \boldsymbol{v}\rangle = 0\} = p^{\perp}$$

事実 2.2. 各 $p \in H^3$ に対して，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の T_pH^3 への制限は正定値．したがって H^3 は $\langle\ ,\ \rangle$ から定まる計量により，リーマン多様体になる．D をこの計量に関する標準接続とすると，

$$D_XY = d_XY - \langle X, Y\rangle\, p = dY(X) + \langle d_XY, p\rangle\, p \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

である．ただし d はアフィン空間 L^4 の標準接続，すなわち d_XY はベクトル場 Y の X 方向の方向微分である．これを用いて

H^3 の断面曲率は -1.

$$TH^3 = \{(p, \nu) |\, \langle p, \nu\rangle = 0, \langle p, p\rangle = -1, p_0 > 0\} \in L^4 \times L^4,$$
$$T_1H^3 = \{(p, \nu) |\, \langle p, \nu\rangle = 0, \langle \nu, \nu\rangle = 1, \langle p, p\rangle = -1, p_0 > 0\} \in L^4 \times L^4.$$

事実 2.3. 点 $p \in H^3$ において速度 $\boldsymbol{v} \in T_pH^3$ $(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 1)$ をもつ H^3 の測地線は弧長径数を用いて

$$\gamma_{p,\boldsymbol{v}}(s) := (\cosh s)p + (\sinh s)\boldsymbol{v}$$

で表示される．とくに，任意の測地線は $\boldsymbol{R}$ 全体で定義されるから H^3 は完備である．

以上より，

H^3 は単連結かつ連結な完備リーマン多様体である.

定義 2.4. H^3 を 3 次元双曲空間とよぶ

2009 年 10 月 22 日 (2009 年 11 月 19 日訂正)

2.1.2 等長変換

定義 2.5.

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(3,1)&=\left\{a\in\mathrm{M}(4)\,\middle|\,{}^taYa=Y.\right\}\\ \mathrm{SO}(3,1)&=\{a\in\mathrm{O}(3,1)\,|\,\det a=1\}\\ \mathrm{SO}_+(3,1)&=\{a\in\mathrm{SO}(3,1)\,|\,a_{00}>0\}\end{aligned}\qquad\left(Y=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

事実 2.6. (1) $\mathrm{O}(3,1)$ は L^4 に線形かつ等長的に作用する．逆に L^4 の等長的な線形変換 $\in\mathrm{O}(3,1)$.

(2) $\mathrm{SO}_+(3,1)$ は $\mathrm{O}(3,1)$ の単位元を含む連結成分である．

(3) $\mathrm{SO}_+(3,1)$ の L^4 への作用は H^3 を保つ．

(4) $\mathrm{SO}_+(3,1)$ は H^3 の向きを保つ等長変換全体がなす群である．

2.1.3 理想境界

定義 2.7. $\boldsymbol{v}\in L^4$ が零的（null）であるとは，$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=0$ となることである．さらに

$$\begin{aligned}LC&=\{\boldsymbol{v}\in L^4\,|\,\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=0\}\\ LC_+&=\{\boldsymbol{v}=(v_0,v_1,v_2,v_3)\in L^4\,|\,v_0>0\}\end{aligned}$$

補題 2.8. $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}\in LC_+$ が $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=0$ を満たすならば $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{w}$ をみたす $c\in\boldsymbol{R}_+$ が存在する．

補題 2.9. $p\in H^3$, $\boldsymbol{v}=T_pH^3$, $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle=1$ ならば $p+\boldsymbol{v}\in LC_+$.

定義 2.10. 弧長により径数づけられた 2 つの測地線 γ_1, γ_2 が**漸近的**であるとは

$$\left\{d\bigl(\gamma_1(s),\gamma_2(s)\bigr)\,|\,s>0\right\}$$

が上に有界となることである．このとき $\gamma_1\sim\gamma_2$ と書く．

測地線の漸近類を H^3 の理想境界という：

$$\partial H^3=\{H^3\ \text{の測地線}\}/\sim$$

補題 2.11. 測地線 $\gamma_{p,\boldsymbol{v}}$ と $\gamma_{q,\boldsymbol{w}}$ が漸近的であるための必要十分条件は $\langle p+v,q+\boldsymbol{w}\rangle=0$ となることである．

したがって

$$\partial H^3=LC_+/\boldsymbol{R}_+$$

である．$\boldsymbol{v}\in LC_+$ なら $v_0^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2$ であるから，

$$\begin{aligned}LC_+\ni(v_0,v_1,v_2,v_3)&\mapsto\left(\frac{v_1}{v_0},\frac{v_2}{v_0},\frac{v_3}{v_0}\right)\in S^2\\ &\mapsto\frac{v_1+iv_2}{v_0-v_3}\in\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\end{aligned}$$

となるが，この写像が誘導する対応 $LC_+/\boldsymbol{R}_+\to\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ は全単射

$$\iota\colon\partial H^3\longrightarrow\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\tag{2.1}$$

をあたえる．

2.2 2×2 行列での表示

2.2.1 エルミート行列での表示

2 次エルミート行列全体の集合を $\mathrm{Herm}(2)$ と書く．$\mathrm{Herm}(2)$ と L^4 を次のように 1 対 1 に対応づける：

$$L^4 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2).$$

すると，L^4 の標準基底 $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は次の行列に対応する：

$$\sigma_0 = \mathrm{id}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.2.2 余因子行列と内積

定義 2.12. 2 次行列 X に対して，その余因子行列を $\widetilde{X}$ と書く：

$$\widetilde{X} = \mathrm{tr}\, X\, \mathrm{id} - X.$$

補題 2.13. (1) 対応 $X \mapsto \widetilde{X}$ は線形.

(2) $\widetilde{XY} = \widetilde{Y}\widetilde{X}$.

(3) $\widetilde{X}X = \det X\, \mathrm{id}$.

事実 2.14. $\mathrm{Herm}(2)$ を L^4 と同一視するとき

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, \widetilde{X}Y, \qquad \langle X, X \rangle = -\det X.$$

2.2.3 等長変換群

行列 $a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ に対して

$$\tau_a \colon \mathrm{Herm}(2) \ni X \longmapsto aXa^* \in \mathrm{Herm}(2) \qquad (a^* = {}^t\bar{a})$$

は $\mathrm{Herm}(2) = L^4$ の等長変換をあたえている．したがって，対応する $\mu_a \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ がただ一つ存在する．すなわち，準同型

$$\mu \colon \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) \ni a \longmapsto \mu_a \in \mathrm{SO}_+(3,1)$$

が得られる．

事実 2.15. $\mathrm{Ker}\, \mu = \{\pm \mathrm{id}\}$.

したがって

$$\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C}) = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\{\pm \mathrm{id}\} \text{ と } \mathrm{SO}_+(3,1) \text{ は同型である．}$$

2.2.4 双曲空間の対称空間としての表示

事実 2.16. いままでの同一視の下,

$$\begin{aligned} H^3 &= \{X \in \mathrm{Herm}(2) \mid \det X = 1 \ \mathrm{tr}\, X > 0\} \\ &= \{aa^* \mid a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})\} \\ &= \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) / \mathrm{SU}(2) \end{aligned}$$

である．

とくに，$\mathrm{PSL}(2,\boldsymbol{C})$ は H^3 の向きを保つ等長変換がなす群である．

2.2.5 等長変換の理想境界への作用

事実 2.17. 写像 ι (式 (2.1)) による同一視の下，$a \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ があたえる H^3 の等長変換は

$$\partial H^3 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \ni \zeta \longmapsto a \star \zeta = \frac{a_{11}\zeta + a_{12}}{a_{21}\zeta + a_{22}} \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

のようにして，理想境界にメビウス変換として作用する．

2.3 単位球モデルと上半空間モデル

次の二つのリーマン多様体は，いずれも双曲空間（と等長的）である：

$$(D, ds_D^2) : D = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid |X| < 1\}, \quad ds_D^2 = \frac{4}{(1-|X|^2)^2}(dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2)$$
$$(H, ds_H^2) : H = \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid X_3 > 0\}, \quad ds_H^2 = \frac{1}{X_3^2}(dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2).$$

実際,

$$\pi_D \colon H^3 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{1}{1-x_0}(x_1, x_2, x_3) \in D$$
$$\pi_H \colon H^3 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{1}{x_3 - x_0}(x_1, x_2, 1) \in H$$

は等長写像をあたえている．

問題

2-1 H^3 の 2 点 p, q を結ぶ測地線（完備性から唯一存在するはず）を具体的に表し，それを用いて，2 点 p, q の距離（2 点を結ぶ測地線の長さ）が

$$d(p,q)=\cosh^{-1}(-\langle p,q\rangle)$$

であることを示しなさい．（もちろん $\langle p,q\rangle \leqq -1$ であることを示しておく必要がある．）

2-2 球面の測地線の表示を与え，それを用いて球面の 2 点の距離の公式を作りなさい．

2-3 補題 2.11 を示しなさい．

2-4 正の定数 c に対して

$$H^3(-c^2):=\{p\in L^4 \mid \langle p,p\rangle=-c^{-2}\}$$

とする（これは曲率 $-c^2$ の双曲空間である）．この空間の測地線はどのような形に表されるか（厳密な証明は必要ない）．

2-5 事実 2.17 を示しなさい．

2-6 双曲空間で，二つの測地線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ が漸近的であるとき，それらを単位球モデルで表した曲線

$$\pi_D\circ\gamma_1(t),\qquad \pi_D\circ\gamma_2(t)$$

は，$t\to\infty$ とするときに $S^2=\partial D$ 上の同一の点に収束することを示しなさい．上半空間の場合はどうか．