2009 年 11 月 17 日 (2009 年 11 月 19 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

多様体論特論第二 講義資料 3

お知らせ

- この授業の web ページはこちらです.

  http://www.math.titech.ac.jp/ kotaro/class/2009/manifold-2/

  http://www.official.kotaroy.com/class/2009/manifold-2/

  http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/class/2009/manifold-2/
- 単位を必要とする方は前回の課題を提出してください.
- 提出物の「質問」および「ご意見」には,「回答」「コメント」をつけて次回の講義資料にて公開いたします（したがって web にも公開されます）. 公開を望まれない場合は, **事前に**ご相談ください.
- 次回の授業は 11 月 19 日（木）です.

3 曲面論の基本定理

3.1 等温座標系

曲面の向き

2 次元多様体 Σ の 2 つの局所座標系 $(D;u,v)$, $(\Delta;x,y)$ の**向きが同調している**とは，$D\cap\Delta=\emptyset$ であるか，$D\cap\Delta$ 上で

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{pmatrix}>0$$

となることである．

多様体 Σ が**向きづけ可能** orientable であるとは，Σ のアトラス $\mathcal{A}:=\{(D_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ で，各チャートの向きが同調しているものがとれることである．このようなアトラスを Σ の**向き** orientation という．

例 3.1. 平面 $\boldsymbol{R}^2$, 球面 S^2，トーラス T^2 は向きづけ可能である．一方，2 次元実射影空間（射影平面）$\boldsymbol{RP}^2$，クラインの壷，メビウスの帯は向きづけ不可能である[*1]

定義 3.2. 向きづけ可能な多様体 Σ に対して，その向き $\mathcal{A}_1=\{(D_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ と $\mathcal{A}_2=\{(\Delta_\beta,\psi_\beta)\}$ が**同値**であるとは，各 $(\Delta_\alpha,\psi_\beta)$ と任意の $(D_\alpha,\varphi_\alpha)$ の向きが同調していることである．

補題 3.3. 向きづけ可能な多様体 Σ に対して，その向き $\mathcal{A}=\{(D_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ をとる．このとき，

$$\mathcal{A}':=\{(D_\alpha,\tau\circ\varphi_\alpha)\}\qquad\bigl(\tau(u,v)=(v,u)\bigr)$$

とすると $\mathcal{A}'$ も Σ の向きで $\mathcal{A}$ と同値でないものを与えている．さらに Σ の任意の向きは $\mathcal{A}$ または $\mathcal{A}'$ と同値である．

リーマン面

位相空間 Σ 上に開集合 D_α と写像 $\xi_\alpha\colon D_\alpha\to\boldsymbol{C}$ の族 $\mathcal{A}=\{(D_\alpha,\xi_\alpha)\}$ が

- $\Sigma=\cup D_\alpha$,
- $\xi_\alpha\colon D_\alpha\to\boldsymbol{C}$ は連続な単射
- $\xi_\beta\circ\xi_\alpha^{-1}$ は（定義される限り）$\boldsymbol{C}$ の開集合から $\boldsymbol{C}$ の開集合への複素解析関数．（このことから，この関数の微分が消えないこともわかる）

を満たすとき，Σ と $\mathcal{A}$ の組（あるいは単に Σ）を**1 次元複素多様体**あるいは**リーマン面**，ξ_α をその複素座標という．

コーシー・リーマンの方程式より $\boldsymbol{C}$ の領域上の微分が消えない解析関数を $\boldsymbol{R}^2$ の領域から $\boldsymbol{R}^2$ への写像とみなしたときのヤコビ行列式は正になるので，リーマン面は向きづけ可能である．とくに，複素座標はその向きを一つ与えている．

2009 年 11 月 17 日 (2009 年 11 月 19 日訂正)

[*1] 証明は多少面倒くさい.

リーマン面 Σ の複素座標 z をとり，$z = u + iv$ と表すと，(u, v) は Σ の（実）座標系を与えている．ここで，

$$dz = du + i dv, \quad d\bar{z} = du - i dv, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \tag{3.1}$$

と定めておく．この記号を用いると

補題 3.4 (コーシー・リーマン)**.** リーマン面 Σ から Σ' への可微分写像 $f\colon \Sigma \to \Sigma'$ が点 p の近傍で**正則である**あるいは**複素解析的である**ための必要十分条件は， p を含む Σ の複素座標 z と $f(p)$ を含む Σ' の局所座標 w によって写像 f を $w = f(z)$ と表したとき，

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$$

が p の近傍で成り立つことである．

等温座標系

定義 3.5. 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の局所座標系 $(D; u, v)$ が**等温座標系** isothermal coordinate system である，とは ds^2 が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \qquad (\sigma = \sigma(u, v) \text{ は } (u, v) \text{ のなめらかな関数}) \tag{3.2}$$

の形にかけることである．

補題 3.6. 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の等温座標系 $(D; u, v)$ に対して，$D \cap \Delta \neq \emptyset$ となるような座標系 $(\Delta; x, y)$ が等温座標系であるための必要十分条件は

$$x_u = \varepsilon y_v, \quad x_v = -\varepsilon y_u \qquad (\varepsilon = 1 \text{ または } -1)$$

が成り立つことである．とくに，これらの座標系の向きが同調しているならば $\varepsilon = +1$ である．

系 3.7. 向きづけられたリーマン多様体 (Σ, ds^2) 上の，向きに同調した等温座標系 $(D; u, v)$ に対して，向きに同調した座標系 $(\Delta; x, y)$ が等温座標系であるための必要十分条件は，写像

$$u + iv \longmapsto x + iy$$

が複素解析的となることである．

定理 3.8. 任意の 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) の各点 p の近傍に等温座標系が存在する．

系 3.9. 任意の向きづけられた 2 次元リーマン多様体 (Σ, ds^2) 上には各複素座標が ds^2 に関する等温座標系となるようなリーマン面の構造を入れることができる．

式 (3.1) の記号を用いれば，計量 (3.2) を

$$ds^2 = e^{2\sigma} dz\, d\bar{z} \qquad (z = u + iv)$$

と書くことができる．

3.2 等温座標系の下でのガウス・ワインガルテン方程式

以下，簡単のために Σ は向き付けられているものとする．はめ込み $f\colon M \to H^3$ の第一基本形式 ds^2 は Σ 上のリーマン計量を与えているから，これにより Σ に等温座標系を与え，リーマン面とみなすことができる．

リーマン面 Σ の座標近傍 D 上での複素座標を $z = u + iv$ と書くと，これが等温座標系であることから，ある関数 $\sigma(u, v)$ が存在して

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma}\,dz\,d\bar{z} \qquad \text{すなわち} \qquad \langle f_u, f_u\rangle = \langle f_v, f_v\rangle = e^{2\sigma}, \quad \langle f_u, f_v\rangle = 0 \tag{3.3}$$

が成り立つ．

いま，

$$\boldsymbol{e}_1 = e^{-\sigma} f_u, \qquad \boldsymbol{e}_2 = e^{-\sigma} f_v$$

とすると，各点 $p \in D$ において $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は接空間 $df(T_p\Sigma) \subset T_{f(p)}H^3$ の正規直交基底を与えている．ここで H^3 をミンコフスキー空間 L^4 の部分集合とみなすと，$T_{f(p)}H^3$ は位置ベクトル $f(p)$ の直交補空間であるから，

$$\{f(p), \boldsymbol{e}_1(p), \boldsymbol{e}_2(p), \boldsymbol{e}_3(p)\}$$

がミンコフスキー空間の正規直交基底となるような単位ベクトル $\boldsymbol{e}_3$ が存在する．とくに，必要なら $\boldsymbol{e}_3$ を $-\boldsymbol{e}_3$ にとりかえれば，

$$\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \qquad \boldsymbol{e}_0 = f, \quad \boldsymbol{e}_1 = e^{-\sigma} f_u, \quad \boldsymbol{e}_2 = e^{-\sigma} f_v \tag{3.4}$$

は領域 $D \subset \Sigma$ から $\mathrm{SO}_+(3,1)$ へのなめらかな写像を与えている．

> 実際，$\boldsymbol{e}_3$ は次のようにして求めることができる：ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2, v_3)$ に対して，行列式の展開公式を用いれば
>
> $$\det(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$
>
> となる (a_0, a_1, a_2, a_3) が存在することがわかる（小行列式を用いて具体的に表すことができる）．このとき，$\boldsymbol{e}_3 = {}^t(-a_0, a_1, a_2, a_3)$ とおけばよい．このとき，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ などと書くこともある．

一般に，曲面 $f\colon D \to H^3$ に対して，写像 $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\colon D \to \mathrm{SO}_+(3,1)$ で $f = \boldsymbol{e}_0$, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が各点 p で $f(p)$ における $f(D)$ の接空間の正規直交基底となるとき，$\mathcal{F}$ を f の**適合枠**という．とくに (3.4) は曲面 f の適合枠を与えている．いま，

$$h_u^j = -\langle \boldsymbol{e}_j, (\boldsymbol{e}_3)_u\rangle, \quad h_v^j = -\langle \boldsymbol{e}_j, (\boldsymbol{e}_3)_v\rangle$$

と表すと，第二基本形式は

$$I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2, \qquad L = e^\sigma h_u^1, \quad M = e^\sigma h_v^1 = e^\sigma h_u^2, \quad N = e^\sigma h_v^2 \tag{3.5}$$

となる．

補題 3.10. 適合枠 (3.4) は，微分方程式

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\widetilde{U}, \qquad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\widetilde{V} \qquad \widetilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & e^\sigma & 0 & 0 \\ e^\sigma & 0 & \sigma_v & -h_u^1 \\ 0 & -\sigma_v & 0 & -h_u^2 \\ 0 & h_u^1 & h_u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_u & -h_v^1 \\ e^\sigma & \sigma_u & 0 & -h_v^2 \\ 0 & h_v^1 & h_v^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

を満たす.

3.3 ガウス・ワインガルテン方程式の 2 次行列による表示

今後の議論のため，方程式 (3.6) を

- 実（等温）座標の代わりに複素座標を用いて,
- $\mathrm{SO}_+(3,1)$ の代わりに $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ を用いて,

書き換える.

■平均曲率と Hopf 微分　曲面 $f\colon M\to H^3$ の第一基本形式により M にリーマン面の構造を入れておく．この曲面の第二基本形式 (3.5) は，記号 (3.1) を用いれば

$$II = q\,dz^2 + \bar q\,d\bar z^2 + H\,ds^2 \qquad q = \frac{1}{4}\big((L-N)-2iM\big), \quad H = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L+N) \tag{3.7}$$

と書くことができる．とくに H は曲面の**平均曲率**を与えている.

補題 3.11. 式 (3.7) の $q\,dz^2$ は向きに同調した等温座標系のとりかたによらない.

定義 3.12. 式 (3.5) の q から定まる 2 次形式 $Q=-q\,dz^2$ を曲面 f の **Hopf 微分**という[*2].

■枠の持ち上げ　3 次元双曲空間 H^3 は 4 次元ミンコフスキー空間 L^4 の超曲面とみなすことができるが，前回の講義で扱ったように L^4 を

$$L^4 \ni {}^t(x_0,x_1,x_2,x_3) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2)$$

により 2 次エルミート行列全体の集合 $\mathrm{Herm}(2)$ と同一視しておく．とくに L^4 の標準基底は行列

$$\varepsilon_0 = \mathrm{id}, \qquad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

と対応している.[*3] とくに準同型

$$\mu\colon\ \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \ni a \longmapsto \mu_a \in \mathrm{SO}_+(3,1)$$

で $\operatorname{Ker}\mu = \{\pm\mathrm{id}\}$ となるようなものが存在する．とくに，準同型の作り方から $a\in\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ に対して

$$\text{行列 } \mu_a \text{ の第 } j \text{ 列} = a\varepsilon_j a^* \qquad (a^* = {}^t\bar a) \tag{3.9}$$

となる.

とくに，単連結な 2 次元多様体 M 上で定義されたはめ込み $f\colon M\to H^3$ の適合枠 $\mathcal{F}$ に対して $\mu\circ\Theta=\mathcal{F}$ となる $\Theta\colon M\to\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ がただ 2 つ存在する．これを適合枠 $\mathcal{F}$ の $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ への**持ち上げ** lift とよぶ.

[*2] マイナスの符号は個人的な事情である.

[*3] 講義資料 2 では σ_j を用いたが，等温座標系の計量に用いてしまったので，この節以降 ε を用いることにする.

命題 3.13. 領域 $D \subset \boldsymbol{C}$ で定義された曲面 $f\colon D \to H^3$ の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 $I\!I$ がそれぞれ (3.3), (3.7) のように表されているならば，(3.4) の適合枠 $\mathcal{F}$ の持ち上げ Θ は次の微分方程式を満たす：

$$
\frac{\partial \Theta}{\partial u} = \Theta U, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = \Theta V, \tag{3.10}
$$

$$
U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\sigma_v & e^\sigma + h^1_v + ih^2_u \\ e^\sigma - h^1_u + ih^2_u & i\sigma_v \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\sigma_u & h^1_v + i(e^\sigma + h^2_v) \\ -h^1_u - i(e^\sigma - h^2_v) & -i\sigma_u \end{pmatrix}.
$$

複素座標 $z = u + iv$ に関する微分 (3.1) を用いれば，これは

$$
\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \Theta Z, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \bar z} = \Theta W, \qquad Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_z & e^\sigma(1+H) \\ -2e^{-\sigma} q & -\sigma_z \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sigma_{\bar z} & 2e^{-\sigma}\bar q \\ e^\sigma(1-H) & \sigma_{\bar z} \end{pmatrix} \tag{3.11}
$$

と同値である．

3.4 積分可能条件

ガウス・ワインガルテン方程式 (3.10) を Θ に関する方程式とみなして，それが解をもつための条件を考えよう：

補題 3.14. 方程式 (3.10) をみたす $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ 値関数 Θ が存在するならば

$$
U_v - V_u - UV + VU = O \qquad \text{すなわち} \qquad Z_{\bar z} - W_z + ZW - WZ = O \tag{3.12}
$$

が成り立つ．

証明. 解 Θ が存在したとして $\Theta_{uv} = (\Theta_u)_v = (\Theta U)_v$ と $\Theta_{vu} = (\Theta_v)_u = (\Theta V)_u$ が等しいという式を書き，Θ が正則であることに注意すればよい． □

命題 3.15. 式 (3.12) は次と同値である：

$$
-e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) = (H^2 - 1) - 4e^{-2\sigma} q\bar q, \qquad \frac{\partial q}{\partial \bar z} = \frac{1}{2} e^{2\sigma} \frac{\partial H}{\partial z}. \tag{3.13}
$$

式 (3.13) の第一式を**ガウス方程式**，第二式を**コダッチ方程式** または **コダッチ・マイナルディ方程式**という．

注意 3.16.
- ガウス方程式（式 (3.13)）の左辺は，2 次元リーマン多様体 (M, ds^2) の断面曲率（ガウス曲率）を与えている．
- ガウス方程式（式 (3.13)）の右辺は

$$
e^{-4\sigma}(LN - M^2) - 1 = \frac{\det \widehat{I\!I}}{\det \widehat{I}} - 1
$$

なので「ガウス・クロネッカー曲率」に -1 を加えた値となっている．この “-1” は H^3 の断面曲率である．たとえば $\boldsymbol{R}^3$ の曲面のガウス方程式にはこの “-1” が現れない．

系 3.17.
- H^3 の平均曲率一定曲面のホップ微分は（第一基本形式から定まる複素構造に関して）正則である．
- H^3 の全臍的でない平均曲率一定曲面の臍点は孤立する．
- (H. Hopf) H^3 の平均曲率一定な閉曲面で球面と同相なものは全臍的である（したがって球面に限る）．

注意 3.18. この系は H^3 を $\boldsymbol{R}^3$ や S^3 に変えても成り立つ．

問題

3-1 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の曲面のガウス・コダッチ方程式を次のようにして求めなさい：
はめこみ $f\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ の第一基本形式 ds^2 が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma}\,dz\,d\bar{z} \qquad (z = u + iv)$$

とかけるような座標系 (u,v)（等温座標系）をとり，この座標に関して第二基本形式を

$$I\!I = q\,dz^2 + \bar{q}\,d\bar{z}^2 + H ds^2$$

と書いておく．このとき，M から $\mathrm{SO}(3)$ への写像（適合枠）

$$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \qquad \boldsymbol{e}_1 = e^{-\sigma} f_u, \quad \boldsymbol{e}_2 = e^{-\sigma} f_v, \quad \boldsymbol{e}_3 = \nu = e^{-2\sigma}(f_u \times f_v)$$

が満たす微分方程式を作り，その積分可能条件を求める．

3-2 系 3.17 の最後の命題を証明しなさい．