2009 年 11 月 19 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

多様体論特論第二 講義資料 4

重要なお知らせ

- 次回の授業は 12 月 8 日（火）および 10 日（木）5, 6 限，とお知らせしておりましたが，木曜日に授業が重なる方がいらっしゃるようですので

  12 月 8 日（火），15 日（火） 13 時 20 分から 14 時 50 分

  に変更しようと思います．今回の授業時間で了解がとれるようでしたら，この日程にさせていただきます．

お知らせ

- この授業の web ページはこちらです．
  http://www.math.titech.ac.jp/ kotaro/class/2009/manifold-2/
  http://www.official.kotaroy.com/class/2009/manifold-2/
  http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/class/2009/manifold-2/
- 単位を必要とする方は，本日配布する用紙にある問題に回答し，次回の授業開始前に提出してください．なお，整理の都合上，所定の用紙以外での提出はご遠慮ください．

前回までの訂正

- 講義資料 2，2 ページ 7 行目：$(\boldsymbol{x} = (p_0, p_1, p_2, p_3)) \Rightarrow (p = (p_0, p_1, p_2, p_3))$
- 講義資料 3，4 ページ，(3.6) 式

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & e^\sigma & 0 & 0 \\ e^\sigma & 0 & \sigma_v & h_u^1 \\ 0 & -\sigma_v & 0 & h_u^2 \\ 0 & -h_u^1 & -h_u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_u & h_v^1 \\ e^\sigma & \sigma_u & 0 & h_v^2 \\ 0 & -h_v^1 & -h_v^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \widetilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & e^\sigma & 0 & 0 \\ e^\sigma & 0 & \sigma_v & -h_u^1 \\ 0 & -\sigma_v & 0 & -h_u^2 \\ 0 & h_u^1 & h_u^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_u & -h_v^1 \\ e^\sigma & \sigma_u & 0 & -h_v^2 \\ 0 & h_v^1 & h_v^2 & 0 \end{pmatrix}$$

授業に関する御意見

- 1 ケ月も間が開くので最初は復習から始めてほしい．
  山田のコメント： そのつもりですが，まるまる同じことを同じ順番でかいつまんで説明してもおもしろくないので，講義の途中に前回までの情報を織り込むつもりです．

- 良いと思う.
  山田のコメント： そう？
- 授業に出られない場合があるのでレポート BOX に提出も可にしてください.
  山田のコメント： 都合により，できれば当日出していただきたいのです．難しいようだったら誰かに託していただいても結構，それも難しいようでしたらメイルでご連絡ください.
- 世界の中心はおれだ！のような楽しい表現をたくさんしてくれることを期待しています.
  山田のコメント： あまり期待されてもこまります.
- 12 月の授業について，木曜日の 5,6 限にあるとのことですが，その時間は情報系の授業をとっていて時間が重なってしまっています．出来れば両方とも授業をきちんと受けたいので，時間帯を変更できませんでしょうか？（僕の他にも同じ授業をとっている人が少なくとも 5〜6 人はいると思います）.
  山田のコメント： 検討します.

質問と回答

質問： K や H が定数の場合，もとの曲面は決定できる？

お答え： いいえ．この本[*1]の 79 ページ，189 ページ，201 ページをご覧ください．なお，K と H がともに一定な曲面は平面と球面に限ります.

質問： $\widehat{I}$, $\widehat{II}$, $\widehat{III}$ からもとの曲面は決定できる？

お答え： はい．それが曲面論の基本定理です.

質問： 曲面論ということで図からイメージしやすいです．（双曲面はできませんが）なにか双曲面をイメージするのに適した方法はないでしょうか.

お答え： 双曲平面のことでしょうか.（講義資料で「双曲面」と言っているのは，本当に「二葉双曲面」1 次元高いバージョンです．これが「双曲空間とみなせる」というのが前回の講義内容）．Poincaré 円板モデルではだめですか？

質問： 授業では何となくどういうことをしているとかというののイメージーはわかるのですが，厳密にギロンしたい時に授業の内容だと結構不足している気がしますが，どうなのでしょうか？

お答え： 一応，講義資料の中には必要な情報を盛り込んであるはずなのですが.

質問： 問題 2-1, 2-2, 2-6 の解答が知りたい．できれば HP にアップしてほしい．もしくは，採点して返却していただきたい.

お答え： 解答もしくはヒントはおいおいアップしましょう．とりあえず,

2-1: $\gamma(s) = \cosh sp + \sinh s\boldsymbol{v}$ ($p \in H^3, \boldsymbol{v} \perp p, |\boldsymbol{v}| = 1$) に対して $\gamma(s_1) = q$ となる s_1, $\boldsymbol{v}$ を決めてやれば，s_1 が p, q の距離.

2-2: 2 点 p, q の距離は $\cos^{-1}\langle p, q\rangle$．（絵を描けばすぐわかる）

2-6: $\gamma_1(s) = \cosh sp + \sinh s\boldsymbol{v}$, $\gamma_2(s) = \cosh sq + \sinh s\boldsymbol{w}$ とおいてひたすら計算.

[*1] 梅原雅顕・山田光太郎「曲線と曲面—微分幾何的アプローチ」裳華房

4 曲面論の基本定理

4.1 空間型の曲面に対するガウス・ワインガルテン方程式

実数 k に対して，$\widetilde{M}^3(k)$ で断面曲率 k の 3 次元単連結空間型を表す．すなわち

$$\widetilde{M}^3(k)=\begin{cases} S^3(k)=\{p\in\boldsymbol{R}^4\,;\,|p|=k^{-1}\} & (k>0)\\ \boldsymbol{R}^3 & (k=0)\\ H^3(k)=\{p\in L^4\,;\,\langle p,p\rangle=k^{-1},p_0>0\} & (k<0)\end{cases}$$

である．2 次元多様体 Σ の $M^3(k)$ へのはめ込み（曲面）$f\colon\Sigma\to M^3(k)$ の単位法線ベクトル場を ν，第一基本形式を ds^2，第二基本形式 を II とする：

$$ds^2=\langle df,df\rangle\,,\qquad II=-\langle df,d\nu\rangle\,.$$

とくに，簡単のため，第一基本形式 ds^2 に関する等温座標系 (u,v) をとり，

$$ds^2=e^{2\sigma}(du^2+dv^2)=e^{2\sigma}\,dz\,d\bar{z},\qquad II=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2 \tag{4.1}$$

と書いておく．

■$k=0$ の場合　はめ込み $f(u,v)$ の第一基本形式，第二基本形式が (4.1) と表されているとき，

$$\mathcal{F}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\qquad \boldsymbol{e}_1=e^{-\sigma}f_u,\quad \boldsymbol{e}_2=e^{-\sigma}f_v,\quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\nu$$

とすると，$\mathcal{F}$ は SO(3) に値をもつ 2 変数関数となる．ここではこれを適合枠とよぶ．すると $\mathcal{F}$ は次の微分方程式を満たすことがわかる：

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\mathcal{F}U,\qquad \frac{\partial F}{\partial v}=\mathcal{F}V, \tag{4.2}$$

$$U=\begin{pmatrix}0 & \sigma_v & -e^{-\sigma}L\\ -\sigma_v & 0 & -e^{-\sigma}M\\ e^{-\sigma}L & e^{-\sigma}M & 0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0 & -\sigma_u & -e^{-\sigma}M\\ \sigma_u & 0 & -e^{-\sigma}N\\ e^{-\sigma}M & e^{-\sigma}N & 0\end{pmatrix}.$$

■$k>0$ の場合　球面 $S^3(k)$ を $\boldsymbol{R}^4$ の部分多様体とみなすと，球面の半径は $1/c$ （$c=\sqrt{k}$）であるから，

$$\mathcal{F}=(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\quad \boldsymbol{e}_0=cf,\quad \boldsymbol{e}_1=e^{-\sigma}f_u,\quad \boldsymbol{e}_2=e^{-\sigma}f_v,\quad \boldsymbol{e}_3=\nu$$

は SO(4) に値をとる二変数関数で，

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\mathcal{F}U,\qquad \frac{\partial F}{\partial v}=\mathcal{F}V, \tag{4.3}$$

$$U=\begin{pmatrix}0 & -ce^{\sigma} & 0 & 0\\ ce^{\sigma} & 0 & \sigma_v & -e^{-\sigma}L\\ 0 & -\sigma_v & 0 & -e^{-\sigma}M\\ 0 & e^{-\sigma}L & e^{-\sigma}M & 0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0 & 0 & -ce^{\sigma} & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_u & -e^{-\sigma}M\\ ce^{\sigma} & \sigma_u & 0 & -e^{-\sigma}N\\ 0 & e^{-\sigma}M & e^{-\sigma}N & 0\end{pmatrix}$$

を満たす．

2009 年 11 月 19 日

■$k<0$ の場合　双曲空間 $H^3(k)$ をミンコフスキー空間 L^4 の部分多様体とみなし．$c=\sqrt{-k}$ とすると，

$$\mathcal{F}=(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\quad \boldsymbol{e}_0=cf,\quad \boldsymbol{e}_1=e^{-\sigma}f_u,\quad \boldsymbol{e}_2=e^{-\sigma}f_v,\quad \boldsymbol{e}_3=\nu$$

は $\mathrm{SO}_+(3,1)$ に値をとる二変数関数で，

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\mathcal{F}U,\qquad \frac{\partial F}{\partial v}=\mathcal{F}V, \tag{4.4}$$
$$U=\begin{pmatrix}0 & ce^{\sigma} & 0 & 0\\ ce^{\sigma} & 0 & \sigma_v & -e^{-\sigma}L\\ 0 & -\sigma_v & 0 & -e^{-\sigma}M\\ 0 & e^{-\sigma}L & e^{-\sigma}M & 0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0 & 0 & ce^{\sigma} & 0\\ 0 & 0 & -\sigma_u & -e^{-\sigma}M\\ ce^{\sigma} & \sigma_u & 0 & -e^{-\sigma}N\\ 0 & e^{-\sigma}M & e^{-\sigma}N & 0\end{pmatrix}$$

を満たす．

■積分可能条件　方程式 (4.2), (4.3), (4.4) の積分可能条件

$$U_v-V_u-UV+VU=O$$

は次と同値である：

$$-e^{-2\sigma}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv})=e^{-4\sigma}(LN-M^2)+k,\qquad \frac{\partial q}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}e^{2\sigma}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{4.5}$$
$$q=\frac{1}{4}\bigl((L-N)-2iM\bigr),\quad H=\frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L+N),\quad z=u+iv.$$

4.2　フロベニウスの定理

ガウス・ワインガルテンの方程式が解をもつための条件を与えたい．いま，領域 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ の点 $x_0\in D$ を固定し，D 上でなめらかな行列値関数

$$U,V\colon D\longrightarrow \mathrm{M}(n,\boldsymbol{R})$$

を用いて，つぎの線形微分方程式を考える[*2]．

$$\frac{\partial F}{\partial u}=FU,\qquad \frac{\partial F}{\partial v}=FV,\qquad F(x_0)=a\in\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R}) \tag{4.6}$$

ただし $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{R})$ は n 次正方行列全体の集合，$\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ は n 次正則行列全体の集合，F は $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{R})$ に値をとる未知関数とする．

微分形式を用いれば，方程式 (4.6) を座標不変な形で表すことができる：

$$dF=F\alpha\qquad \alpha=U\,du+V\,dv. \tag{4.7}$$

こうしたほうが以下の議論は見通しがよくなるが，微分形式に不慣れな人のため，(4.6) のまま扱うことにしよう．

[*2] 高次元に一般化するのは難しくない．

補題 4.1. 行列値関数 F が領域 D 上で方程式 (4.6) を満たしているとする．（区分的）なめらかな道

$$\gamma\colon [0,1] \ni t \longmapsto \gamma(t) = \bigl(u(t), v(t)\bigr) \in D$$

に対して $F_\gamma(t) := F \circ \gamma(t)$ とおけば，F_γ は常微分方程式

$$\frac{d}{dt}F_\gamma = F_\gamma \left(U\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial v}{\partial t} \right) \tag{4.8}$$

をみたす．

補題 4.2. 行列値関数 F が (4.6) を満たすならば $\det F$ は 0 にならない．さらに

- U, V のトレースが 0 かつ $a \in \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{R})$ ならば $F(x) \in \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{R})$ $(x \in D)$ が常に成り立つ．
- U, V が交代行列，かつ $a \in \mathrm{SO}(n)$ ならば $F(x) \in \mathrm{SO}(n)$ が常に成り立つ．
- U, V が
$$UY + Y{}^tU = O, \quad VY + Y{}^tV = O, \qquad Y = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$$
を満たし，かつ $a \in \mathrm{SO}_+(1, n-1)$ ならば $F(x) \in \mathrm{SO}_+(1, n-1)$ が常に成り立つ．

証明. 補題 4.1 のような道 γ で $\gamma(0) = x_0$ となるものをとる．このとき $f(t) = \det F_\gamma(t)$ とおくと

$$\frac{df}{dt} = \mathrm{tr}\, \widetilde{F}_\gamma \frac{dF_\gamma}{dt} = \mathrm{tr}\left(\widetilde{F}_\gamma \mathcal{F}_\gamma \left(U\dot{u} + V\dot{v}\right) \right) = \det F_\gamma \,\mathrm{tr}\left(U\dot{u} + V\dot{v}\right) = f(t)\,\mathrm{tr}\left(U\dot{u} + V\dot{v}\right)$$

なので

$$f(t) = f(0) \exp \int_0^t \mathrm{tr}\left(U\dot{u} + V\dot{v}\right)\, dt$$

となり，$f(0) = \det F(x_0) = \det a \neq 0$ から $f(t) \neq 0$ を得る．γ の終点は任意にとれるので，最初の主張が示された．さらに $\mathrm{tr}\, U = \mathrm{tr}\, V = 0$ なら $f(t)$ は定数なので，2 番めの主張も成り立つ．

次に U, V が交代行列の場合を考えると

$$\frac{d}{dt}\bigl(F_\gamma {}^tF_\gamma\bigr) = 0$$

であることがわかるが，$t = 0$ で $a{}^ta = \mathrm{id}$ であるから F_γ が直交行列であることがわかる．とくに $\mathrm{tr}\, U = \mathrm{tr}\, V = 0$ だから $\det F_\gamma = \det a = 1$ となり，第 3 の主張を得る．

第 4 の主張は，$A \in \mathrm{SO}_+(3, 1)$ であるための条件が $AY{}^tA = Y$，$\det A = 1$ かつ $a_{00} > 0$ （$A = (a_{ij})$ であることから上と同様にしてわかる． □

補題 4.3. 方程式 (4.6) が解 F をもつならば

$$U_v - V_u - UV + VU = 0 \tag{4.9}$$

が成り立つ．

証明. 2 つの方程式を微分して

$$F_{uv} = (F_u)_v = F(VU + U_v), \qquad F_{vu} = (F_v)_u = F(UV + V_u)$$

が等しいことと F が正則となることから結論が得られる． □

定理 4.4 (フロベニウスの定理)**.** 領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ が**単連結**であるとする．このとき，D 上で定義された滑らかな行列値関数 U, V が (4.9) を満たすならば，方程式 (4.6) を満たす行列値関数 $F\colon D \to \mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ がただ一つ存在する．

注意 4.5.
- 方程式 (4.6) の係数行列と未知関数を複素数を成分にもつ行列としても同様の結果が成り立つ．とくに
  - $\operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = 0$ かつ $a \in \mathrm{SL}(n,\boldsymbol{C})$ ならば，解 F も $\mathrm{SL}(n,\boldsymbol{C})$ に値をとる．
  - U, V が歪エルミート行列かつ $a \in \mathrm{SU}(n,\boldsymbol{C})$ ならば，解 F も $\mathrm{SU}(n)$ に値をとる．ここで，正方行列 A が歪エルミートであるとは $A + A^* = O$ が成り立つことである．
- 独立変数 (u,v) を複素変数 $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$ として，方程式
$$F_z = FZ, \qquad F_{\bar{z}} = FW$$
を考えても同様の結果が得られる．とくに $W = -Z^*$, $\operatorname{tr} Z = 0$ かつ初期値が $\mathrm{SU}(n)$ の元ならば F は $\mathrm{SU}(n)$ に値をつ．
- 方程式
$$F_u = UF, \qquad F_v = VF$$
の形についても同様のことが成り立つ．

4.3 曲面論の基本定理

フロベニウスの定理の応用として，次が成り立つ：

定理 4.6 (曲面論の基本定理)**.** 実数 k を一つ固定する．座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の単連結領域 D 上で定義された滑らかな関数 σ, L, M, N が (4.5) を満たしているならば，はめ込み $f\colon D \to \widetilde{M}^3(k)$ で，その第一基本形式と第二基本形式が
$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$
となるものが存在する．さらに，そのような f は $\widetilde{M}^3(k)$ の向きを保つ等長変換で移り会うものを除いてただ一つである．

証明. 点 $x_0 \in D$ を一つ固定する．まず $k < 0$ の場合を考えよう．このとき，フロベニウスの定理と (4.5) より 方程式 (4.4) の $\mathcal{F}(x_0) = \mathrm{id}$ となる解がただ一つ存在する．とくに $\mathcal{F}\colon D \to \mathrm{SO}_+(3,1)$ となるが，その第一列を $\boldsymbol{e}_0$ とおけば，

$$f = \frac{1}{\sqrt{-k}}\boldsymbol{e}_0 \tag{4.10}$$

が求める曲面である．

次に $k = 0$ の場合を考える．同様に (4.2) の $\mathcal{F}(x_0) = \mathrm{id}$ を満たす解をとり，$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ として，

$$\varphi = e^{\sigma}(\boldsymbol{e}_1\,du + \boldsymbol{e}_2\,dv) \tag{4.11}$$

とおくと，(4.2) の解であることから

$$d\varphi = 0 \tag{4.12}$$

が成り立つ．したがって D の単連結性から $df=\varphi$ かつ $f(x_0)=\mathbf{0}$ となる $f\colon D\to\boldsymbol{R}^3$ がただ一つ存在するが，これが求めるものである．

同様に $k>0$ の場合も示すことができる．一意性は演習問題にしておこう． □

4.4 フロベニウスの定理の証明

定理 4.4 に証明を与えよう．いま，x_0 と $x\in D$ を結ぶなめらかな道

$$\gamma\colon[0,1]\ni t\longmapsto\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)\in D\qquad\gamma(0)=x_0,\quad\gamma(1)=x$$

をとり，常微分方程式 (4.8) を考える．線形常微分方程式の解の存在と一意性の定理から，初期条件 $F_\gamma(0)=a$ を満たす解 F_γ がただ一つ存在する．

補題 4.7. $F_\gamma(1)$ は γ の終点 x のみに依存する．

証明. 2 点 x_0, x を結ぶ二つの道

$$\gamma_0(t)=\bigl(u_0(t),v_0(t)\bigr),\qquad\gamma_1(t)=\bigl(u_1(t),v_1(t))\bigr)\bigl(\gamma_0(0)=\gamma_1(0)=x_0,\quad\gamma_0(1)=\gamma_1(1)=x\bigr)$$

をとる．領域 D の単連結性より，滑らかな写像

$$\Gamma\colon[0,1]\times[0,1]\ni(s,t)\longmapsto\Gamma(s,t)\in D\quad\text{で}$$
$$\Gamma(0,t)=\gamma_0(t),\quad\Gamma(1,t)=\gamma_1(t),\quad\Gamma(s,0)=x_0,\quad\Gamma(1,0)=x$$

となるものをとることができる．いま $\gamma_s(t)=\gamma(t)$ とおいて，道 γ_s に対して方程式 (4.8) を考え，その解を

$$F(s,t)=F_{\gamma_s}(t)\qquad F(s,0)=a$$

と書く．さらに $\gamma_s(t)=\bigl(u(s,t),v(s,t)\bigr)$ とおいて

$$S=U\,u_s+V\,v_s,\qquad T=U\,u_t+V\,v_t$$

とすると，積分可能条件と $\Gamma(s,0)$ と $\Gamma(s,1)$ が定数であることから

$$S_t-T_s-ST+TS=O,\qquad S(s,0)=S(s,1)=0\tag{4.13}$$

が成り立つことがわかる．

$F_t=FT$ であることから，

$$\begin{aligned}F_{st}&=F_sT+FT_s=F_sT+F(S_t-ST+TS)\\&=F_sT+FS_t-FST+FTS\\&=F_sT+(FS)_t-F_tS-FST+FTS=F_sT+(FS)_t-FTS-FST+FTS\\&=F_sT+(FS)_t-FST=(F_s-FS)T+(FS)_t\end{aligned}$$

となるので，

$$(F_s-FS)_t=(F_s-FS)T$$

が成り立つ．これは F_s-FS を未知関数とする，(4.8) と同じ微分方程式であるから，解の一意性より

$$F_s-FS=bF$$

をみたす b が存在する．ここで $t=0$ を代入すると $F(s,0)=a$ だから $F_s(s,0)=0$, また $S(s,0)=0$ なので $b=0$ でなければならない．したがって

$$F_s = FS$$

が成り立つ．とくに $S(s,1)=O$ であるから $F_s(s,1)=0$．したがって $F(s,1)$ は s によらないので

$$F_{\gamma_2}(1) = F(1,1) = F(0,1) = F_{\gamma_1}(1).$$

□

そこで,

(4.14) $$F(x) = F_\gamma(1) \qquad (\gamma \text{ は } x_0 \text{ と } x_1 \text{ を結ぶ道})$$

と定めると $F\colon D \to \mathrm{M}(n,\boldsymbol{R})$ が得られた．

これが求めるものであることは演習問題としておく．

4.5 Lawson 対応

定理 4.8. 単連結領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 上で定義されたはめ込み $f\colon D \to \widetilde{M}^3(k)$ の第一・第二基本形式が (4.1) で与えられており，さらに f の平均曲率が一定であるとする：

$$H = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L+N) = \text{一定}$$

このとき，任意の定数 $\widetilde{H}$ に対して

(4.15) $$\tilde{k} = k + (H^2 - \widetilde{H}^2)$$

とすると，はめ込み $\tilde{f}\colon D \to \widetilde{M}^3(\tilde{k})$ で，その第一基本形式 $d\tilde{s}^2$ と第二基本形式 $\widetilde{I\!I}$ が

$$d\tilde{s}^2 = ds^2, \qquad \widetilde{I\!I} = I\!I + (\tilde{H} - H)ds^2$$

となるようなものが存在する．

すなわち，$\widetilde{M}^3(k)$ の定平均曲率 H の曲面全体と $\widetilde{M}^3(\tilde{k})$ の定平均曲率 $\widetilde{H}$ の曲面全体の間に，局所等長的な 1 対 1 対応がある．

系 4.9.
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平均曲率 1 をもつ曲面と，球面 $S^3 = S^3(1)$ の極小曲面（平均曲率 0）の曲面の間に局所等長的な対応がある．
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平均曲率 0 をもつ曲面と，双曲空間 $H^3 = H^3(-1)$ の平均曲率 1 をもつ曲面の間に局所等長的な対応がある．

問題

4-1 補題 4.2 の最後の主張を示しなさい.

4-2 曲面論の基本定理 4.6 の $k=0$ の場合の一意性を次のようにして示しなさい：

- 条件を満たす曲面 f_1, f_2 が存在したとして，対応する適合枠を $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ とする．ガウスワインガルテン方程式 (4.2) から $\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2$ が定数行列であることを示す.
- したがって $\mathcal{F}_2 = a\mathcal{F}_1$（$a$ は定数行列）とかけるが，$a \in \mathrm{SO}(3)$ である.
- このとき $df_1 = a df_2$ となることから f_1 と f_2 は回転と平行移動で移りあう.

4-3 式 (4.12) を示しなさい.

4-4 式 (4.14) が (4.6) の解であることを示しなさい.