2009 年 12 月 8 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

多様体論特論第二 講義資料 5

重要なお知らせ

- 次回は 12 月 15 日（火）13 時 20 分からになります.

お知らせ

- この授業の web ページはこちらです.
  http://www.math.titech.ac.jp/ kotaro/class/2009/manifold-2/
  http://www.official.kotaroy.com/class/2009/manifold-2/
  http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/class/2009/manifold-2/
  東工大のページ（math.titech.ac.jp）は都合により更新がおくれます．ミラー（kotaroy.com) をご利用ください.

5 Lawson 対応

5.1 曲面論の基本定理（復習）

2 次元多様体 Σ から定曲率 k の 3 次元空間型 $\widetilde{M}^3(k)$ へのはめ込み $f\colon \Sigma \to \widetilde{M}^3(k)$ の第一基本形式 ds^2 に関する等温座標系 (u,v) をとり，第一基本形式，第二基本形式をそれぞれ

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma}\,dz\,d\bar{z}, \qquad I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \tag{5.1}$$

と書くと，次の**ガウス・コダッチの方程式**

$$-e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) = e^{-4\sigma}(LN - M^2) + k, \qquad \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{2\sigma}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{5.2}$$
$$q = \frac{1}{4}\bigl((L-N) - 2iM\bigr), \quad H = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L+N), \quad z = u + iv.$$

が成り立つ．ここで H は曲面の**平均曲率**と呼ばれる．

逆に，単連結領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 上で定義されたなめらかな関数 σ, L, M, N が (5.2) を満たしているならば，はめ込み $f\colon D \to \widetilde{M}^3(k)$ で，第一基本形式と第二基本形式が (5.1) となるようなものが，$\widetilde{M}^3(k)$ の向きを保つ等長変換で写り合うものをのぞきただ一つ存在する．

5.2 Lawson 対応

定理 5.1. 単連結領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 上で定義されたはめ込み $f\colon D \to \widetilde{M}^3(k)$ の第一・第二基本形式が (5.1) で与えられており，さらに f の平均曲率が一定であるとする：

$$H = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L+N) = \text{一定}$$

このとき，任意の定数 $\widetilde{H}$ に対して

$$\tilde{k} = k + (H^2 - \widetilde{H}^2) \tag{5.3}$$

とすると，はめ込み $\tilde{f}\colon D \to \widetilde{M}^3(\tilde{k})$ で，その第一基本形式 $d\tilde{s}^2$ と第二基本形式 $\widetilde{I\!I}$ が

$$d\tilde{s}^2 = ds^2, \qquad \widetilde{I\!I} = I\!I + (\tilde{H} - H)ds^2$$

となるようなものが存在する．

すなわち，$\widetilde{M}^3(k)$ の定平均曲率 H の曲面全体と $\widetilde{M}^3(\tilde{k})$ の定平均曲率 $\widetilde{H}$ の曲面全体の間に，局所等長的な 1 対 1 対応がある．

系 5.2.
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平均曲率 1 をもつ曲面と，球面 $S^3 = S^3(1)$ の極小曲面（平均曲率 0）の曲面の間に局所等長的な対応がある．
- ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の平均曲率 0 をもつ曲面と，双曲空間 $H^3 = H^3(-1)$ の平均曲率 1 をもつ曲面の間に局所等長的な対応がある．

2009 年 12 月 8 日

5.3 応用：双曲空間の平均曲率 1 をもつ曲面の表現公式

ユークリッド空間の極小曲面は，複素解析的なデータでそのはめ込みを具体的に表す Weierstrass 表現公式が知られている．したがって，系 5.2 から，双曲空間の平均曲率 1 をもつ曲面（[3] にしたがって「CMC-1 曲面」と呼ぶ）に対しても，複素解析的なデータによる表現公式が成り立つことが期待される．実際，Bryant はそのような類似が成り立つことを示した（Bryant の表現公式 [1, 3]）．ここでは，それを定理 5.1 の応用として証明しよう[*1]．

■極小曲面の Weierstrass 表現公式　複素平面 $\boldsymbol{C}$ の単連結領域 D 上で定義された有理型関数 g と，正則 1 次微分形式 $\omega = \hat{\omega}\,dz$ （$\hat{\omega}$ は D 上の正則関数，$z = u + iv$ は複素座標）に対して

$$ds^2 := (1 + |g|^2)^2\,|\omega|^2 \tag{5.4}$$

とおき，ds^2 が D 上のリーマン計量を与えていると仮定する．このとき，

$$f = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\bigl((1-g^2), i(1+g^2), 2g\bigr)\omega \tag{5.5}$$

とおくと，f は D から $\boldsymbol{R}^3$ への写像を与えるが，これは極小はめ込みを与えている．さらに，その第一基本形式と第二基本形式は

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2|\omega|^2, \qquad I\!I = -\omega\,dg - \overline{\omega\,dg} \tag{5.6}$$

で与えられる．逆に，単連結な極小曲面はこのようにして得られる．

詳細は [2] などを見よ．

■Bryant の表現公式　ここでは，4 次元ミンコフスキー空間を 2 次エルミート行列がなす空間と同一視し，双曲空間を

$$H^3 = \{aa^*\,;\, a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})\}$$

と同一視しておく．

複素平面 $\boldsymbol{C}$ の単連結領域 D 上で定義された有理型関数 g と，正則 1 次微分形式 $\omega = \hat{\omega}\,dz$ （$\hat{\omega}$ は D 上の正則関数，$z = u + iv$ は複素座標）に対して

$$ds^2 := (1 + |g|^2)^2\,|\omega|^2 \tag{5.7}$$

とおき，ds^2 が D 上のリーマン計量を与えていると仮定する．このとき，微分方程式

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix}\omega, \qquad F(z_0) = \mathrm{id} \tag{5.8}$$

はただ一つの正則な解 $F\colon D \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ をもつが，

$$f = FF^*\colon D \longrightarrow H^3 \tag{5.9}$$

は平均曲率 1 のはめ込み (CMC-1 はめ込み) を与えている．とくに，その第一基本形式と第二基本形式は

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2|\omega|^2, \qquad I\!I = -\omega\,dg - \overline{\omega\,dg} + ds^2 \tag{5.10}$$

で与えられる．逆に，単連結な CMC-1 曲面はこのようにして得られる．

[*1] この証明は梅原雅顕氏のアイディアによる．

■Bryant の表現公式の証明 方程式 (5.8) の解から定まる f の第一基本形式，第二基本形式が (5.10) となることは直接計算で（どうやっても）わかるので，逆を示せばよい．単連結な CMC-1 曲面 $f\colon D \to H^3$ に対して，Lawson 対応により対応する極小曲面を $f_0\colon D \to \boldsymbol{R}^3$ と書くと，f_0 は (5.5) のように表示でき，f_0 の第一・第二基本形式は (5.6) のようにかけるから，f の第一・第二基本形式は (5.10) の形になる．その (g, ω) に対して (5.8) の解から得られるはめ込み $f_{g,\omega}$ もまた (5.10) の形の基本形式をもつので，曲面論の基本定理よりこれはもとの f と H^3 の合同変換でうつり合う．

参考文献

[1] R. Bryant, Surfaces of constant mean curvature one in hyperbolic space, Astérisque Vol.154-155, 1987.

[2] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications Inc. (1986).

[3] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature*-1 *in the hyperbolic* 3-*space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.

[4] 梅原雅顕，山田光太郎，「3 次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面の幾何」，数学 47 (1995), 145–157