

2009年12月15日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

多様体論特論第二 講義資料 6

お知らせ

- 次回は1月7日(木)15時00分から,その次は1月13日(水)16時40分からの予定です。(この予定でご都合が悪い方が多いようでしたら本日検討しますので申し出てください)
- 1月の2回で今回の講義は終了としたいと思います。
- 単位を必要とする方は,本日配布する用紙にある問題に回答し,次回の授業開始前に提出してください。なお,整理の都合上,所定の用紙以外での提出はご遠慮ください。
- 上記の提出物と,いままで2回の提出物により評価を決定します。

前回までの訂正

- 講義資料4,3ページ(4.3)式:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \mathcal{F}U, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \mathcal{F}V, \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}U, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}V$$

授業に関する御意見

- 今回のレポートは計算が大変でした。
山田のコメント: お疲れさまでした。
- 幾何にはユニークな先生(笑顔で授業をする方)が多いと思いますが,実際のところどうなのでしょうか。
山田のコメント: 知りません。他では少ないんですか?
- 徐々に授業内容がわからなくなりつつありますが,なんとかついていきたいと思えます。
山田のコメント: ごめんなさい。だんだんマニアックになっていっていると思います。ある程度の「気分」が伝わればよいと思います。
- 授業日程に関するご希望が2件ありました。本日お伝えした日程には定植いていないようですが,いかなものでしょうか。

質問と回答

質問: 可積分条件のどの辺が可積分なんですか?

お答え: 微分方程式を解くことを,慣用的に「積分する」というので。

質問: 曲面論の基本定理はガウス・ワインガルテン方程式を解くこと(フロベニウスの定理)によって,解の存在と一意性を示していますが,曲面 $f: \Sigma \rightarrow \widetilde{M}^3(k)$ は第一,第二基本形式の係数を使って具体的

に書き下せないのでしょうか？

お答え： 一般にはできません．

質問： 適合枠がなぜ 4 つあるのかわからない (e_0, e_1, e_2, e_3 の 4 つ)

お答え： まず，与えられた曲面に対して，適合枠は 1 つ（曲面上の行列に値をとる 1 つの関数）です．その上で， R^3 の曲面では，適合枠が 3×3 行列（3 つのベクトルの組）， S^3 や H^3 の曲面では 4×4 行列に値をとる，ということです．

- (1) ユークリッド空間では，曲面上の各点に対して接平面の正規直交基底 $\{e_1, e_2\}$ と単位法線ベクトル $\{e_3\}$ を並べて $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ が適合枠でした．この微分を考えるのは容易です．なぜなら R^3 の点 P と Q の (R^3 を可微分多様体とみたときの) 接ベクトル空間は平行移動により同一視できるので $\mathcal{F}(P)$ と $\mathcal{F}(Q)$ の差を測ることができるからです．
- (2) ところが，たとえば球面 S^3 上の異なる 2 点 P, Q における接空間 $T_P S^3$ と $T_Q S^3$ は一般に同一視できません．実際 $S^3 \subset R^4$ とみなせば $T_P S^3$ と $T_Q S^3$ は R^4 の（一般には異なる）3 次元部分空間です．したがって， $T_P S^3$ のベクトルと $T_Q S^3$ のベクトルを引き算すると，球面上の接ベクトルとは思えなくなるのです．したがって，ユークリッド空間のように (e_1, e_2, e_3) をとると，その微分に意味を持たせることができなくなってしまいます．そこで，これに曲面上の点の位置ベクトル e_0 を加えて R^4 の基底がつくる行列 $\mathcal{F} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ を適合枠としている，とみなすとよいと思います．双曲空間の場合も同様です．

質問： 「曲面論の基本定理」で $k \neq 0$ の場合は，適合枠の第 1 列から回転並進なしに一位で f が定まると思いますが．

お答え： そうではありません．球面の場合，ガウス・ワインガルテン方程式の解 \mathcal{F} には $a\mathcal{F}$ ($a \in \text{SO}(4)$) だけの自由度があります．行列 \mathcal{F} の第一列を f とすると， $a\mathcal{F}$ の第一列は af ですから，得られる曲面（はめこみ） f は

$$f \mapsto af \quad (a \in \text{SO}(4))$$

の任意性があることになります． $\text{SO}(4)$ は球面の向きを保つ等長変換全体の集合とみなせますから，曲面論の基本定理から得られる f は向きを保つ等長変換だけの任意性をもつことになります．双曲空間の場合も同様．ちなみに，球面や双曲空間の場合，等長変換に「回転」と「並進」の区別はありません．

6 Bryant の公式の証明

前回, Lawson 対応の応用として Bryant の表現公式の応用を与えたが, ここでは, もう少し直接的な証明を与える.

6.1 Bryant の表現公式

双曲空間 H^3 を 2 次エルミート行列の空間 $\text{Herm}(2)$ の部分多様体とみなす (2.2 節):

$$H^3 = \{x \in \text{Herm}(2); \det x = 1, \text{tr } x > 0\}.$$

複素平面 C の単連結領域 D 上で定義された有理型関数 g と, 正則 1 次微分形式 $\omega = \hat{\omega} dz$ ($\hat{\omega}$ は D 上の正則関数, $z = u + iv$ は複素座標) に対して

$$(6.1) \quad ds^2 := (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2$$

とおき, ds^2 が D 上のリーマン計量を与えていると仮定する. このとき, 微分方程式

$$(6.2) \quad F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega, \quad F(z_0) = \text{id}$$

はただ一つの正則な解 $F: D \rightarrow \text{SL}(2, C)$ をもつが,

$$(6.3) \quad f = FF^*: D \rightarrow H^3$$

は平均曲率 1 のはめ込み (CMC-1 はめ込み) を与えている. とくに, その第一基本形式と第二基本形式は

$$(6.4) \quad ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2, \quad II = -\omega dg - \overline{\omega} d\bar{g} + ds^2$$

で与えられる. 逆に, 単連結な CMC-1 曲面はこのようにして得られる.

6.2 ガウス・ワインガルテン方程式の 2 次行列による表示 (復習)

はめ込み $f: R^2 \supset D \rightarrow H^3$ の第一基本形式, 第二基本形式をそれぞれ

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

または, 複素座標 $z = u + iv$ を用いて

$$ds^2 = e^{2\sigma} dz d\bar{z}, \quad II = q dz^2 + \bar{q} d\bar{z}^2 + H ds^2$$

$$\left(q = \frac{1}{4}((L - N) - 2iM), \quad H = \frac{e^{-2\sigma}}{2}(L + N) \right)$$

と書いておく.

曲面の適合枠

$$\mathcal{F} = (e_0, e_1, e_2, e_3) \quad e_0 = f, \quad e_1 = e^{-\sigma} f_u, \quad e_2 = e^{-\sigma} f_v, \quad e_3 = \nu$$

を考えると, \mathcal{F} は領域 D から $SO_+(3, 1)$ への写像を与えるが, $SO_+(3, 1)$ の二重被覆を $SL(2, \mathbb{C})$ と見なし (2.2.3 節参照), $\Theta: D \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ と考えておく*1.

補題 6.1 (命題 3.13, 3.14). 適合枠 $\Theta: D \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ は次の方程式を満たす:

$$(6.5) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \Theta Z, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{z}} = \Theta W, \quad Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & e^\sigma(1+H) \\ -2e^{-\sigma}q & -\sigma_z \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_{\bar{z}} & 2e^{-\sigma}\bar{q} \\ e^\sigma(1-H) & \sigma_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

この方程式系の積分可能条件は

$$(6.6) \quad \sigma_{z\bar{z}} = -\frac{1}{4}e^{2\sigma}(1-H^2) - e^{-2\sigma}q\bar{q}, \quad \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{2\sigma}\frac{\partial H}{\partial z}$$

である.

注意 6.2. 適合枠 Θ から曲面 f を復元するには次のようにすればよい:

$$f = \Theta\Theta^*: D \rightarrow H^3 \subset \text{Herm}(2).$$

6.3 Bryant の公式の証明

命題 6.3. 前節までの記号の下, なめらかな写像

$$X: D \rightarrow SU(2)$$

で $\Theta X: D \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ が複素解析的であるようなものが存在するための必要十分条件は $H = 1$ となることである.

証明. 方程式 (6.5) を用いれば, ΘX が複素解析的であるための必要十分条件は

$$(\Theta X)_{\bar{z}} = \Theta_z X - \Theta X_{\bar{z}} = \Theta(WX - X_{\bar{z}}) = 0$$

となることである. これは

$$X_{\bar{z}} = WX$$

が成り立つことと同値である. ここで $X \in SU(2)$ であるから, $X^{-1} = X^*$ なので,

$$X_z = -X(X^{-1})_z X = -X X_z^* X = -X(X_{\bar{z}})^* X = -X(WX)^* X = -W^* X.$$

したがって, 条件を満たす X が存在するための必要十分条件は

$$X_z = -W^* X, \quad X_{\bar{z}} = WX$$

である. この積分可能条件

$$(W^*)_{\bar{z}} + W_z = W^* W - W W^* \quad W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_{\bar{z}} & 2e^{-\sigma}\bar{q} \\ e^\sigma(1-H) & \sigma_{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

は, (6.6) を用いれば $H = 1$ と同値となることがわかる. □

したがって, 平均曲率が 1 のときは $F := \Theta X$ とおけば $f = FF^*$ とかけるような正則写像 $F: D \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ が得られる.

*1 D の単連結性は仮定しておく.

参考文献

- [1] R. Bryant, Surfaces of constant mean curvature one in hyperbolic space, *Asterisque* Vol.154-155, 1987.
- [2] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications Inc. (1986).
- [3] 梅原雅顕 (川上裕 記) 3次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面—極小曲面との関係をテーマとして—, 名古屋大学多元数理講究録, 2009.
- [4] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space*, *Ann. of Math.* **137** (1993), 611–638.
- [5] 梅原雅顕, 山田光太郎, 「3次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面の幾何」, *数学* 47 (1995), 145–157

問題

6-1 • 写像

$$f: \mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2 \right) \in \mathbf{R}^3$$

は Enneper の極小曲面と呼ばれる極小曲面を与える。これは,

$$g = z, \quad \omega = dz \quad (z = u + iv)$$

に対して Weierstrass の表現公式 (5.5) (講義資料 5) を適用して得られるものであることを示しなさい。

- 上と同じ $(g, \omega) = (z, dz)$ に対して, 微分方程式 (6.2) を満たす F を求めなさい。これから定まる H^3 の CMC-1 曲面を Enneper cousin という [1].

6-2 命題 6.3 から Bryant の公式を証明しよう。そのためには, 命題 6.3 で得られた $F = \Theta X$ に対して (6.2) を満たす (g, ω) の存在を示さなければならない。

- 2次行列に値をとる正則関数 $\alpha(z)$ が $\det \alpha = 0$, $\operatorname{tr} \alpha = 0$ を満たすならば,

$$\alpha = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \hat{\omega}$$

を満たす有理型関数 g と正則関数 $\hat{\omega}$ が存在することを示しなさい。

- 命題 6.3 の $F = \Theta X$ に対して

$$\alpha = F^{-1} \frac{dF}{dz}$$

とおくと, $\det \alpha = \operatorname{tr} \alpha = 0$ であることを示しなさい。