

2010 年 1 月 7 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

## 多様体論特論第二 講義資料 7

### お知らせ

- 次回は 1 月 13 日 (水) 16 時 40 分から, この回で最終回になります .
- 今回まで 3 回の提出物により評価を決定します .

## 7 理想境界と双曲的ガウス写像

### 7.1 双曲空間の測地線

測地線と距離 双曲空間  $H^3$  を 4 次元ミンコフスキー空間  $L^4$  の超曲面とみなしておく\*1 :

$$(7.1) \quad H^3 = \{p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in L^4; \langle p, p \rangle = -(p_0)^2 + (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = -1, p_0 > 0\}.$$

点  $p \in H^3$  における接空間は

$$(7.2) \quad T_p H^3 = \{v \in L^4; \langle p, v \rangle = 0\} = p^\perp$$

と表される. ミンコフスキー空間  $L^4$  の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $T_p H^3$  に制限することにより,  $H^3$  は断面曲率が  $-1$  で一定な単連結リーマン多様体になる.

点  $p \in H^3$  と単位ベクトル  $v \in T_p H^3$  ( $\langle v, v \rangle = 1$ ) に対して

$$(7.3) \quad \gamma_{p,v}(t) := (\cosh t)p + (\sinh t)v$$

とすると,  $\gamma_{p,v}$  は点  $p$  における速度ベクトルが  $v$  となるような  $H^3$  の測地線となる. とくに, 任意の点とその点における単位接ベクトルを初期値・初速度にもつ測地線が無限の長さをもつから,  $H^3$  は完備となることがわかる. とくに,  $H^3$  の任意の 2 点  $p, q$  を結ぶ測地線で, 2 点を結ぶ最短線となるものが存在する. その長さを 2 点  $p, q$  の距離という.

補題 7.1. 双曲空間  $H^3$  の 2 点  $p, q$  の距離は

$$\text{dist}_{H^3}(p, q) = \cosh^{-1}(-\langle p, q \rangle)$$

で与えられる.

証明. 点  $p$  を速度  $v \in T_p H^3$  ( $|v| = 1$ ) で出発する測地線  $\gamma_{p,v}$  が  $t = t_0$  において  $p$  と異なる点  $q$  を通るとする:

$$\gamma_{p,v}(t_0) = (\cosh t_0)p + (\sinh t_0)v = q.$$

この  $t_0$  が 2 点  $p, q$  の距離を与える. 上の式の両辺に  $p$  を内積すると (7.1) と (7.2) から

$$-\cosh t_0 = \langle p, q \rangle$$

となり, 結論が得られる\*2. □

上半空間モデル よく知られているように, 3 次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  の上半空間

$$(7.4) \quad H := \{(X_1, X_2, X_3) \in \mathbf{R}^3; X_3 > 0\} \text{ に計量 } ds_H^2 = \frac{(dX_1)^2 + (dX_2)^2 + (dX_3)^2}{X_3^2}$$

---

2010 年 1 月 7 日

\*1 以下の話は一般次元でも通用するが, 簡単のため 3 次元に限ることにする.

\*2 異なる 2 点  $p, q \in H^3$  に対して  $\langle p, q \rangle < -1$  でなければならないが, このことは容易に証明できる.

を与えて得られるリーマン多様体は、完備単連結かつ断面曲率  $-1$  のリーマン多様体を与える。この多様体  $(H, ds_H^2)$  は双曲空間  $H^3$  と等長的である。これを双曲空間の上半空間モデルという。実際

$$(7.5) \quad \pi_H: H^3 \ni (p_0, p_1, p_2, p_3) \mapsto \frac{1}{p_0 - p_3}(p_0, p_1, 1) \in H$$

は等長的な 1 対 1 対応を与える。

補題 7.2. 上半空間モデルの測地線は、 $(X_1, X_2)$ -平面と直交する円または  $(X_1, X_2)$ -平面に垂直な直線である。

単位球モデル 3次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  の単位球

$$(7.6) \quad D := \{X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbf{R}^3; |X| < 1\}$$

$$\text{に計量 } ds_D^2 = \frac{4}{(1 - |X|^2)^2} ((dX_1)^2 + (dX_2)^2 + (dX_3)^2)$$

を与えて得られるリーマン多様体は、完備単連結かつ断面曲率  $-1$  のリーマン多様体を与える。この多様体  $(D, ds_D^2)$  は双曲空間  $H^3$  と等長的である。これを双曲空間の単位球モデル (Poincaré 単位球モデル) という。実際

$$(7.7) \quad \pi_D: H^3 \ni (p_0, p_1, p_2, p_3) \mapsto \frac{1}{1 + p_0}(p_1, p_2, p_3) \in D$$

は等長的な 1 対 1 対応を与える。

補題 7.3. 単位球モデルの測地線は、単位球面に直交する円または線分である。

## 7.2 測地線の漸近類

理想境界

定義 7.4. ミンコフスキー空間のベクトル  $w \in L^4$  が零的 (null) であるとは、 $\langle w, w \rangle = 0$  となることである。さらに

$$LC = \{v \in L^4 \mid \langle v, v \rangle = 0\}$$

$$LC_+ = \{v = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in L^4 \mid v_0 > 0\}$$

を  $L^4$  の光錐、正の光錐という。

補題 7.5.  $v, w \in LC_+$  が  $\langle v, w \rangle = 0$  を満たすならば  $v = cw$  をみたす  $c \in \mathbf{R}_+$  が存在する。

補題 7.6.  $p \in H^3, v = T_p H^3, \langle v, v \rangle = 1$  ならば  $p + v \in LC_+$ 。

定義 7.7. 弧長により径数づけられた 2 つの測地線  $\gamma_1, \gamma_2$  が漸近的であるとは

$$\{\text{dist}_{H^3}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \mid t > 0\}$$

が上に有界となることである。このとき  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  と書く。

測地線の漸近類を  $H^3$  の理想境界という：

$$\partial H^3 = \{H^3 \text{ の測地線} \} / \sim .$$

補題 7.8. 式 (7.3) のように表された測地線  $\gamma_{p,v}$  と  $\gamma_{q,w}$  が漸近的であるための必要十分条件は  $\langle p+v, q+w \rangle = 0$  となることである .

したがって

$$\partial H^3 = LC_+ / \mathbf{R}_+$$

である .  $v \in LC_+$  なら  $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$  であるから ,

$$\begin{aligned} LC_+ \ni (v_0, v_1, v_2, v_3) &\mapsto \left( \frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}, \frac{v_3}{v_0} \right) \in S^2 \\ &\mapsto \frac{v_1 + iv_2}{v_0 - v_3} \in \mathbf{C} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

となるが , この写像が誘導する対応  $LC_+ / \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  は全単射

$$(7.8) \quad \iota: \partial H^3 \longrightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

を与える .

上半空間モデルでの理想境界

補題 7.9. 双曲空間の測地線  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$  が漸近的であるための必要十分条件は ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \pi_H \circ \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \pi_H \circ \gamma_2(t)$$

が成り立つことである . ただし  $\pi_H$  は式 (7.5) で与えられる上半空間への射影である .

したがって , 上半空間モデルでは , 理想境界は

$$\partial H = \{(X_1, X_2, 0); X_1, X_2 \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

とみなせる .

単位球モデルでの理想境界

補題 7.10. 双曲空間の測地線  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$  が漸近的であるための必要十分条件は ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \pi_D \circ \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \pi_D \circ \gamma_2(t)$$

が成り立つことである . ただし  $\pi_D$  は式 (7.7) で与えられる単位球への射影である .

したがって , 上半空間モデルでは , 理想境界は

$$\partial H = \{(X_1, X_2, X_3); |X|^2 = 1\} = S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

とみなせる .

### 7.3 $2 \times 2$ 行列での表示

エルミート行列での表示 2 次エルミート行列全体の集合を  $\text{Herm}(2)$  と書く .  $\text{Herm}(2)$  と  $L^4$  を次のように 1 対 1 に対応づける :

$$L^4 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \text{Herm}(2).$$

定義 7.11. 2 次行列  $X$  に対して, その余因子行列を  $\tilde{X}$  と書く:

$$\tilde{X} = \operatorname{tr} X \operatorname{id} - X.$$

補題 7.12. (1) 対応  $X \mapsto \tilde{X}$  は線形.

$$(2) \widetilde{XY} = \tilde{Y}\tilde{X}.$$

$$(3) \tilde{X}X = \det X \operatorname{id}.$$

事実 7.13.  $\operatorname{Herm}(2)$  を  $L^4$  と同一視するとき

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \tilde{X}Y, \quad \langle X, X \rangle = -\det X.$$

等長変換群 行列  $a \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  に対して

$$\tau_a: \operatorname{Herm}(2) \ni X \mapsto aXa^* \in \operatorname{Herm}(2) \quad (a^* = {}^t\bar{a})$$

は  $\operatorname{Herm}(2) = L^4$  の等長変換をあたえている. したがって, 対応する  $\mu_a \in \operatorname{SO}_+(3, 1)$  がただ一つ存在する. すなわち, 準同型

$$\mu: \operatorname{SL}(2, \mathbb{C}) \ni a \mapsto \mu_a \in \operatorname{SO}_+(3, 1)$$

が得られる.

事実 7.14.  $\operatorname{Ker} \mu = \{\pm \operatorname{id}\}$ .

したがって

$$\operatorname{PSL}(2, \mathbb{C}) = \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm \operatorname{id}\} \text{ と } \operatorname{SO}_+(3, 1) \text{ は同型である.}$$

事実 7.15. いままでの同一視の下,

$$\begin{aligned} H^3 &= \{X \in \operatorname{Herm}(2) \mid \det X = 1, \operatorname{tr} X > 0\} \\ &= \{aa^* \mid a \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})\} \\ &= \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})/\operatorname{SU}(2) \end{aligned}$$

である.

とくに,  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{C})$  は  $H^3$  の向きを保つ等長変換がなす群である.

等長変換の理想境界への作用

事実 7.16. 写像  $\iota$  (式 (7.8)) による同一視の下,  $a \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  があたえる  $H^3$  の等長変換は

$$\partial H^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \ni \zeta \mapsto a \star \zeta = \frac{a_{11}\zeta + a_{12}}{a_{21}\zeta + a_{22}} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

のようにして, 理想境界にメビウス変換として作用する.

リーマン球面のメビウス変換全体は,  $S^2$  の向きを保つ共形変換全体の集合と一致するから, 理想境界  $\partial H^3$  には共形構造が入ることになる.

## 7.4 双曲的ガウス写像

ユークリッド空間の曲面

$$f: M^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

の単位法線ベクトル  $\nu$  は単位球面上の点を与えているとみなすことができる。この写像

$$\nu: M^2 \longrightarrow S^2$$

を曲面  $f$  のガウス写像という。曲面のさまざまな重要な性質がガウス写像の性質として述べられる：

定義 7.17. 双曲空間の曲面  $f: M^2 \rightarrow H^3$  の単位法線ベクトル  $\nu$  が与えられているとき，

$$\begin{aligned} G_+ : M^2 \ni x &\longmapsto [\gamma_{p,\nu}] \in \partial H^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \\ G_- : M^2 \ni x &\longmapsto [\gamma_{p,-\nu}] \in \partial H^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

を  $f$  の正の（負の）双曲的ガウス写像 (hyperbolic Gauss map) とよぶ。