2010 年 1 月 13 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

多様体論特論第二 講義資料 8

お知らせ

- 今回で講義は終了です．不規則な時間の中，ご聴講ありがとうございました．

授業に関する御意見

- 来年，単位申告したいので，ぜひ開講してください．
  山田のコメント： 少なくとも後期は開講します．お待ちしております．
- 楽しい授業でした．また先生の授業を受けたいです．ありがとうございました．
  山田のコメント： こちらこそありがとうございました．来年度も（少なくとも後期には）開講いたしますので，よろしければご聴講ください．

質問と回答

質問： Bryant の証明の流れがいまいちわからない．

お答え： 申し訳ありません．すこし早く説明しすぎたようですね．適合枠 Θ をとると，曲面（はめこみ）f は $f=\Theta\Theta^*$ とかける．ここで Θ は等温座標系からくる複素座標に関して正則とはかぎらないが，$\mathrm{SU}(2)$ に値をもつ行列値関数 X で $F=\Theta X$ が正則となるものを探そう．そのような X が存在するための必要十分条件が $H=1$ となること．というわけです．（やはりわかりにくいですよね）．

質問： 単連結という条件があると色々物事がうまくいくことが多く，単連結という条件を思いついた人はスゴイと思った．

お答え： だから，単連結でない，大域的な問題はおもしろいと思うのです．

8 正則な双曲的ガウス写像

8.1 準備

■双曲空間の曲面の適合枠 3 次元双曲空間 H^3 の曲面を，局所的に $\boldsymbol{R}^2$ の領域 Δ から 4 次元ミンコフスキー空間 L^4 の部分集合としての H^3 へのはめ込み

$$f\colon \Delta \ni (u,v) \longmapsto f(u,v) \in H^3 \subset L^4$$

とパラメータ表示しておく．とくに f はベクトル値関数と思うことができる．以下

$$\boldsymbol{e}_0 := f\colon \Delta \longrightarrow L^4 \qquad \langle \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_0\rangle = -1 \tag{8.1}$$

としておく．曲面 f の単位法線ベクトル場を ν とすると，各点 $p \in \Delta$ で $\nu(p)$ は $f(p)$ に直交する単位ベクトルである．これを

$$\boldsymbol{e}_3 := \nu\colon \Delta \longrightarrow L^4, \qquad \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3\rangle = 1, \quad \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{0}}\rangle = 0 \tag{8.2}$$

と書くことにする．すると，各点 p に対して

$$\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \in \mathrm{SO}_+(3,1)$$

となるようなベクトル値関数 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が存在する．このような $\mathcal{F}$ を曲面の**適合枠**という．

単位法線ベクトル ν を一つ固定しておけば，適合枠のとりかたは

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \mapsto (\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

だけの自由度がある．ただし θ は Δ 上で定義された実数値関数である．

■2 次正方行列による表示 以下，L^4 を 2 次エルミート行列全体の集合 $\mathrm{Herm}(2)$ と同一視する：

$$L^4 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix^2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2).$$

講義資料 2 で述べたように，L^4 の等長変換群 $\mathrm{SO}_+(3,1)$ の作用は

$$L^4 = \mathrm{Herm}(2) \ni X \longmapsto aXa^* \qquad \bigl(a \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})\bigr)$$

と表される．とくに $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ と $\mathrm{SO}_+(3,1)$ の間には 2 対 1 の対応がある．そこで，曲面の適合枠 $\mathcal{F}\colon \Delta \to \mathrm{SO}_+(3,1)$ に対応する $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ 値写像

$$\Theta\colon \Delta \longmapsto \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$$

を考え，これも曲面の適合枠と呼ぶことにする．すると（ベクトルを 2 次エルミート行列とみなして）

$$\boldsymbol{e}_j = \Theta\varepsilon_j\Theta^* \qquad \Theta^* = {}^t\overline{\Theta} \qquad (j = 0,1,2,3) \tag{8.4}$$

が成り立つ．ただし

$$\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2010 年 1 月 13 日

である．とくに

$$f = \Theta\Theta^*, \qquad \nu = \Theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Theta^*$$

である．

■双曲的ガウス写像　曲面の位置ベクトル f と単位法線ベクトル ν との和 $f \pm \nu$ は，自分自身との内積が 0 となるベクトルである．とくに，その同値類

$$G_\pm := [f \pm \nu] \colon \Delta \longrightarrow \Lambda_+/\boldsymbol{R}_+ = \partial H^3$$

は**双曲的ガウス写像**と呼ばれる．ただし

$$\Lambda_+ = \{\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3) \in L^4\,;\, \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0, v_0 > 0\}$$

は正の光円錐で，$\boldsymbol{R}_+$ はそこにスカラ倍として作用している．この作用によって

(8.5) $$\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3) \qquad \text{は} \qquad (1, V_1, V_2, V_3) = \left(1, \frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}, \frac{v_3}{v_0}\right)$$

と移り合うが，$\boldsymbol{v} \in \Lambda_+$ であることから $(V_1, V_2, V_3) \in S^2 \subset \boldsymbol{R}^3$ となる．そこで，単位球面の南極からの立体射影を用いて

$$\partial H^3 = \Lambda_+/\boldsymbol{R}_+ \ni [\boldsymbol{v}] \longmapsto \frac{1}{1 - V_3}(V_1 + iV_2) = \frac{v_1 + iv_2}{v_0 - v_3} \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

によって，H^3 の理想境界 ∂H^3 をリーマン球面と同一視する．すると，双曲的ガウス写像は

(8.6) $$G_\pm \colon \Delta \longrightarrow \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

とみなすことができる．

補題 8.1. 適合枠 Θ を，Δ 上で定義された複素数値関数 A, B, C, D

(8.7) $$\Theta = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} \qquad (AD - BC = 1)$$

とかけば，(8.6) の双曲的ガウス写像は

$$G_+ = \frac{A}{C}, \qquad G_- = \frac{B}{D}$$

と表すことができる．

証明. ベクトル $\boldsymbol{v} := f + \nu$ を

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}v_0 + v_3 & v_1 + iv_2\\ v_1 - iv_2 & v_1 - v_3\end{pmatrix}$$

と表しておく．(8.4) より

$$\boldsymbol{v} = f + \nu = 2\Theta\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Theta^* = 2\begin{pmatrix}A\overline{A} & A\overline{C}\\ C\overline{A} & C\overline{C}\end{pmatrix}$$

と表されるから，(8.5) から

$$[\boldsymbol{v}] = \frac{v_1 + iv_2}{v_0 - v_3} = \frac{A\overline{C}}{C\overline{C}} = \frac{A}{C}$$

を得る．反対方向の双曲的ガウス写像も同様. □

■基本形式　曲面の位置ベクトル f のパラメータに関する偏微分 f_u, f_v は f と ν に直交するベクトルであるから $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の線形結合で表すことができる．また，単位法線ベクトルの微分 ν_u, ν_v も f と ν に直交するから

$$(f_u, f_v) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)S, \qquad (\nu_u, \nu_v) = -(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)T \tag{8.8}$$

を満たす 2 次実正方行列値の関数 S, T が存在する．以下

$$S = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

と表しておく．すると

補題 8.2. 曲面 f の第一，第二，第三基本形式の，座標系 (u, v) に関する表現行列 $\widehat{I}$, $\widehat{II}$, $\widehat{III}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\widehat{I} &= \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u\rangle & \langle f_u, f_v\rangle \\ \langle f_v, f_u\rangle & \langle f_v, f_v\rangle \end{pmatrix} = {}^tSS \\
\widehat{II} &= -\begin{pmatrix} \langle f_u, \nu_u\rangle & \langle f_u, \nu_v\rangle \\ \langle f_v, \nu_u\rangle & \langle f_v, \nu_v\rangle \end{pmatrix} = {}^tST \\
\widehat{III} &= \begin{pmatrix} \langle \nu_u, \nu_u\rangle & \langle \nu_u, \nu_v\rangle \\ \langle \nu_v, \nu_u\rangle & \langle \nu_v, \nu_v\rangle \end{pmatrix} = {}^tTT
\end{aligned}$$

と表される．

とくに，$\widehat{II}$ は対称行列だったから（$\widehat{I}$, $\widehat{III}$ の対称性は自明），

補題 8.3. 式 (8.8) で定義される行列 S, T は

$${}^tST = {}^tTS$$

を満たす．とくに

$$s_1^1 t_2^1 + s_1^2 t_2^2 = t_1^1 s_2^1 + t_1^2 s_2^2 \tag{8.10}$$

が成り立つ．

とくに，曲面のガウス曲率 K と平均曲率 H は

$$K = \frac{\det \widehat{II}}{\det \widehat{I}} - 1 = \frac{\det T - \det S}{\det S}, \qquad H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \widehat{I}^{-1}\, \widehat{II} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S^{-1}T \tag{8.11}$$

で与えられる．

■基本方程式

補題 8.4. 適合枠の各列ベクトルに相当するベクトル $\boldsymbol{e}_j$ （式 (8.4)）は

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_0)_u &= s_1^1\boldsymbol{e}_1 + s_1^2\boldsymbol{e}_2, & (\boldsymbol{e}_0)_v &= s_2^1\boldsymbol{e}_1 + s_2^2\boldsymbol{e}_2, \\
(\boldsymbol{e}_1)_u &= s_1^1\boldsymbol{e}_0 - \alpha\boldsymbol{e}_2 + t_1^1\boldsymbol{e}_3, & (\boldsymbol{e}_1)_v &= s_2^1\boldsymbol{e}_0 - \beta\boldsymbol{e}_2 + t_2^1\boldsymbol{e}_3, \\
(\boldsymbol{e}_2)_u &= s_1^2\boldsymbol{e}_0 + \alpha\boldsymbol{e}_1 + t_1^2\boldsymbol{e}_3, & (\boldsymbol{e}_2)_v &= s_2^2\boldsymbol{e}_0 + \beta\boldsymbol{e}_1 + t_2^2\boldsymbol{e}_3, \\
(\boldsymbol{e}_3)_u &= -t_1^1\boldsymbol{e}_1 - t_1^2\boldsymbol{e}_2, & (\boldsymbol{e}_3)_v &= -t_2^1\boldsymbol{e}_1 - t_2^2\boldsymbol{e}_2
\end{aligned}$$

を満たす．ここで α, β は f の定義域上で定義された実数値関数である．

系 8.5. $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ に値をとる適合枠 Θ は

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u} = \Theta U, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial v} = \Theta V, \tag{8.12}$$

を満たす．ただし

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\alpha & s_1^1 + t_1^1 + i(s_1^2 + t_1^2) \\ s_1^1 - t_1^1 - i(s_1^2 - t_1^2) & i\alpha \end{pmatrix}, \\ V &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\beta & s_2^1 + t_2^1 + i(s_2^2 + t_2^2) \\ s_2^1 - t_2^1 - i(s_2^2 - t_2^2) & i\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.13}$$

である．

系 8.6. 以上の記号のもと，

$$-\alpha_v + \beta_u = \det T - \det S$$

が成り立つ．

証明. 方程式 (8.12) の両立条件

$$U_v - V_u = UV - VU$$

の左上の成分を比較し，補題 8.3 を用いればよい． □

以下，簡単のため

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\alpha & b \\ c & \frac{i}{2}\alpha \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\beta & q \\ r & \frac{i}{2}\beta \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

と書いておく．

補題 8.7. 双曲的ガウス写像 G_+, G_- の微分は

$$(G_+)_u = \frac{-c}{C^2}, \qquad (G_+)_v = \frac{-r}{C^2}, \qquad (G_-)_u = \frac{b}{D^2}, \qquad (G_-)_v = \frac{q}{D^2} \tag{8.15}$$

で与えられる．ただし，C, D は (8.7) で与えられる適合枠 Θ の成分，b, c, q, r は (8.14) で与えられる基本方程式の成分である．

証明. 補題 8.1 と (8.4), (8.14) を用いて $AD - BC = 1$ に注意すればよい． □

以下，α, β を係数にもつ Δ 上の一次微分形式を ω と書く[*1]：

$$\omega = \alpha\,du + \beta\,dv. \tag{8.16}$$

補題 8.8. 式 (8.3) で $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を $\{\tilde{e}_1, \tilde{e_2}\}$ に取り替えると，(8.16) の ω は

$$\tilde{\omega} = \omega - d\theta$$

と変化する[*2]．

[*1] 接続の理論を知っている方は，SU(2) に値をとる $\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ が，曲面の誘導接続の，枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式である．

[*2] 誘導接続のゲージ変換．

8.2 双曲的ガウス曲率が座標となる条件

前の節の記号をそのまま用いる.

命題 8.9. 点 $p \in \Delta$ において双曲的ガウス写像 G_+ と G_- がともに局所微分同相でないための必要十分条件は，ガウス曲率が $K(p) = 2$, 平均曲率が $H(p) = 0$ となることである.

証明. 簡単のため G_+, G_- は p で無限遠点に値をとらないとし，これらを $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}^2$ への写像とみなす．このとき，G_+ が局所微分同相でないことは $\{(G_+)_u, (G_+)_v\}$ が線形従属であることと同値であるが，これは

$$\operatorname{Im}\bigl\{(G_+)_u\overline{(G_+)_v}\bigr\} = 0$$

と同値．補題 8.7 と式 (8.13), (8.14), (8.11) から，上の条件は

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\bigl\{(G_+)_u\overline{(G_+)_v}\bigr\} &= \frac{1}{|C|^4}\bigl\{\det S + \det T + (s_1^2t_2^1 + t_1^2s_2^1 - t_1^1s_2^2 - s_1^1t_2^2)\bigr\}\\ &= \frac{1}{|C|^4}\bigl\{\det S + \det T - \det S \operatorname{tr} S^{-1}T\bigr\}\\ &= \frac{\det S}{|C|^4}(K + 2 - 2H) = 0\end{aligned}$$

と同値である．同様にして G_- が局所微分同相写像にならないための必要十分条件は

$$\frac{\det S}{|D|^4}(K + 2 + 2H) = 0$$

と同値．二つのガウス写像の値が無限遠点でないことから $C, D \neq 0$, f がはめ込みであることから $\det S \neq 0$ だから結論が得られる. □

8.3 正則な双曲的ガウス写像をもつ曲面

事実 8.10. 曲面 $f\colon \Sigma \to H^3$ の双曲的ガウス写像 G_+ が f の第一基本形式から定まる等温座標系に対応する複素構造に関して正則であるための必要十分条件は f の平均曲率が 1 となることである.[*3]

この事実第 5, 6 回の講義で紹介した Bryant の表現公式はこの事実に深く関係している.

今回は，別の状況を考える．曲面上に $K = -2$, $H = 0$ となる点が一つもないとすると，命題 8.9 から，曲面上の各点の近傍で G_- か G_+ の少なくとも一方は曲面の（複素）座標を定める．いま，曲面上の点 p の近傍で G_- が局所座標を与えているとし

$$z = x + iy = G_- \tag{8.17}$$

と書いておく.

命題 8.11. 双曲的ガウス写像 G_+ が式 (8.17) で与えられる座標 z に関して正則であるための必要十分条件は

$$\det T = \det S, \qquad \text{すなわち} \qquad K = 0$$

となることである.

*3 Σ の向きに関して微妙な議論が必要.

証明. 座標のとり方 (8.17) と (8.15) から

$$x_u + iy_u = (G_-)_u = \frac{b}{D^2}, \qquad x_v + iy_v = (G_-)_v = \frac{q}{D^2}$$

が成り立っている．ここで，逆関数の微分公式から

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} y_v & -x_v \\ -y_u & x_u \end{pmatrix} \qquad \delta = x_u y_v - x_v y_u = \operatorname{Im}\overline{(G_-)_u}(G_-)_v \tag{8.18}$$

なので，(8.15) を用いれば

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial G_+}{\partial z} &= \frac{\partial G_+}{\partial x} + i\frac{\partial G_+}{\partial y} \\ &= u_x\frac{\partial G_+}{\partial u} + v_x\frac{\partial G_+}{\partial v} + i\left(u_y\frac{\partial G_+}{\partial u} + v_y\frac{\partial G_+}{\partial v} +\right) \\ &= \frac{1}{\delta}\left\{(y_v - ix_v)\frac{\partial G_+}{\partial u} - (y_u - ix_v)\frac{\partial G_+}{\partial v}\right\} \\ &= \frac{-i}{\delta}\left(\frac{\partial G_-}{\partial v}\frac{\partial G_+}{\partial u} - \frac{\partial G_-}{\partial v}\frac{\partial G_+}{\partial u}\right) = \frac{-i}{\delta CD}(-cq + br) \end{aligned}$$

となる．したがって G_+ が z の正則関数であるための必要十分条件は

$$cq = br \tag{8.19}$$

となることである．(8.13), (8.14) からこのことは $\det T = \det S$ であることと同値である． □

とくに $K = 0$ の曲面（平坦な曲面）は命題 8.9 から各点の近傍で G_-, G_+ の少なくとも一方は局所座標系を与えるから，

系 8.12. 3 次元双曲空間の平坦な曲面にはリーマン面の構造を入れることができ，2 つの双曲的ガウス写像 G_+, G_- はその複素構造に関して正則写像となる．

系 8.13. 3 次元双曲空間の単連結な平坦曲面に上のようにリーマン面の構造を与えたとき，その複素構造に関して正則な適合枠 Θ をとることができる．

証明. 一つ適合枠 Θ をとっておく．このとき $\det S = \det T$ であるから (8.6) より (8.16) の微分形式 ω は $d\omega = 0$ を満たす．したがってポアンカレの補題から $\omega = d\theta$ となるような関数 θ が存在するが，その θ によって，接平面の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を (8.3) のように変換すると，ω は $\tilde{\omega} = \omega - d\theta = 0$ に変化する．したがって，最初から $\omega = 0$ ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) として一般性を失わない．

このとき，方程式 (8.12) は，(8.14) の記号を用いて

$$\Theta_u = \Theta\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Theta_v = \Theta\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

とかける．したがって $z = G_-$ を座標系とするとき (8.18) を用いて

$$2\frac{\partial\Theta}{\partial\bar{z}} = \Theta_x + i\Theta_y = \frac{-i}{\delta}\Theta\left((G_-)_v\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} - (G_-)_u\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}\right)$$

となるが，(8.15) と条件 (8.19) からこれは 0 になるので結論が得られた． □

8.4 双曲空間の平坦曲面

いままで見たことより，双曲空間の $K = 0$ となる曲面は特別な性質をもつことがわかる．とくに，ユークリッド空間の極小曲面や双曲空間の $H = 1$ となる曲面のように，複素解析的なデータを用いて曲面を表す「ワイエルストラス型表現公式」が知られている [GMM].

一方，双曲空間の完備な平坦曲面はホロ球面と円柱面しかないこともよく知られている．ところで，この節での議論で f がはめ込みである条件 ($\det S = 0$) は命題 8.9 の証明の中くらいでしか用いていない．これは表現公式に直接影響がないので

はめ込みでなくても，適合枠さえ定義できれば「平坦な曲面」の表現公式が成り立つ

ことがわかる．このような立場である種の特異点をもつ平坦な曲面の大域的な性質を調べることができ，このような対象が数学的に豊かなものであることが最近分かってきた [KUY], [KRSUY], [KRUY1], [KRUY2].

参考文献

[KUY] M. Kokubu, M. Umehara and Y, Pacific J. Math., vol. 216 (2004), 149–175.

[KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and Y, Pacific J. of Math., vol 221 (2005) 303–351.

[KRUY1] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and Y, Journal of Math. Soc. Japan, vol 59 (2007), 265–299.

[KRUY2] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and Y, Journal of Math. Soc. Japan, vol 61 (2009), 119–139.

[GMM] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, Math. Ann. vol. 316 (2000), 419–435.

[R] P. Roitman, Tôhoku Math. J. vol. 59 (2007), 21–37.