2009 年 4 月 23 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

MMA 講究 A 資料 2

お知らせ

- コンピュータの手配が遅れているようですので，今回は，実習ではなく課題の説明（講義）を致します．
- コンピュータ手配状況により授業内容（方針）が多少変わる可能性はありますが，大きな変更はしないつもりです．
- 次回は 5 月 14 日（木曜日）です．間が開きますが，課題をだしておきます．

2　平面曲線の基本定理

2.1　弧長パラメータと曲率

■弧長パラメータ　平面曲線の正則なパラメータ表示とは，$\boldsymbol{R}$ の区間 I 上で定義された微分可能な写像

$$\gamma\colon I \ni t \longrightarrow \gamma(t) = {}^t\bigl(x(t), y(t)\bigr) \in \boldsymbol{R}^2$$

で $\dot\gamma(t)$ （$\dot{} = d/dt$ が $\mathbf{0}$ にならないもののことである．定義域 I の点 t_0 を固定し，

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \dot\gamma(u)\,du$$

とおけば，s は単調増加，とくに $\dot s > 0$ だから逆関数 $t = t(s)$ が存在する．そこで $\tilde\gamma(s) := \gamma\bigl(t(s)\bigr)$ とすると，これは同じ曲線のパラメータ表示で，$d\tilde\gamma/ds$ が単位ベクトルになる，すなわち単位速さの表示を与えている．このように

> 正則な曲線のパラメータ表示が与えられたとき，そのパラメータを変更して，同じ曲線の単位速さのパラメータ表示を与えることができる．

単位速さのパラメータ表示を**弧長パラメータ表示**とよぶ．

■曲率　平面曲線の弧長パラメータ表示 $\gamma(s)$ に対して

$$\boldsymbol{e}(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s)$$

は単位ベクトルに値をもつ関数となる．そこで $\boldsymbol{e}(s) = \bigl(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\bigr)$ とおき，

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$$

とすると κ は s の可微分関数である．これを曲線 $\gamma(s)$ の曲率という．

2009 年 4 月 23 日

2.2 曲線論の基本定理

定理 2.1. 二つの曲線の弧長パラメータ表示 $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(s)$ が同じ曲率をもつならば，それらは $\boldsymbol{R}^2$ の回転と平行移動で移りあう.

定理 2.2. 区間 $I \subset \boldsymbol{R}$ 上で定義された可微分関数 $\kappa(s)$ に対して，弧長によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s)$ $(s \in I)$ で曲率が κ となるものが存在する.

証明. 区間 I 上の点 s_0 を固定し

$$\gamma(s) = {}^t\left(\int_{s_0}^s \cos\theta(t)\,dt, \int_{s_0}^s \sin\theta(t)\,dt\right), \qquad \theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(t)\,dt$$

とおけばよい. □

2.3 閉曲線

一周してなめらかに元に戻ってくる**閉曲線**は，周期的なパラメータ表示

$$\gamma(s) \qquad \gamma(s+L) = \gamma(s)$$

をもつ．ただし L は正の定数で，曲線「一回り分」の長さに相当する．このような閉曲線の曲率 $\kappa(s)$ は，また周期 L の周期関数である.

命題 2.3. 周期 L のなめらかな周期関数 $\kappa(s)$ に対してそれを曲率にもつ曲線 $\gamma(s)$ とすると，

$$\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{b}$$

となる行列式正の 2 次直交行列 A と $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ が存在する.

本日の宿題

1 曲率が $\kappa(s) = s$（s は弧長）で与えられる曲線を図示しなさい．とくに $s \to \pm\infty$ のとき，曲線はどのように振る舞うか.

2 周期 L をもつなめらかな関数 $\kappa(s)$ に対応する曲線 $\gamma(s)$ が，周期 L の閉曲線になるための条件を求めなさい.

3 定数 a に対して $\kappa(s) = a\cos s$ とおく．曲率が $\kappa(s)$ となる曲線 $\gamma(s)$ が周期 2π の閉曲線となるような a の値が存在することを示し，その近似値を求めなさい.

4 問題 **3** の曲線を図示しなさい.

■課題 以上の問題に解答し，レポートの形にして提出しなさい.

- 提出は電子メイルによること．宛先は，山田と TA の野瀬さん.
- 最初なので（皆さんがどのように対応するか見たいので）形式は自由.
- 締切は 2009 年 5 月 11 日（月）.