2009 年 6 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.kyushu-u.ac.jp

MMA 講究 A 資料 8

お知らせ

- 授業の web ページです：
  http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/class/2009/mma/
  http://www.official.kotaroy.com/class/2009/mma/
- 前回，Gnu Octave の新しいバージョンでのプロットについてご質問をいただきましたが，
  http://www.obihiro.ac.jp/ suzukim/masuda/octave/html3/octave.html
  にマニュアルがあるようです．関連する情報は 15.2 節だと思います．

8　剱持による回転面の公式 (2)

8.1　平面曲線（復習）

弧長 s によりパラメータづけられた平面曲線

$$\gamma(s) = \bigl(x(s), z(s)\bigr) \qquad \bigl((x')^2 + (z')^2 = 1\bigr) \tag{8.1}$$

に対して，その速度ベクトルと左向き単位法線ベクトルを

$$\boldsymbol{e}(s) = \gamma'(s) = \bigl(x'(s), z'(s)\bigr), \qquad \boldsymbol{n}(s) = \bigl(-z'(s), x'(s)\bigr) \qquad \left({}' = \frac{d}{ds}\right)$$

と書くと，

$$\mathcal{F}(s) = \bigl(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\bigr) = \begin{pmatrix} x'(s) & -z'(s) \\ z'(s) & x'(s) \end{pmatrix}$$

は，SO(2) に値を持つ滑らかな s の関数である．ただし

$$\mathrm{SO}(2) = [2\text{ 次直交行列で行列式が }1\text{ となるもの全体}]$$

である．これを曲線 γ の**フレーム**（枠）と呼ぶ．

恒等式 $|\boldsymbol{e}|^2 = 1$ を微分すれば，加速度ベクトル $\boldsymbol{e}'(s) = \gamma''(s)$ は，$\boldsymbol{e}(s)$ に直交することがわかるので，$\boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ を満たす関数 $\kappa(s)$ が存在する．これを曲線 γ の**曲率**または曲率関数という．同様に $\boldsymbol{n}'(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ に直交するので，$\boldsymbol{n}'$ は $\boldsymbol{e}$ と平行になるが，恒等式 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e} = 0$ を微分して曲率の定義式を用いれば $\boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e}$ であることがわかる．すなわち

$$\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e}. \tag{8.2}$$

2009 年 6 月 25 日

これを**フルネの方程式**という．フレーム $\mathcal{F}$ を用いれば，フルネの方程式は

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

と書くことができる．これを用いて次のことを示すことができる：

補題 8.1. 弧長によりパラメータづけられた 2 つの平面曲線 γ_1, γ_2 が共通の曲率関数をもつならば，これらの曲線は回転と平行移動で移りあう．すなわち，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ が存在して

$$\gamma_2(s) = A\gamma_1(s) + \boldsymbol{b}$$

が成り立つ．

さて，区間 I 上で定義された滑らかな関数 $\kappa(s)$ に対して

$$\gamma(s) := \left(\int_{s_0}^{s}\left(\cos\int_{s_0}^{u}\kappa(t)\,dt\right)du, \int_{s_0}^{s}\left(\sin\int_{s_0}^{u}\kappa(t)\,dt\right)du\right) \tag{8.4}$$

とおけば，s は γ の弧長パラメータで，γ の曲率は κ となる．ここで $s_0 \in I$ は I のひとつの固定点である．したがって，次が成り立つ．

定理 8.2 (曲線論の基本定理)**.** 区間 I 上で定義された滑らかな関数 $\kappa(s)$ に対して $\kappa(s)$ を曲率関数とするような，弧長をパラメータとした曲線 $\gamma\colon I \to \boldsymbol{R}^2$ が，回転と平行移動（$\boldsymbol{R}^2$ の運動）をのぞいて一意的に存在する．

8.2 与えられた平均曲率をもつ回転面（復習）

弧長 s によりパラメータづけられた平面曲線

$$\gamma(s) = \big(x(s), z(s)\big) \qquad \big((x')^2 + (z')^2 = 1\big)$$

を x 軸の回りに回転して得られる回転面

$$f_\gamma(\theta, s) := \big(x(s), z(s)\cos\theta, z(s)\sin\theta\big) \tag{8.5}$$

を考えるすると，主曲率，ガウス曲率，平均曲率はいずれも s のみの関数で，

$$\lambda_1 = \frac{z''}{x'} = -\frac{x''}{z'} = \kappa, \qquad \lambda_2 = -\frac{x'}{z}, \qquad H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{8.6}$$

となる．ただし κ は曲線 γ の曲率関数である．

逆に s の関数 $H(s)$ が与えられたときに，それを平均曲率にもつような回転面の母線 $\gamma(s)$ を求めたい．

定理 8.3 (剱持 [2], [1, 41 ページ])**.** 区間 I で定義された連続関数 H に対して

$$\gamma(s) := \left(\int_{s_0}^{s}\frac{\big(G(t)+c_2\big)F'(t) - \big(F(t)-c_1\big)G'(t)}{\sqrt{\big(F(t)-c_1\big)^2 + \big(G(t)+c_2\big)^2}} + c_3, \sqrt{\big(F(t)-c_1\big)^2 + \big(G(t)+c_2\big)^2}\right)$$

は s を弧長とする曲線のパラメータ表示で，この曲線から (8.5) によって得られる回転面の平均曲率は $H(s)$ である．ただし，

$$F(s) = \int_{s_0}^{s}\sin\left(2\int_{s_0}^{u}H(t)\,dt\right)du, \quad G(s) = \int_{s_0}^{s}\cos\left(2\int_{s_0}^{u}H(t)\,dt\right)du,$$

$s_0 \in I$ は I のある定点，c_1, c_2, c_3 は定数である．

この定理の証明は，劔持 [K] の 39 ページくらいにあるが，ここではこの定理を別の形に書き直し，別の（本質的には同じ）証明を与える．鍵は，$F(s)$, $G(s)$ の表示式が，曲率から平面曲線を求める式 (8.4) に “似ている” ことである：

定理 8.4 (前田 [4])**.** 式 (8.1) で表される曲線 γ から (8.5) によって得られる回転面の平均曲率が $H(s)$ ならば，曲率 $2H(s)$ の平面曲線

$$\sigma(s) = \bigl(\xi(s), \eta(s)\bigr)$$

が存在して

$$x(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\xi'(u)\eta(u) - \xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{\bigl(\xi(u)\bigr)^2 + \bigl(\eta(u)\bigr)^2}}\, du + c, \qquad z(s) = \sqrt{\bigl(\xi(s)\bigr)^2 + \bigl(\eta(s)\bigr)^2} \tag{8.7}$$

とかける．ただし c は定数である．

逆に，このようにして得られる曲線 $\gamma(s) = \bigl(x(s), z(s)\bigr)$ から得られる回転面の平均曲率は $H(s)$ である．

参考文献

[1] 劔持勝衛，曲面論講義—平均曲率一定曲面入門，培風館，2000.
第 3 章に回転面の公式が与えられている．

[2] K. Kenmotsu, *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tôhoku Math. J., **32** (1980) 147–153.

[3] K. Kenmotsu, *Surfaces of revolution with periodic mean curvature*, Osaka J. Math., **40** (2003), no. 3, 687–696.

[4] 前田俊一「あたえられた平均曲率をもつ回転面の構成について」，修士学位論文，2003，九州大学数理学府.

本日の宿題

1 定理 8.4 の証明（授業で紹介する）を（メモではなく）きちんと読める形に復元しなさい．

2 定理 8.4 を定数関数 $H = 0$ に対して適用して得られる曲線 $(x(s), y(s))$ は直線あるいは懸垂線であることを示しなさい．

■課題　きちんとしたレポートにする必要はありませんが，「判読可能」な証明を書いてください．図は適当なファイル形式で添付してください．

- 提出は電子メイルによること．宛先は，山田と TA の野瀬さん．
- 締切は 2009 年 7 月 1 日（水）．