MMA 講究 A
担当：山田光太郎先生

MMA 講究 A　第 1 回課題レポート

学籍番号:2MA09055R
氏名　大平規史

問題

1. 曲率 $\kappa(s) = s(s$ は弧長) で与えられる曲線を図示しなさい。特に $s \to \infty$ の時の曲線はどのように振る舞うか
2. 周期 L を持つなめらかな関数 $\kappa(s)$ に対応する曲線 $\gamma(s)$ が、周期 L の閉曲線になるための条件を求めなさい。
3. 定数 a に対して $\kappa(s) = a\cos(s)$ とおくと、曲率 $\kappa(s)$ となる曲線 $\gamma(s)$ が周期 2π の閉曲線となるような a の値が存在することを示し、その近似値を求めなさい。
4. (3) の曲線を図示しなさい。

回答 (1);

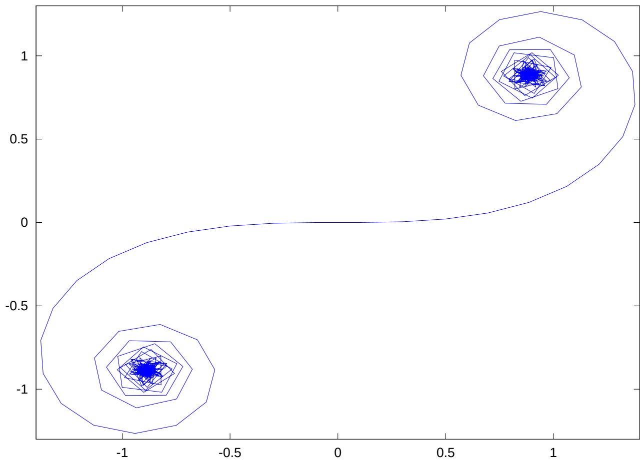

図 1: 曲率 $\kappa(s) = s(s$ は弧長) で与えられる曲線 ($clothoid$)

この図は $gnuplot$ で可視化をしています。
s の範囲は -90 から 90 で分割は 900 で動かしました。
が、見てもわかるように滑らかな曲線とは言えず、また縦と横の 1 メモリの比があっていない。
なぜ、滑らかな曲線でないかというと、分割 900 で s の範囲が -90 から 90 だと、曲線を形成している 1 つの線分の長さが 0.2 だからである。この線分の長さをなるべく小さくしていけば滑らかな $clothoid$ が出来る。
そこで、上の図を滑らかにして、なおかつ縦と横の 1 メモリの比を 1 : 1 にした改良版を図示した。それが次のページの図である。

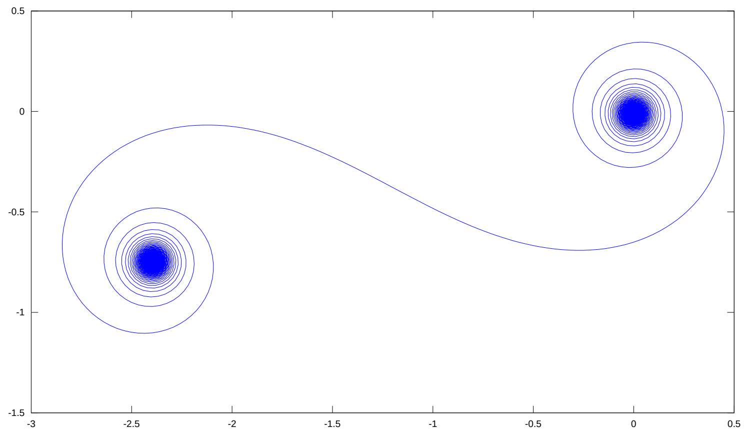

図 2: 改良版の *clothoid*

この図も *gnuplot* で図示してます。
この改良版 *clothoid* は s の範囲を -90 から 90 と図 1 と変わりないのだが、
分割を 5001 にして、なおかつ縦と横の 1 メモリの比を 1 : 1 にした。
この結果、滑らかな *clothoid* になりきれいに仕上がったと思う。

回答 (2);
今、周期 L とすると $\kappa(s)$ は次のように書ける。

$$\kappa(s+L) = \kappa(s)$$

次に $\kappa(s)$ に対応する曲線 $\gamma(s)$ を考える。
$\gamma(s)$ は次のように書ける。

$$\gamma(s) = (x(s), y(s))$$

ただし

$$x(s) = \int_0^s \cos\theta(t)dt \qquad , \qquad y(s) = \int_0^s \sin\theta(t)dt$$

特に $\theta(s)$ は

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt$$

ここで $x(s+L)$ を求める。

$$x(s+L) = \int_0^{s+L} \cos\theta(t)dt = \int_0^L \cos(\theta(t))dt + \int_L^{s+L} \cos\theta(t)dt$$

となり、右辺第二項を $t = u + L$ で変数変換を行うと

$$x(s+L) = \int_0^{s+L} \cos\theta(t)dt = \int_0^L \cos(\theta(t))dt + \int_0^s \cos\theta(u+L)du \tag{1}$$

となるが $\theta(u+L)$ を具体的に計算していないので、してみようと思う。

$$\theta(u+L) = \int_0^{u+L} \kappa(t)dt = \int_0^L \kappa(t)dt + \int_L^{u+L} \kappa(t)dt \tag{2}$$

ここで右辺第二項を $t = v + L$ で変数変換すると

$$\int_L^{u+L} \kappa(t)dt = \int_0^u \kappa(v+L)dv$$

となるので κ は周期関数より $\kappa(v+L) = \kappa(v)$ となり

$$\int_0^u \kappa(v+L)dv = \int_0^u \kappa(v)dv$$

となる。なので (2) は次のように書ける。

$$\theta(u+L) = a + \int_0^u \kappa(v)dv$$

ただし、

$$a = \int_0^L \kappa(t)dt$$

よって $\theta(u+L)$ の具体的な式が求まったので (1) に代入すると

$$x(s+L) = \int_0^L \cos(\theta(t))dt + \int_0^s \cos(\theta(u)+a)du$$

になる。加法定理より右辺第二項は

$$\begin{aligned}\int_0^s \cos(\theta(u)+a)du &= \int_0^s \{\cos\theta(u)\cos(a) - \sin\theta(u)\sin(a)\}du \\ &= \cos(a)\int_0^s \cos\theta(u)du - \sin(a)\int_0^s \sin\theta(u)du\end{aligned}$$

よって $x(s+L)$ は次のようになる。

$$x(s+L) = b_1 + \cos(a)x(s) - \sin(a)y(s)$$

ただし b_1 は

$$b_1 = \int_0^L \cos(\theta(t))dt$$

同様に $y(s+L)$ を計算すると

$$y(s+L) = b_2 + \sin(a)x(s) + \cos(a)y(s)$$

になる。よって $\gamma(s+L)$ は

$$\gamma(s+L) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \gamma(s)$$

と書くことが出来る。なので、$\gamma(s)$ が周期 L を持つ条件は

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} = E$$

である。

回答 (3);
今、曲線 $\gamma(s)$ が周期 2π を持つので $\gamma(s+2\pi)$ は

$$\gamma(s+2\pi) = (\int_0^{s+L} \cos\theta(t)dt, \int_0^{s+L} \sin\theta(t)dt) = \gamma(s) + (\int_0^{2\pi} \cos\theta(t)dt, \int_0^{2\pi} \sin\theta(t)dt)$$

$\gamma(s+2\pi)$ の第二成分 $\int_0^{2\pi} \sin\theta(t)dt$ は奇関数なので 0 である。なので考えるのは $\int_0^{2\pi} \cos\theta(t)dt$ が 0 になるとき $\theta(t)$ の中に含まれる a が存在するかということである。$\kappa(s) = a\cos(s)$ という条件が与えられているので、$\theta(t)$ を計算すると、

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt = \int_0^s a\cos(t)dt = a\sin(s)$$

になるので $\int_0^{2\pi} \cos\theta(t)dt$ は

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta(t)dt = \int_0^{2\pi} \cos(a\sin(s))dt$$

になる。この a が存在することを証明するためには $f(a) = \int_0^{2\pi} \cos(a\sin(s))dt$ と置いて、式変形をして中間値の定理を使うらしいが、これ以降の証明はできなかった.

回答 (4);

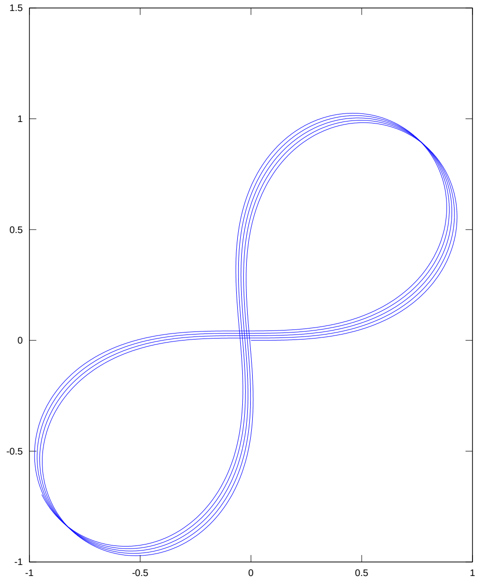

図 3: $a = 2.4$ のときの曲線

とりあえず、図 3 が答えになるのだが、その経緯を示しておこう。
(図は次のページ参照)
まず $a = 2$ と $a = 3$ を比較すると、$a = 3$ には交わりがあり $a = 2$ にはないということがわかる。なのでその間の数で図を描いてみると $a = 2.2$ と $a = 2.6$ のはとても似ているがまだ閉曲線にはなっていない。
で、その半分の $a = 2.4$ だとやっと閉曲線が現れてくれる。

参考文献

[1] 梅原雅顕・山田光太郎著「曲線と曲面」

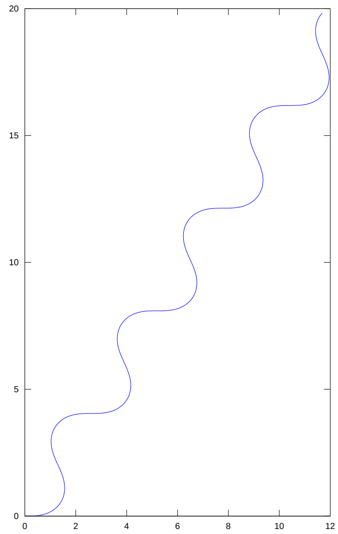

図 4: $a = 1$ のときの曲線

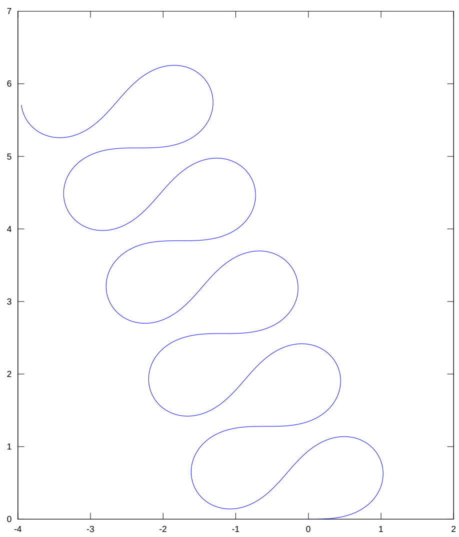

図 5: $a = 2$ のときの曲線

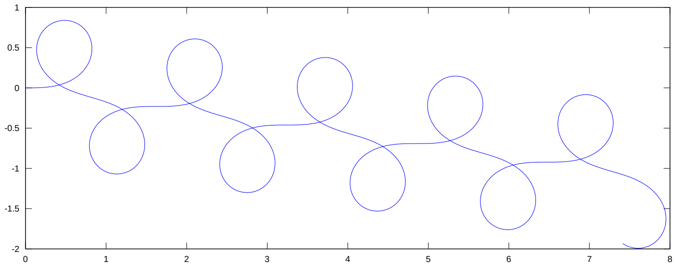

図 6: $a = 3$ のときの曲線

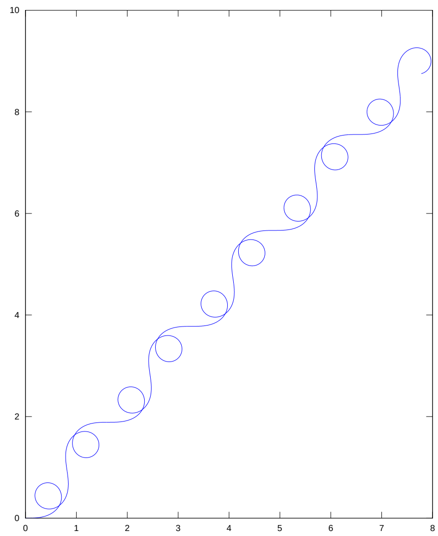

図 7: $a = 4$ のときの曲線

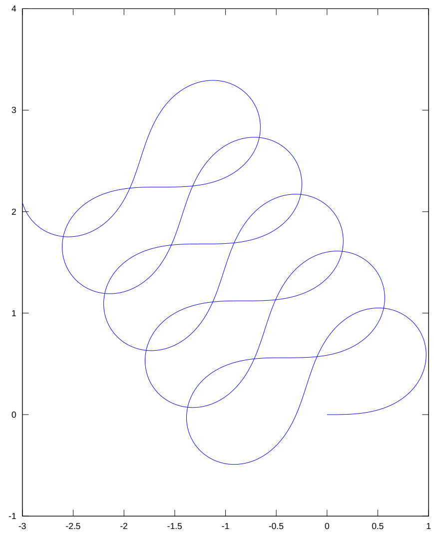

図 8: $a = 2.2$ のときの曲線

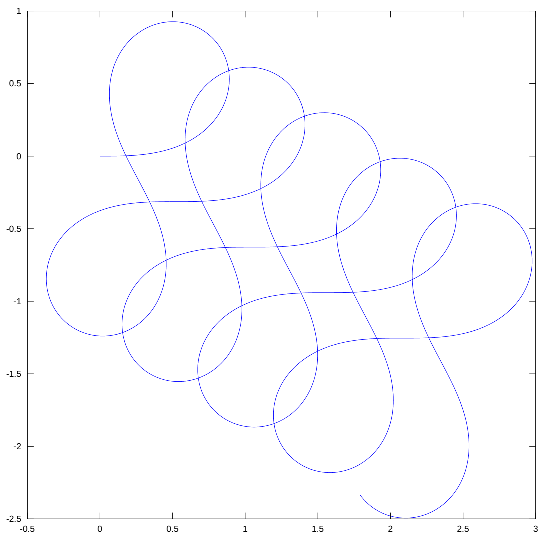

図 9: $a = 2.6$ のときの曲線