MMA 講究 A
担当：山田光太郎先生

MMA 講究 A　第 2 回課題レポート

学籍番号:2MA09055R
氏名　大平規史

問題

楕円、放物線、双曲線 (2 次曲線) を定直線 l の回りに滑らないように転がしたときに、2 次曲線の焦点が描く軌跡を直線 l の回りに回転して得られる曲面の平均曲率が一定になることを示し、その曲線（母線）を図示しなさい。

以下、問題文中の直線 l を x 軸として考えていく。
最初に回転面の平均曲率の一般形を求めてみよう。
まず、xy 平面上の弧長パラメータ表示された曲線を $(x(t), y(t))$ とする.
この曲線を x 軸に回転させた回転面は次のようになる。

$$f(t,\theta) = (x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta)$$

f の各成分のパラメータを t と θ について微分をそれぞれすると、

$$f_t = (\dot{x}, \dot{y}\cos\theta, \dot{y}\sin\theta)$$

$$f_\theta = (0, -y\sin\theta, y\cos\theta)$$

となり、第一基本量を求めたいので次の E, F, G を求める

$$\begin{aligned} E = f_t \cdot f_t &= (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\cos^2\theta + (\dot{x})^2\sin^2\theta \\ &= (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = f_t \cdot f_\theta &= 0 - \dot{y}y\sin\theta\cos\theta + \dot{y}y\sin\theta\cos\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = f_\theta \cdot f_\theta &= y^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta \\ &= y^2 \end{aligned}$$

よって第一基本量 I は次のようになる。

$$I = \begin{bmatrix} (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

逆行列は

$$I^{-1} = \frac{1}{y^2((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)} \begin{bmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

次に第二基本量を求めたいので, まず法線ベクトルを求める。
法線ベクトル ν は次の式で求められる。

$$\nu = \frac{f_t \times f_\theta}{\mid f_t \times f_\theta \mid}$$

ここで、$f_t \times f_\theta$ と $\mid f_t \times f_\theta \mid$ をもとめると、

$$\begin{aligned} f_t \times f_\theta &= (\dot{y}y\cos^2\theta + \dot{y}y\sin^2\theta, -\dot{x}y\cos\theta, -\dot{x}y\sin\theta) \\ &= y(\dot{y}, -\dot{x}\cos\theta, -\dot{x}\sin\theta) \end{aligned}$$

$$\mid f_t \times f_\theta \mid = y\sqrt{(\dot{y})^2 + (\dot{x})^2}$$

となり、よって法線ベクトル ν は

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}}(\dot{y}, -\dot{x}\cos\theta, -\dot{x}\sin\theta)$$

である。次に f_t の各成分を t, θ で微分し f_θ の各成分を θ で微分すると

$$f_{tt} = (\ddot{x}, \ddot{y}\cos\theta, \ddot{y}\sin\theta)$$

$$f_{t\theta} = (0, -\dot{y}\sin\theta, \dot{y}\cos\theta)$$

$$f_{\theta\theta} = (0, -y\cos\theta, -y\sin\theta)$$

次に L, M, N は

$$L = f_{tt} \times \nu = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})$$

$$M = f_{t\theta} \times \nu = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}}0 = 0$$

$$N = f_{\theta\theta} \times \nu = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}}(\dot{x}y)$$

よって第二基本量は次のようになる。

$$II = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \begin{bmatrix} \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x}y \end{bmatrix} \tag{3}$$

平均曲率を求めたいので次の A を計算する。

$$A = I^{-1}II$$

(2),(3) より A を計算すると

$$A=\frac{1}{y^2((\dot{x})^2+(\dot{y})^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{bmatrix} y^2(\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}) & 0 \\ 0 & \dot{x}y((\dot{x})^2+(\dot{y})^2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

平均曲率 H は $\frac{1}{2}trA$ で求められるので

$$H=\frac{1}{2}\frac{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}}{((\dot{x})^2+(\dot{y})^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\frac{\dot{x}}{y((\dot{x})^2+(\dot{y})^2)^{\frac{1}{2}}}$$

これで回転面の平均曲率の一般形が求まった。

1 楕円の場合

楕円を x 軸に沿って転がしたときの焦点の軌跡を求めていく

楕円上の点を P とおいて OP と x 軸のなす角を θ ,OP の長さを r とおくと点 P は極座標表示を用いて表すと

$$P=(x(\theta),y(\theta))=(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

になる。
次に楕円の極表示を考える。

$$r=\frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

ただし、$\varepsilon(0\leq\varepsilon<1)$ は離心率, 準線 $x=a$ である。
これにより点 P は

$$P=(x(\theta),y(\theta))=(r\cos\theta,r\sin\theta)=(\frac{a\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta},\frac{a\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta})$$

と表記できる。
点 P の接ベクトルは

$$(\dot{x},\dot{y})=(x(\dot{\theta}),y(\dot{\theta}))=(\frac{-a\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2},\frac{a(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2})$$

となり、$\overrightarrow{\mathrm{PO}}(=-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ と接ベクトルのなす角 ψ を求める。
ここで接ベクトルと $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ で内積をとると

$$-r\cos\theta\frac{-a\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}-r\sin\theta\frac{a(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}=\frac{-a^2\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}$$

$$r\text{の長さ} = \frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}, \text{接ベクトルの長さ} = \frac{a\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$$

よって $\cos\psi$ は $\frac{-(x\dot{x}+y\dot{y})}{r\text{ の長さ}\times\text{接ベクトルの長さ}}$ で求められるので

$$\cos\psi = \frac{-\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}}$$

また $\sin\psi$ は $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ より

$$\sin\psi = \frac{1+\varepsilon\cos\theta}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}}$$

が得られる。
また、弧長は

$$s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}d\theta$$

より計算すると

$$s(\theta) = \int_0^\theta \frac{a\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}d\theta$$

従って、焦点の座標 $(x{,}y)$ は

$$\begin{cases} x(\theta) = s(\theta) + r(\theta)\cos\psi \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\psi \end{cases}$$

焦点の軌跡が求まったので平均曲率の計算をするために準備をしていく。
θ で両辺を微分すると

$$\begin{cases} x(\dot{\theta}) = s(\dot{\theta}) + r(\dot{\theta})\cos\psi + r(\theta)(\cos\psi)\prime \\ y(\dot{\theta}) = r(\dot{\theta})\sin\psi + r(\theta)(\sin\psi)\prime \end{cases}$$

となる。
$\Delta = \sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}$ とおくと

$$s(\dot{\theta}) = \frac{a\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = \frac{a\Delta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$$

$$r(\dot{\theta}) = \frac{a\varepsilon \sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$$

$$\cos\psi = \frac{-\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta}} = \frac{-\varepsilon\sin\theta}{\Delta}$$

$$(\cos\psi)\prime = \frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta - \Delta^2\varepsilon\cos\theta}{\Delta^3}$$

よって x の θ による微分は

$$\begin{aligned}
x(\dot{\theta}) &= \frac{a\Delta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \frac{a\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\frac{-\varepsilon\sin\theta}{\Delta} + \frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta-\Delta^2\varepsilon\cos\theta}{\Delta^3} \\
&= \frac{a}{\Delta^3(1+\varepsilon\cos\theta)^2}(1+\varepsilon\cos\theta)^3 \\
&= \frac{a(1+\varepsilon\cos\theta)}{\Delta^3}
\end{aligned}$$

となり、２階微分は

$$x(\ddot{\theta}) = \frac{a}{\Delta^5}(2\varepsilon\sin\theta - \varepsilon^3\sin\theta + \varepsilon^2\sin\theta\cos\theta)$$

となる。
同様に y の微分は

$$y(\dot{\theta}) = \frac{a\varepsilon\sin\theta}{\Delta^3}$$

$$y(\ddot{\theta}) = \frac{a}{\Delta^5}(3\varepsilon^2 + \varepsilon\cos\theta + \varepsilon^3\cos\theta - \varepsilon^2\cos^2\theta)$$

となるので $\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}$ は

$$\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x} = \frac{a^2}{\Delta^8}(-\varepsilon^4 - 3\varepsilon^3\cos\theta - \varepsilon\cos\theta - 2\varepsilon^2\cos^2\theta - \varepsilon^2)$$

よって求める H は一般形に当てはめると

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\frac{\frac{a^2}{\Delta^8}(-\varepsilon^4 - 3\varepsilon^3\cos\theta - \varepsilon\cos\theta - 2\varepsilon^2\cos^2\theta - \varepsilon^2)}{(\frac{a}{\Delta^2})^3} + \frac{1}{2}\frac{\frac{a(1+\varepsilon\cos\theta)}{\Delta^3}}{\frac{a}{\Delta}\frac{a}{\Delta^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{a\Delta^2}(-\varepsilon^4 - 2\varepsilon^3\cos\theta + 1 + 2\varepsilon\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{a\Delta^2}\Delta^2(1-\varepsilon^2) \\
&= \frac{(1-\varepsilon^2)}{2a}
\end{aligned}$$

よってこれにより楕円を x 軸に沿って転がしたときにできる焦点の軌跡の回転面の平均曲率は一定であることが示された。

　楕円を転がしたときの焦点の軌跡はアンデュラリーと呼ばれる。
たぶん $undulate$(波立つ) という単語からきてる言葉だと思う。
可視化の方法は $Octave$ という数値計算ソフトを使い、微分方程式の解曲線を $gnuplot$ で図示している。

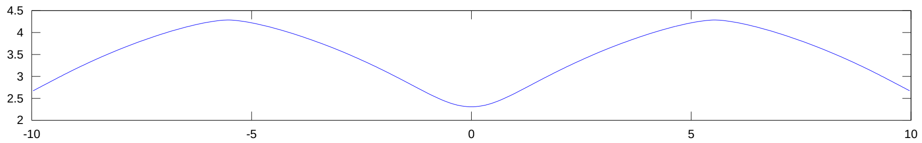

図 1: アンデュラリー、$\varepsilon = 0.5$,$a = 2$ のとき

2 放物線の場合
これも楕円の時ととき方は同じなのだが、まず放物線の焦点を原点にとる。放物線上の点を Q とおいて OQ と x 軸のなす角度を θ、OQ の長さを r とおくと点 Q は極座標表示を用いて表すと次のようになる。

$$Q = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

放物線の準線を $x = b$ として、点 Q から準線におろした垂線の長さと OQ の長さは放物線の定義より一緒である。
これより

$$b = r + r\cos\theta$$

よって、

$$r = \frac{b}{1+\cos\theta}$$

これが放物線の極表示である。
これにより点 Q は

$$Q = (x(\theta), y(\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (\frac{b\cos\theta}{1+\cos\theta}, \frac{b\sin\theta}{1+\cos\theta})$$

と表記できる。
点 Q の接ベクトルは

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (x(\dot{\theta}), y(\dot{\theta})) = (\frac{-b\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}, \frac{b(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2})$$

となり、$\overrightarrow{\mathrm{QO}}(= -\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と接ベクトルのなす角 ϕ を求める。
ここで接ベクトルと QO で内積をとると

$$-r\cos\theta\frac{-b\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2} - r\sin\theta\frac{b(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{-b^2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^3}$$

$$r \text{ の長さ} = \frac{b}{1+\cos\theta}, \text{接ベクトルの長さ} = \frac{b\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+\cos\theta)^2}$$

よって $\cos\phi$ は $\frac{-(x\dot{x}+y\dot{y})}{r\text{の長さ}\times\text{接ベクトルの長さ}}$ で求められるので

$$\cos\phi = \frac{-\sin\theta}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}$$

また $\sin\phi$ は $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ より

$$\sin\phi = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

が得られる。
また、弧長は

$$s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}d\theta$$

より計算すると

$$s(\theta) = \int_0^\theta \frac{b\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+\cos\theta)^2}d\theta$$

従って、焦点の座標 (x,y) は

$$\begin{cases} x(\theta) = s(\theta) + r(\theta)\cos\phi \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\phi \end{cases}$$

平均曲率を求める準備をする。
まず θ で微分すると

$$\begin{cases} x(\dot{\theta}) = s(\dot{\theta}) + r(\dot{\theta})\cos\phi + r(\theta)(\cos\phi)\prime \\ y(\dot{\theta}) = r(\dot{\theta})\sin\phi + r(\theta)(\sin\phi)\prime \end{cases}$$

となるので、個々の値を求める。
まず $\delta = \sqrt{2(1+\cos\theta)}$ と置く。
x について考えると

$$s(\dot{\theta}) = \frac{b\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{b\delta}{\frac{\delta^4}{4}} = \frac{4b\delta}{\delta^4}$$

$$r(\dot{\theta}) = \frac{-b(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{4b\sin\theta}{\delta^4}$$

$$\cos\phi = \frac{-\sin\theta}{\delta}$$

$$(\cos\phi)\prime = \frac{-\delta^2\cos\theta - \sin^2\theta}{\delta^3}$$

よって x の θ による微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} x(\dot{\theta}) &= \frac{4b\delta}{\delta^4} + \frac{4b\sin\theta}{\delta^4}\frac{-\sin\theta}{\delta} + \frac{2b}{\delta^2}\frac{-\delta^2\cos\theta - \sin^2\theta}{\delta^3} \\ &= \frac{b}{2\delta} \end{aligned}$$

2 階微分は

$$x(\ddot{\theta}) = \frac{b\sin\theta}{2\delta^3}$$

である。次に y について考える。

$$\begin{aligned} y(\dot{\theta}) &= \frac{4b\sin\theta}{\delta^4}\frac{\delta}{2} + \frac{2b}{\delta^2}\frac{-\sin\theta}{2\delta} \\ &= \frac{b\sin\theta}{\delta^3} \end{aligned}$$

2 階微分は

$$y(\ddot{\theta}) = \frac{b(3-\cos\theta)}{2\delta^3}$$

である。平均曲率の計算をする前に $\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}$ と $A = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}$ を計算しておく。

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x} &= \frac{b\sin\theta}{2\delta^3}\frac{b\sin\theta}{\delta^3} - \frac{b(3-\cos\theta)}{2\delta^3}\frac{b}{2\delta} \\ &= -\frac{b^2}{2\delta^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} &= \sqrt{\frac{b^2}{4\delta^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{\delta^6}} \\ &= \sqrt{\frac{b^2}{\delta^4}} \\ &= \frac{b}{\delta^2} \end{aligned}$$

よって求める平均曲率 H は

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\frac{-\frac{b^2}{2\delta^4}}{A^3} + \frac{1}{2}\frac{\frac{b}{2\delta}}{\frac{b}{\delta}A} \\
&= \frac{1}{4A^3\delta^4}(-b^2 + \delta^4 A^2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって放物線を x 軸にそって滑らしたときの焦点の軌跡の回転面の平均曲率は 0(一定) であることが示された。

放物線については弧長 $s(\theta)$ が計算できる形なので直接この軌跡の方程式が求まる。なので、その軌跡を求めて軌跡の回転面の平均曲率を求めることができる。

まず、弧長 $s(\theta)$ は上にも書いたと通りに

$$
\begin{aligned}
s(\theta) &= \int_0^\theta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,d\theta \\
&= \int_0^\theta \frac{\mathrm{b}\sqrt{2(1+\cos\theta)}}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta
\end{aligned}
$$

これを計算していく。b $= 1$ でかつ、半角の公式を用いると被積分関数は $\frac{1}{2\cos^3\frac{\theta}{2}}$ と書くことができるので

$$
\begin{aligned}
s(\theta) &= \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{1}{\cos^3\frac{\theta}{2}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{(1-\sin^2\frac{\theta}{2})^2}\,d\theta
\end{aligned}
$$

ここで $u = \sin\frac{\theta}{2}$ と置換積分をすると $du = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$ となるので

$$
\begin{aligned}
s(\theta) &= \int_0^u \frac{1}{(1-u^2)^2}\,du \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2u}{1-u^2} + \log\frac{1+u}{1-u}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} + \log\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}}{1-\sin\theta}\right)
\end{aligned}
$$

ϕ と θ の関係性は

$$
\begin{cases}
\cos\phi = -\sin\frac{\theta}{2} \\
\sin\phi = \cos\frac{\theta}{2}
\end{cases}
$$

求める軌跡は

$$
\begin{cases}
X = s(\theta) + r(\theta)\cos\phi \\
y = r(\theta)\sin\phi
\end{cases}
$$

なので、上の式を計算すると

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4}\log\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}}{1-\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{(1+\sin\frac{\theta}{2})^2}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\log(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}+\tan\frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

$$Y = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

X の両辺に対数 e を作用させると

$$e^{2X} = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} + \tan\frac{\theta}{2}$$

これに Y を代入して θ を消すと

$$Y = \frac{1}{2}\frac{e^{2X}+e^{-2X}}{2}$$

となる。カテナリーと呼ばれる曲線の方程式 $Y = \frac{1}{2}\cosh(2X)$ である。
カテナリーの回転面はカテノイドと呼ばれ、極小曲面に分類される。この極小曲面は平均曲率 H が 0 である曲面のことであるので、上とは違う方法で平均曲率が 0 であることがわかった。
また、放物線の離心率 $\varepsilon = 1$ なので、楕円の焦点の軌跡の回転面の平均曲率に $\varepsilon = 1$ を代入すると 0 になる。

放物線の場合の図示
焦点の軌跡 $\rightarrow$ カテナリー

今、前に求めた $Y = \frac{1}{2}\cosh(2X)$ を *gnuplot* で可視化

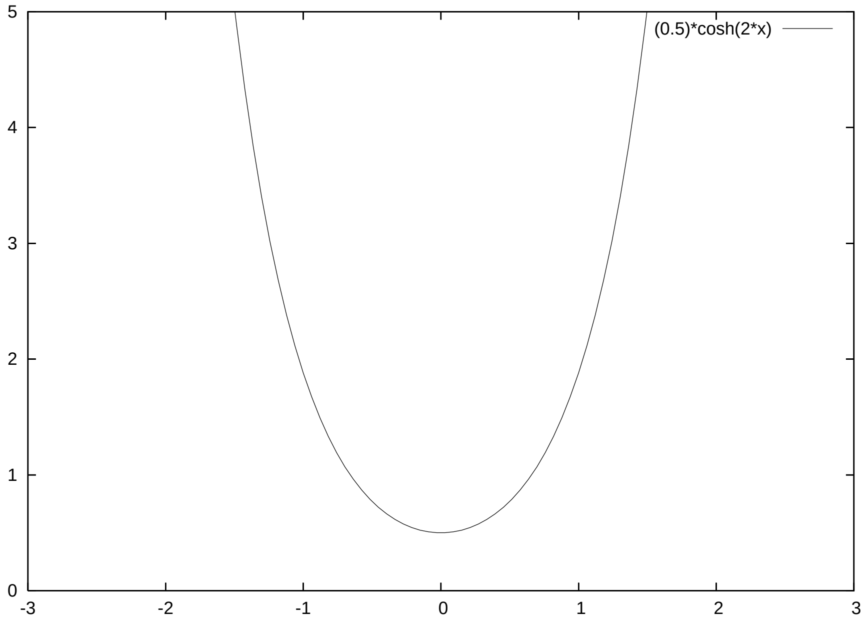

図 2: $Y = \frac{1}{2}\cosh(2X)$ のカテナリー曲線

3 双曲線の場合

双曲線の極表示は楕円の極表示の $\varepsilon > 1$ の場合である。
なので楕円のときと解法は同じで平均曲率 H は $\frac{1-\varepsilon^2}{2a}(\varepsilon > 1)$ で一定である。
双曲線を x 軸に沿って回転させてできる焦点の曲線をノーダリーという。
詳しい語源は知らないが $node$(こぶ、結び) という言葉からきていると思われる。
ノーダリーは途中までしか描画する (これも Octave を使用) ことができなかった。

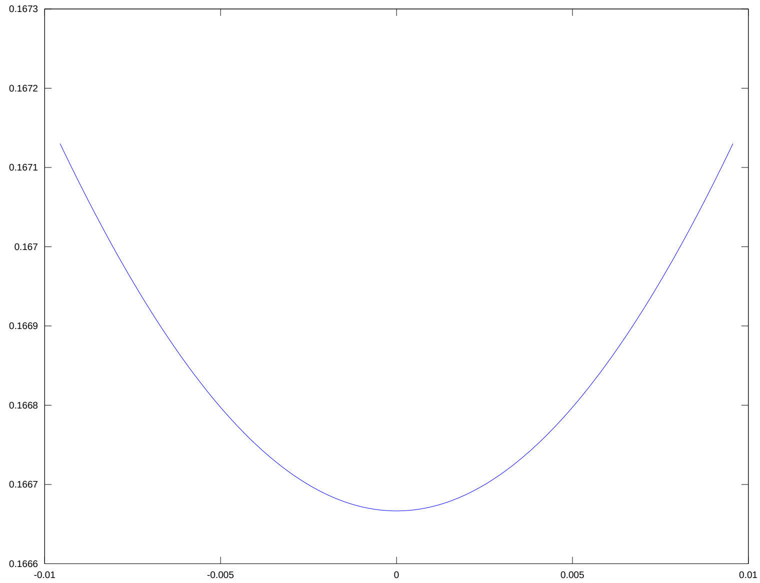

図 3: a=2,$\varepsilon = 2$、範囲 $[-0.2 : 0.2]$