MMA 講究 A
担当：山田光太郎先生

MMA 講究 A　第 3 回課題レポート

学籍番号:2MA09055R
氏名　大平規史

次の問題を考える。
適当な周期関数 $H(s)$ を与え、それを平均曲率にもつような回転面の中から周期的となるものを探す.

1. 対応する曲面がつねに周期的になるような, 定数でない $H(s)$ をひとつ見付け, 対応する回転面のいくつかを描画しなさい.
2. 対応する曲面のうちただ一つが周期的になるような $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する周期的な回転面と, 周期的でない回転面を描画しなさい.
3. 対応する曲面のうちただ一つの母線が閉曲線になるような $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する閉曲線から得られる回転面と、そうでない回転面を描画しなさい.
4. 対応する曲面のどれもが周期的にならないような関数 $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する回転面を描画しなさい.

(解答)
このレポートは少し長いので次の構成とする.

$Section1$: 理論
まず, 回転面を描画する前に周期をもつことがどういうことなのかを考えたいので次の 2 つの定理を述べる
定理 1
弧長 s によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ で表される曲線 r から, この曲線を x 軸回りに回転して得られる回転面 $f_\gamma(\theta, s) := (x(s), z(s)\cos\theta, z(s)\sin\theta)$ によって得られる回転面の平均曲率が $H(s)$ ならば, 曲率 $2H(s)$ の平面曲線

$$\sigma(s) = (\xi(s), \eta(s))$$

が存在して

$$x(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\dot{\xi}(u)\eta(u) - \xi(u)\dot{\eta}(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2 + (\eta(u))^2}} du + c, \qquad z(s) = \sqrt{(\xi(s))^2 + (\eta(s))^2}$$

とかける. ただし c は定数であり,$\xi(s)$ と $\eta(t)$ は

$$\xi(s) = \int_0^s \sin\left(2\int_0^u H(v)dv\right) du - c_1, \qquad \eta(s) = \int_0^s \cos\left(2\int_0^u H(v)dv\right) du + c_2$$
$$(c_1, c_2 : \text{定数})$$

逆に, このようにして得られる曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ から得られる回転面の

平均曲率は $H(s)$ である.

定理 2

$\kappa(s)$ が周期 L を持つならば, ある $A \in SO(2)$ と $b \in R^2$ が存在して

$$\begin{pmatrix} \xi(s+L) \\ \eta(s+L) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + b$$

が成り立つ.
とくに

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

であり,

$$a = \int_0^L \kappa(t)dt, \qquad b_1 = \int_0^L \cos\left(\int_0^s \kappa(t)dt\right)ds, \qquad b_2 = \int_0^L \sin\left(\int_0^s \kappa(t)dt\right)ds$$

である.

定理 1, 定理 2 を示していく.
定理 1 の証明の準備として $Frenet\ \ Frame$ の概念を導入する.
準備
弧長 s によりパラメータづけられた平面曲線

$$\gamma(s) = (x(s), z(s))$$

に対して, その速度ベクトルと左向き単位法線ベクトルを

$$e(s) = \dot{\gamma}(s) = (\dot{x}(s), \dot{z}(s)) \quad , \quad n(s) = (-\dot{z}(s), \dot{x}(s)) \qquad (\quad \dot{} = \frac{d}{ds})$$

と書くと

$$\mathcal{F}(s) = (e(s), n(s)) = \begin{pmatrix} \dot{x}(s) & -\dot{z}(s) \\ \dot{z}(s) & \dot{x}(s) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

これを曲線 r の $Frenet\ \ Frame$ という.
また,

$$\mathcal{F}\prime = \mathcal{F} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

を $Frenet\ \ equation$ という. ここで κ は曲率である.
(これを示すと

$$\begin{cases} \text{左辺} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(s) & -\ddot{z}(s) \\ \ddot{z}(s) & \ddot{x}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa\dot{z}(s) & -\kappa\dot{x}(s) \\ \kappa\dot{x}(s) & -\kappa\dot{z}(s) \end{pmatrix} \\ \text{右辺} = \begin{pmatrix} \dot{x}(s) & -\dot{z}(s) \\ \dot{z}(s) & \dot{x}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa\dot{z}(s) & -\kappa\dot{x}(s) \\ \kappa\dot{x}(s) & -\kappa\dot{z}(s) \end{pmatrix} \end{cases}$$

よって成り立つ)
では定理 1 の証明をしてみる。
弧長パラメータに s をもつ曲線 $(x(s), y(s))$ の回転面を考えると平均曲率 H は

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

(梅原・山田 [1] より)
ここで,$\lambda_1 = -\kappa, \lambda_2 = -\frac{\dot{x}}{y}$ となるので曲率 κ は

$$\kappa = 2H + \frac{\dot{x}}{y}$$

と書くことができるので r の $Frenet\ \ Frame$ を $\mathcal{F}$ とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &= \mathcal{F} \begin{pmatrix} 0 & -2H - \frac{\dot{x}}{y} \\ 2H + \frac{\dot{x}}{y} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{F}(\begin{pmatrix} 0 & -2H \\ 2H & 0 \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}}{y} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

と書ける.
次に $\tilde{\mathcal{F}} = \varphi\mathcal{F}$ と置くと

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}' &= \dot{\varphi}\mathcal{F} + \varphi\mathcal{F}' \\ &= \dot{\varphi}\mathcal{F} + \varphi\mathcal{F} \begin{pmatrix} 0 & -2H \\ 2H & 0 \end{pmatrix} + \varphi\mathcal{F}\frac{\dot{x}}{y} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{pmatrix} + \varphi\frac{\dot{x}}{y} \begin{pmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varphi\mathcal{F} \begin{pmatrix} 0 & -2H \\ 2H & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}\dot{\varphi} - \varphi\frac{\dot{x}\dot{y}}{y} & -\dot{\varphi}\dot{y} - \varphi\frac{\dot{x^2}}{y} \\ \dot{\varphi}\dot{y} + \varphi\frac{\dot{x}^2}{y} & \dot{x}\dot{\varphi} - \varphi\frac{\dot{x}\dot{y}}{y} \end{pmatrix} + \varphi\mathcal{F} \begin{pmatrix} 0 & -2H \\ 2H & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため φ を y と置き換えてもよいので $\tilde{\mathcal{F}} = y\mathcal{F}$ と置くと

$$\tilde{\mathcal{F}}' = \tilde{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} 0 & -2H \\ 2H & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで曲率 $2H$ の平面曲線 $\sigma_0(s) = (\xi_0(s), \eta_0(s))$ を考える.
σ_0の $Frenet\ \ Frame$ は

$$\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} \dot{\xi_0} & -\dot{\eta_0} \\ \dot{\eta_0} & \dot{\xi_0} \end{pmatrix}$$

とかけて σ_0 の $Frenet\ \ equation$ は

$$\dot{\varepsilon_0} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & -2H \\ 2H & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける.
今,$\tilde{\mathcal{F}} = Y\varepsilon_0$ と置くと

$$\tilde{\mathcal{F}\prime} = \dot{Y}\varepsilon_0 + Y\dot{\varepsilon_0} = Y\varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & -2H \\ 2H & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon_0^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi_0} & \dot{\eta_0} \\ -\dot{\eta_0} & \dot{\xi_0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\eta_0} & -\dot{\xi_0} \\ \dot{\xi_0} & \dot{\eta_0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので Y は

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \xi_0 & \eta_0 \\ -\eta_0 & \xi_0 \end{pmatrix} + A \right)$$

ただし,A は定行列である.
今,$\cancel{x} = \begin{pmatrix} \xi_0 & -\eta_0 \\ \eta_0 & \xi_0 \end{pmatrix}$ と置くと,

$$\tilde{\mathcal{F}} = y\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ({}^t\cancel{x} + A)\varepsilon_0$$

となる. ここで,$({}^t)$ は転置を意味する
$\mathcal{F}$ の条件を考えると,$\mathcal{F}$:直交 $\Rightarrow \mathcal{F}^t\mathcal{F} = id \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^t\tilde{\mathcal{F}} = y^2 id$
これより $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ が成り立つ.
これを示していく.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置いて計算したとき $a = d, c = -b$ となることを言えばよい.
まず, 上の条件から $\tilde{\mathcal{F}}^t \tilde{\mathcal{F}}$ を計算すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ({}^t\cancel{x} + A)\varepsilon_0 \cdot {}^t\varepsilon_0^t ({}^t\cancel{x} + A)^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = y^2 id \tag{1}$$

となる A を決定すればいい. すると (1) は

$${}^t\cancel{x}\ \cancel{x} + {}^t\cancel{x}{}^t A + A\cancel{x} + A^t A = y^2 id \tag{2}$$

という式になる. また (2) 左辺第一項 ${}^t\cancel{x}\ \cancel{x} = (\xi_0^2 + \eta_0^2) id$ であり,(2) を計算する.
$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = y^2 id$ と置くと
$A_2 = c\xi_0 + d\eta_0 - a\eta_0 + b\xi_0 + ac + bd = 0$
$A_3 = A_2$
$A_1 = (\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2(a\xi_0 + b\eta_0) + a^2 + b^2 = y^2$
$A_4 = (\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2(-c\eta_0 + d\xi_0) + c^2 + d^2 = y^2$
これより ξ_0, η_0 の恒等式から $a = d, b = -c$ が出てくる.

よって

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

なので

$$\tilde{\mathcal{F}} = y\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 + a & \eta_0 + b \\ -\eta_0 - b & \xi_0 + a \end{pmatrix} \varepsilon_0$$

となる. またこれより, 曲率 $2H$,$\sigma_0 = (\xi_0, \eta_0)$ の平面曲線は $(\xi_0 + a, \eta_0 + b) = (\xi, \eta)$ と考えてよいので
よって

$$\varepsilon_0 = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_0 & -\dot{\eta}_0 \\ \dot{\eta}_0 & \dot{\xi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} & -\dot{\eta} \\ \dot{\eta} & \dot{\xi} \end{pmatrix} = \varepsilon$$

となり,

$$y \begin{pmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ -\eta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} & -\dot{\eta} \\ \dot{\eta} & \dot{\xi} \end{pmatrix}$$

よって det をとると $y^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad \Rightarrow y = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$
行列の左上を計算すると $y\dot{x} = \dot{\xi}\eta - \xi\dot{\eta} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\dot{\xi}\eta - \xi\dot{\eta}}{y}$

次に逆を考える.$(\Leftarrow)$
曲線 $\gamma(s)=(x(s),z(s))$ から得られる回転面の平均曲率が $H(s)$ であることを示す.
(梅原・山田 [1]) 回転面の平均曲率の一般形は

$$H=\frac{1}{2}\frac{\ddot{x}\dot{z}-\dot{x}\ddot{z}}{((\dot{x})^2+(\dot{z})^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\frac{\dot{x}}{z((\dot{x})^2+(\dot{z})^2)^{\frac{1}{2}}}$$

である. 今回のレポートではこの証明を省く.
今ある条件は

$$(\dot{x})^2+(\dot{z})^2=1$$

であるので, この場合の平均曲率の一般系は次のように書ける.

$$H=\frac{1}{2}(\ddot{x}\dot{z}-\dot{x}\ddot{z})+\frac{1}{2}\frac{\dot{x}}{z} \tag{3}$$

以下, 具体的な計算に移る. まず $\dot{x},\dot{z}$ を求める.

$$\dot{x}=\frac{\dot{\xi}(s)\eta(s)-\xi(s)\dot{\eta}(s)}{\sqrt{(\xi(s))^2+(\eta(s))^2}}=\frac{\dot{\xi}(s)\eta(s)-\xi(s)\dot{\eta}(s)}{z(s)}$$

$$\dot{z}=\frac{1}{2}\frac{2\dot{\xi}(s)\xi(s)+2\eta(s)\dot{\eta}(s)}{\sqrt{(\xi(s))^2+(\eta(s))^2}}=\frac{\dot{\xi}(s)\xi(s)+\eta(s)\dot{\eta}(s)}{z(s)}$$

となる. ここで

$$\Delta(s)=\dot{\xi}(s)\eta(s)-\xi(s)\dot{\eta}(s)\quad,\quad\delta(s)=\dot{\xi}(s)\xi(s)-\eta(s)\dot{\eta}(s)$$

とおくと $\dot{x},\dot{z}$ はそれぞれ

$$\dot{x}=\frac{\Delta(s)}{z(s)}\quad,\quad\dot{z}=\frac{\delta(s)}{z(s)}$$

と書ける. 次に x,z の二回微分 $\ddot{x},\ddot{z}$ をそれぞれ計算していくと

$$\ddot{x}=\frac{\dot{\Delta}(s)z(s)-\Delta(s)\dot{z}(s)}{z^2(s)}=\frac{\dot{\Delta}(s)z(s)-\Delta(s)\frac{\delta(s)}{z(s)}}{z^2(s)}=\frac{\dot{\Delta}(s)z^2(s)-\Delta(s)\delta(s)}{z^3(s)}$$

$$\ddot{z}=\frac{\dot{\delta}(s)z(s)-\delta(s)\dot{z}(s)}{z^2(s)}=\frac{\dot{\delta}(s)z(s)-\delta(s)\frac{\delta(s)}{z(s)}}{z^2(s)}=\frac{\dot{\delta}(s)z^2(s)-\delta^2(s)}{z^3(s)}$$

となる. ここで,(3) の右辺第一項を計算したいので $\ddot{x}\dot{z}$、$\dot{x}\ddot{z}$ をまず計算すると

$$\begin{aligned}\ddot{x}\dot{z}&=\frac{\dot{\Delta}(s)z^2(s)-\Delta(s)\delta(s)}{z^3(s)}\cdot\frac{\delta(s)}{z(s)}\\&=\frac{\dot{\Delta}(s)\delta(s)z^2(s)-\Delta(s)\delta^2(s)}{z^4(s)}\end{aligned}$$

であり $\dot{x}\ddot{z}$ は

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{z} &= \frac{\Delta(s)}{z(s)}\cdot\frac{\dot{\delta}(s)z^2(s)-\delta^2(s)}{z^3(s)}\\ &= \frac{\dot{\delta}(s)\Delta(s)z^2(s)-\Delta(s)\delta^2(s)}{z^4(s)}\end{aligned}$$

よって $\ddot{x}\dot{z}-\dot{x}\ddot{z}$ は

$$\begin{aligned}\ddot{x}\dot{z}-\dot{x}\ddot{z} &= \frac{\dot{\Delta}(s)\delta(s)z^2(s)-\Delta(s)\delta^2(s)-\Delta(s)\dot{\delta}(s)z^2(s)+\Delta(s)\delta^2(s)}{z^4(s)}\\ &= \frac{\dot{\Delta}(s)\delta(s)-\Delta(s)\dot{\delta}(s)}{z^2(s)}\end{aligned}$$

である. ここで $\dot{\Delta}(s)\delta(s)$,$\Delta(s)\dot{\delta}(s)$ を求める. まず,$\dot{\Delta}(s)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}(s) &= \ddot{\xi}(s)\eta(s)+\dot{\xi}(s)\dot{\eta}(s)-\dot{\xi}(s)\dot{\eta}(s)-\xi(s)\ddot{\eta}(s)\\ &= \ddot{\xi}(s)\eta(s)-\xi(s)\ddot{\eta}(s)\end{aligned}$$

となり,$\dot{\Delta}(s)\delta(s)$ は

$$\dot{\Delta}(s)\delta(s)=\ddot{\xi}(s)\eta(s)\xi(s)\dot{\xi}(s)+\ddot{\xi}(s)\eta^2(s)\dot{\eta}(s)-\xi^2(s)\ddot{\eta}(s)\dot{\xi}(s)-\xi(s)\ddot{\eta}(s)\eta(s)\dot{\eta}(s)$$

である.

次に $\dot{\delta}(s)$ を求めると

$$\dot{\delta}(s)=\dot{\xi}(s)^2+\xi(s)\ddot{\xi}(s)+\dot{\eta}(s)^2+\eta(s)\ddot{\eta}(s)$$

となり $\Delta(s)\dot{\delta}(s)$ は

$$\begin{aligned}\Delta(s)\dot{\delta}(s) &= \dot{\xi}^3(s)\eta(s)+\dot{\xi}(s)\eta(s)\dot{\eta}^2(s)+\dot{\xi}(s)\eta(s)\xi(s)\ddot{\eta}(s)\\ &\quad +\dot{\xi}(s)\eta^2(s)\ddot{\eta}(s)-\xi(s)\dot{\eta}(s)\dot{\xi}^2(s)-\xi(s)\dot{\eta}^3(s)\\ &\quad +\xi^2(s)\dot{\eta}^2(s)\ddot{\xi}(s)-\xi(s)\eta(s)\dot{\eta}(s)\ddot{\eta}(s)\end{aligned}$$

になる. なので $\dot{\Delta}(s)\delta(s)-\Delta(s)\dot{\delta}(s)$ は

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}(s)\delta(s)-\Delta(s)\dot{\delta}(s) &= \xi^2(s)(\dot{\eta}(s)\ddot{\xi}(s)-\ddot{\eta}(s)\dot{\xi}(s))+\eta^2(s)(\ddot{\xi}(s)\dot{\eta}(s)-\dot{\xi}(s)\ddot{\eta}(s))\\ &\quad -\dot{\xi}(s)\eta(s)(\dot{\xi}^2(s)+\dot{\eta}^2(s))+\xi(s)\dot{\eta}(s)(\dot{\xi}^2(s)+\dot{\eta}^2(s))\\ &= (\xi^2(s)+\eta^2(s))(\dot{\eta}(s)\ddot{\xi}(s)-\ddot{\eta}(s)\dot{\xi}(s))+\xi\dot{\eta}(s)-\dot{\xi}(s)\eta(s)\end{aligned}$$

よって平均曲率 $H(s)$ の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\ddot{x}\dot{z}-\dot{x}\ddot{z}) &= \frac{1}{2}\frac{\dot{\Delta}(s)\delta(s)-\Delta(s)\dot{\delta}(s)}{z^2(s)}\\ &= \frac{1}{2z^2(s)}\Bigg((\xi^2(s)+\eta^2(s))(\dot{\eta}(s)\ddot{\xi}(s)-\ddot{\eta}(s)\dot{\xi}(s))\\ &\quad +\xi\dot{\eta}(s)-\dot{\xi}(s)\eta(s)\Bigg)\end{aligned}\tag{4}$$

となる.
今,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = 2H \begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ -\dot{\xi} \end{pmatrix}$$

という条件より $\ddot{\xi}(s) = 2H\dot{\eta}(s), \quad \ddot{\eta}(s) = -2H\dot{\xi}(s)$ になる.
これを (4) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z}) &= \frac{1}{z^2(s)}\Big(2H(\xi^2(s) + \eta^2(s)) + \xi(s)\dot{\eta(s)} - \dot{\xi}(s)\eta(s)\Big) \\ &= H + \frac{\xi(s)\dot{\eta(s)} - \dot{\xi}(s)\eta(s)}{2z^2(s)} \end{aligned}$$

となる.
また、右辺第 2 項 $\frac{1}{2}\frac{\dot{x}}{z}$ は

$$\frac{1}{2}\frac{\dot{x}}{z} = \frac{-\xi(s)\dot{\eta}(s) + \dot{\xi}(s)\eta(s)}{2z^2(s)}$$

よって

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z}) + \frac{1}{2}\frac{\dot{x}}{z} \\ &= H + \frac{\xi(s)\dot{\eta}(s) - \dot{\xi}(s)\eta(s)}{2z^2(s)} + \frac{-\xi(s)\dot{\eta}(s) + \dot{\xi}(s)\eta(s)}{2z^2(s)} \\ &= H \end{aligned}$$

これより曲線 $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ から得られる回転面の平均曲率が $H(s)$ であることが示された.

定理 2 の証明
曲率 κ は周期関数なので

$$\kappa(s + L) = \kappa(s)$$

が成り立つ。次に $\kappa(s)$ に対応する曲線 $\gamma(s)$ を考える.
曲線論の基本定理より $\gamma(s)$ は次のように書ける.

$$\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s))$$

ただし

$$\xi(s) = \int_0^s \cos\theta(t)dt, \quad \eta(s) = \int_0^s \sin\theta(t)dt \qquad (今、c_1, c_2 = 0 と仮定する)$$

特に $\theta(s)$ は

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt$$

ここで $\xi(s+L)$ を求める.

$$\xi(s+L) = \int_0^{s+L} \cos\theta(t)dt = \int_0^L \cos(\theta(t))dt + \int_L^{s+L} \cos\theta(t)dt$$

となり, 右辺第二項を $t = u + L$ で変数変換を行うと

$$\xi(s+L) = \int_0^{s+L} \cos\theta(t)dt = \int_0^L \cos(\theta(t))dt + \int_0^s \cos\theta(u+L)du \qquad (5)$$

となるが $\theta(u+L)$ を具体的に計算していないので, してみようと思う.

$$\theta(u+L) = \int_0^{u+L} \kappa(t)dt = \int_0^L \kappa(t)dt + \int_L^{u+L} \kappa(t)dt \qquad (6)$$

ここで右辺第二項を $t = v + L$ で変数変換すると

$$\int_L^{u+L} \kappa(t)dt = \int_0^u \kappa(v+L)dv$$

となるので κ は周期関数より $\kappa(v+L) = \kappa(v)$ となり

$$\int_0^u \kappa(v+L)dv = \int_0^u \kappa(v)dv$$

となる. なので (6) は次のように書ける.

$$\theta(u+L) = a + \int_0^u \kappa(v)dv$$

ただし,

$$a = \int_0^L \kappa(t)dt$$

よって $\theta(u+L)$ の具体的な式が求まったので (5) に代入すると

$$\xi(s+L) = \int_0^L \cos(\theta(t))dt + \int_0^s \cos(\theta(u)+a)du$$

になる. 加法定理より右辺第二項は

$$\begin{aligned}\int_0^s \cos(\theta(u)+a)du &= \int_0^s \{\cos\theta(u)\cos(a) - \sin\theta(u)\sin(a)\}du \\ &= \cos(a)\int_0^s \cos\theta(u)du - \sin(a)\int_0^s \sin\theta(u)du\end{aligned}$$

よって $\xi(s+L)$ は次のようになる.

$$\xi(s+L) = b_1 + \cos(a)\xi(s) - \sin(a)\eta(s)$$

ただし b_1 は

$$b_1 = \int_0^L \cos(\theta(t))dt$$

同様に $\eta(s+L)$ を計算すると

$$\eta(s+L) = b_2 + \sin(a)\xi(s) + \cos(a)\eta(s)$$

になる. ただし b_2 は

$$b_2 = \int_0^L \sin(\theta(t))dt$$

よって $\gamma(s+L)$ は

$$\gamma(s+L) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \gamma(s) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

と書くことが出来き $A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$,$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と置くと

$$\gamma(s+L) = A\gamma(s) + b$$

よって, 定理 2 は示された.

次に, 周期 L をもつ回転面の条件を考えてみる.
まず $\tilde{\sigma} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ という曲率 $2H(s)$ の曲線を考えてみる.
$\tilde{\sigma}$ と σ は次の式でつながっている.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi(s)} \\ \tilde{\eta(s)} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + C \tag{8}$$

ただし $B \in SO(2)$,$C \in R^2$ である.
(8) を式変形すると

$$\begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} = B^{-1}(\begin{pmatrix} \tilde{\xi(s)} \\ \tilde{\eta(s)} \end{pmatrix} - C)$$

となる. 今, 周期について考えたいので $s+L$ を考えると

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi(\widetilde{s+L}) \\ \eta(\widetilde{s+L}) \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} \xi(s+L) \\ \eta(s+L) \end{pmatrix} + C \\
&= B(A \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \mathrm{b}) + C \qquad \text{((7) を使う)} \\
&= BA \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + B\mathrm{b} + C \\
&= BAB^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\xi(s)} \\ \tilde{\eta(s)} \end{pmatrix} - BAB^{-1}C + B\mathrm{b} + C
\end{aligned}$$

今 $A, B \in SO(2)$ なので $AB = BA$ とすることが出来るので,

$$\begin{pmatrix} \xi(s \tilde{+} L) \\ \eta(s \tilde{+} L) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi(\tilde{s}) \\ \eta(\tilde{s}) \end{pmatrix} - AC + B\mathrm{b} + C \tag{9}$$

となる. ここで $(\xi(\tilde{s}), \eta(\tilde{s}))$ での回転 B は気にしなくてよいとする (回転はなにもしないのと同じだから) なので今は $B = id$ とする.
すると (9) の右辺第二項以降は $-AC + \mathrm{b} + C$ となる. これが 0 になることが周期的な回転面になるための条件である. この式を式変形すると

$$\begin{aligned} \mathrm{b} &= (A - id)C \\ \Leftrightarrow C &= (A - id)^{-1}\mathrm{b} \end{aligned}$$

となる. よってこれから考えていくのは $A - id$ が正則かどうかである.
これより 3 つの場合分けを考えることが出来る.

$$\begin{cases} A = id \text{ かつ } \mathrm{b} \neq 0 \Longrightarrow \text{回転面で周期的なものはない} \\ A = id \text{ かつ } \mathrm{b} = 0 \quad \text{なら対応する回転面はすべて周期的} \\ A \neq id \text{ ならば対応する回転面の母線が周期的になるものが回転を除いて唯一つ存在する.} \end{cases}$$

以上の事柄を踏まえて $Section2$ で実際に回転面を書いてみることにする.

$Section2$: 描画
これからは実際に書いてみることにする.
とは言っても、回転面までは書けなかったが回転面の母線は書けたのでそれを載せたいと思う．すべての母線は $Octave$ という数式処理ソフトを使用して描画した.
母線のプログラムの例として $H = \cos(s)$ の場合を書いてみる

平均曲率 $H = \cos(s)$ のときの $\xi(s), \eta(s)$ は

$$\xi(s) = \int_0^s \sin\left(2\int_0^u \cos(v)dv\right)du - c_1, \qquad \eta(s) = \int_0^s \cos\left(2\int_0^u cos(v)dv\right)du + c_2 \qquad (c_1, c_2 : \text{定数})$$

となるのでこれを計算すると

$$\xi(s) = \int_0^s \sin(2\sin(u))du - c_1, \qquad \eta(s) = \int_0^s \cos(2\sin(u))du + c_2 \qquad (c_1, c_2 : \text{定数})$$

となる。
なので平均曲率 H が変わると $\xi(s), \eta(s)$ の被積分関数が変わってくる。
また、以下のプログラムは $c_1, c_2 = 0$ としている。

```
Octave-3.2.0. ＞ function y=f(s)
y=cos(2 ∗ sin(s));    /*η(s) の被積分関数を定義*/
endfunction
function h=g(s)
h=sin(2 ∗ sin(s));    /*ξ(s) の被積分関数を定義*/
endfunction
t=linspace(-10,10,501)    /*区間 [-10,10] を 501 等分する分点*/
for n=1:501
s(n)=quad(”f”,0,t(n));    /*quad は第二引数から第三引数までの区間を f で
積分するコマンド*/
end
for n=1:501
b(n)=quad(”g”,0,t(n));
end
for n=1:501
z(n)=sqrt(s(n)*s(n)+b(n)*b(n))    /*z を定義*/
j(n)=(sin(2*sin(t(n)))*s(n)-b(n)*cos(2*sin(t(n))))/z(n)    /*x の被積分関数
を定義*/
end
```

```
T=t(2)-t(1);
x(1)=j(1)*T;
for n=2:501
x(n)=x(n-1)+j(n)*T;
end
plot(x,y)
```

また、$c_1, c_2 = 0$ のときのプログラムは 15 行目から変わってくる. 例として $c_1 = -5, c_2 = 3$ の場合を書いてみる.

```
z(n)=sqrt((s(n)+3)*(s(n)+3)+(b(n)+5)*(b(n)+5))      /*z を定義*/
j(n)=(sin(2*sin(t(n)))*(s(n)+3)-(b(n)+5)*cos(2*sin(t(n))))/y(n)      /*x の被積分関数を定義*/
end
```

これ以降は同様にやればよい.

1・平均曲率 $H(s) = 1.2025\cos(s)$ のときの A と b_1, b_2 はどのようになるかというと,$L = 2\pi$, 曲率 $\kappa(s) = 2.405\cos(s)$ のときに A と b_1, b_2 を計算すると

$$a = \int_0^L \kappa(t)dt = \int_0^{2\pi} 2.405\cos(s)ds = 0$$

よって A は

$$A = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id, \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので回転面はすべて周期的である.

下の図は平均曲率 $H(s) = 1.2025\cos(s)$ で、$c_1, c_2 = 0$ のときの回転面の母線である. この母線は特異点が 3 つもあるがこれを回避するために 0 以外の

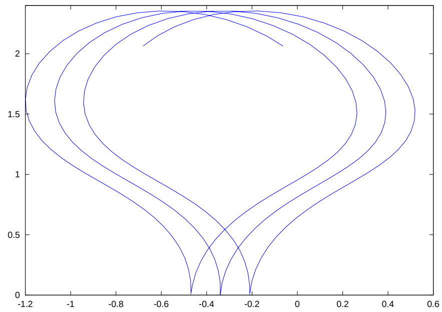

図 1: $H = 1.2025\cos(s)$ の時の母線

c_1, c_2 を代入する必要がある.

次の母線は $c_1 = -5, c_2 = 3$ のときの母線である.

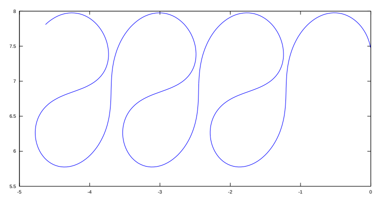

図 2: $H = 1.2025\cos(s)$,$c_1 = -5, c_2 = 3$ の時の母線

2・平均曲率 $H(s) = \frac{1}{3} + \cos(s)$ のときの A と b_1, b_2 はどのようになるかというと,$L = 2\pi$, 曲率 $\kappa(s) = \frac{2}{3} + 2\cos(s)$ のときに A と b_1, b_2 を計算すると.

$$a = \int_0^L \kappa(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} + 2\cos(s)ds = \frac{4}{3}\pi$$

より A は

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{4}{3}\pi) & -\sin(\frac{4}{3}\pi) \\ \sin(\frac{4}{3}\pi) & \cos(\frac{4}{3}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq id$$

また b は

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0526 \\ -3.5552 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

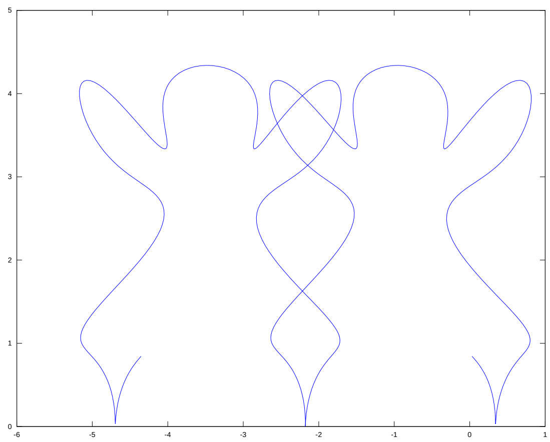

図 3: $H = \frac{1}{3} + \cos(s)$ で $c_1, c_2 = 0$ の時の母線

図 3 も特異点が 3 つもあるため,$c_1 = -5, c_2 = 3$ を代入してみたがよくわからない母線になってしまった.
それが次のページの図である.

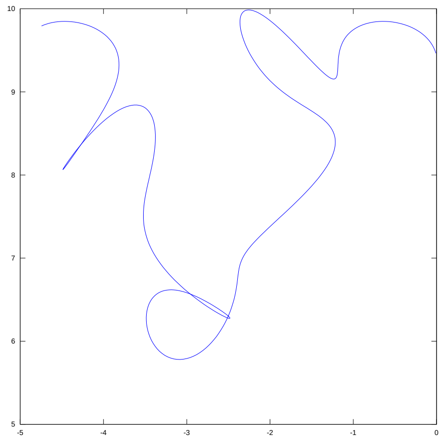

図 4: $H = \frac{1}{3} + \cos(s)$,$c_1 = -5, c_2 = 3$ の時の母線

4・周期関数を $H(s) = \cos(s)$ として考えてみると,$L = 2\pi$, 曲率 $\kappa(s) = 2\cos(s)$ である.
このとき、A と b_1, b_2 を計算すると

$$A = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id,$$

になり,$b_1 = 1.4067 \neq 0$ なので,$H(s) = \cos(s)$ を平均曲率にもつ曲率 $\kappa(s) = 2H(s) = 2\cos(s)$ の平面曲線の回転面で周期的なものがないといえる.
まずその $\sigma(s) = (\xi(s), \eta(s))$ の平面曲線を描いてみる.

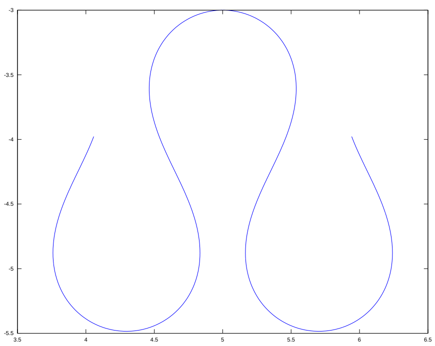

図 5: $H = \cos(s)$ の時の $(\xi(s), \eta(s))$ の平面曲線

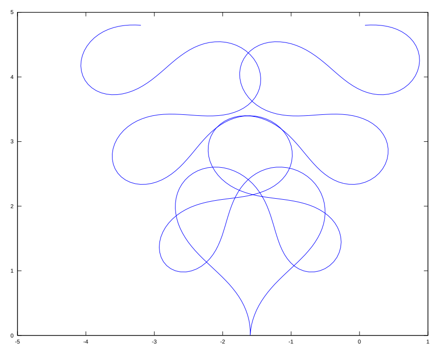

図 6: $H = \cos(s)$,$c_1, c_2 = 0$ の時の母線

図 6 も 1 つ特異点があるので $c_1 = -5, c_2 = 3$ を代入すると以下の図になる

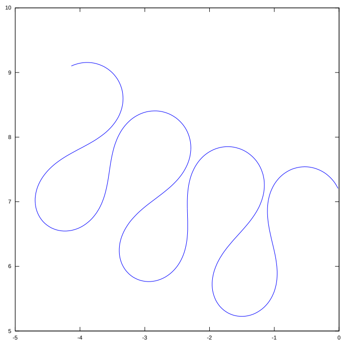

図 7: $H = \cos(s)$,$c_1 = -5, c_2 = 3$ の時の母線

参考文献

[1] 梅原雅顕・山田光太郎著「曲線と曲面」

[2]K.Kenmotsu, *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tohoku Math. J., 32 (1980) 147-153.

[3]K.Kenmotsu, *Surfaces of revolution with periodic mean curvature*, Osaka J.Math., 40 (2003), no.3, 687-696.

[4] 前田俊一 「あたえられた平均曲率をもつ回転面の構成について」, 修士学位論文, 2003, 九州大学数理学府.