2009年 5月11日

MMA 講究 A

担当:山田 光太郎 先生

MMA 講究 A レポート 4月23日分

学生番号 2MA09056N

氏名 甲斐 佑太

問1：曲率が κ(s)=s（sは弧長）で与えられる曲線を図示しなさい。とくにs→±∞のとき、曲線はどのように振舞うか。

回答：
本セミナー指定テキスト（P92,93）と全く同様に、Octave を用いて次の微分方程式

$$\frac{d\theta}{ds}=s,\ \frac{dx}{ds}=\cos(\theta),\ \frac{dy}{ds}=\sin(\theta),\ \theta(0)=x(0)=y(0)=0$$

を解くことで、曲率が κ(s)=sで与えられる曲線（クロソイド）を描くこととする。
その結果が、次の図1．1に示されている。

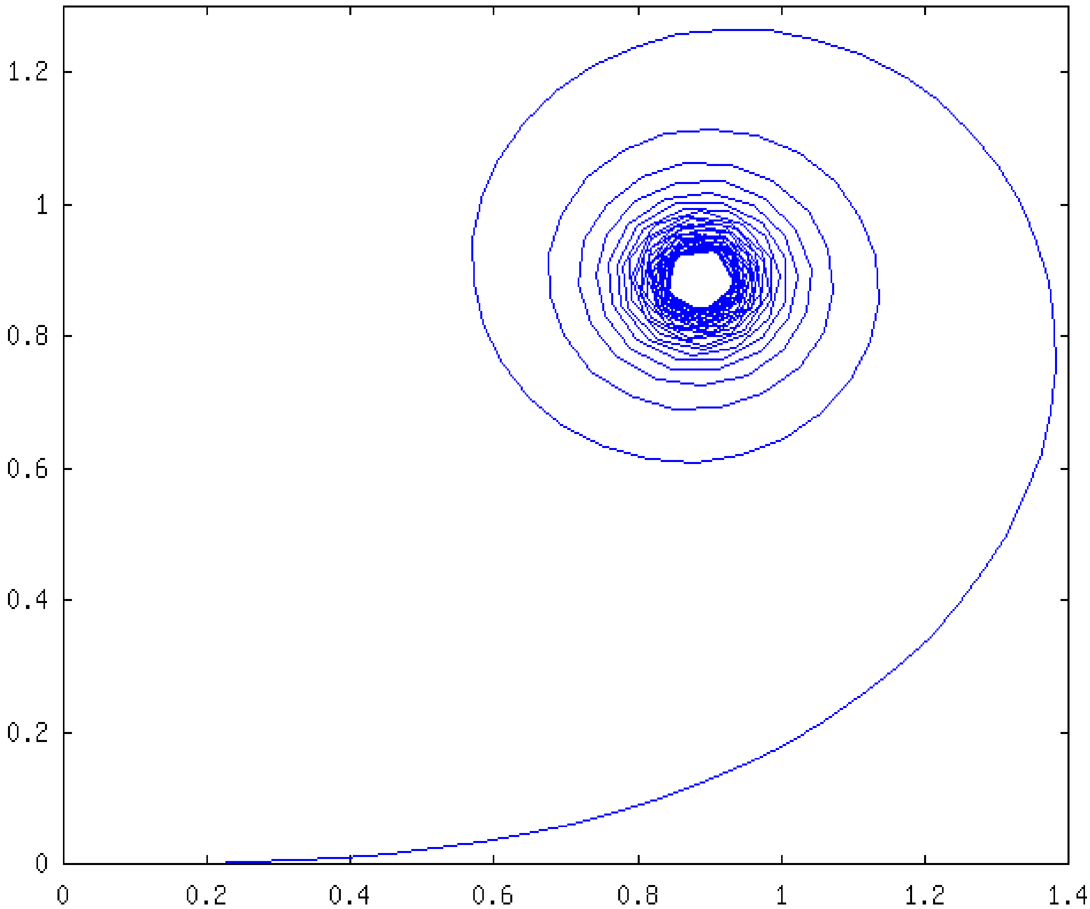

図1．1：クロソイド（s＝20）

これは、弧長sを 0 から 20 まで 300 分割して描いたクロソイド曲線である。なお、$\theta(0)=x(0)=y(0)=0$ としているため、曲線が原点から右向きにスタートしている。

また、sを－20から20まで600分割して描いた曲線が、次の図1．2である。

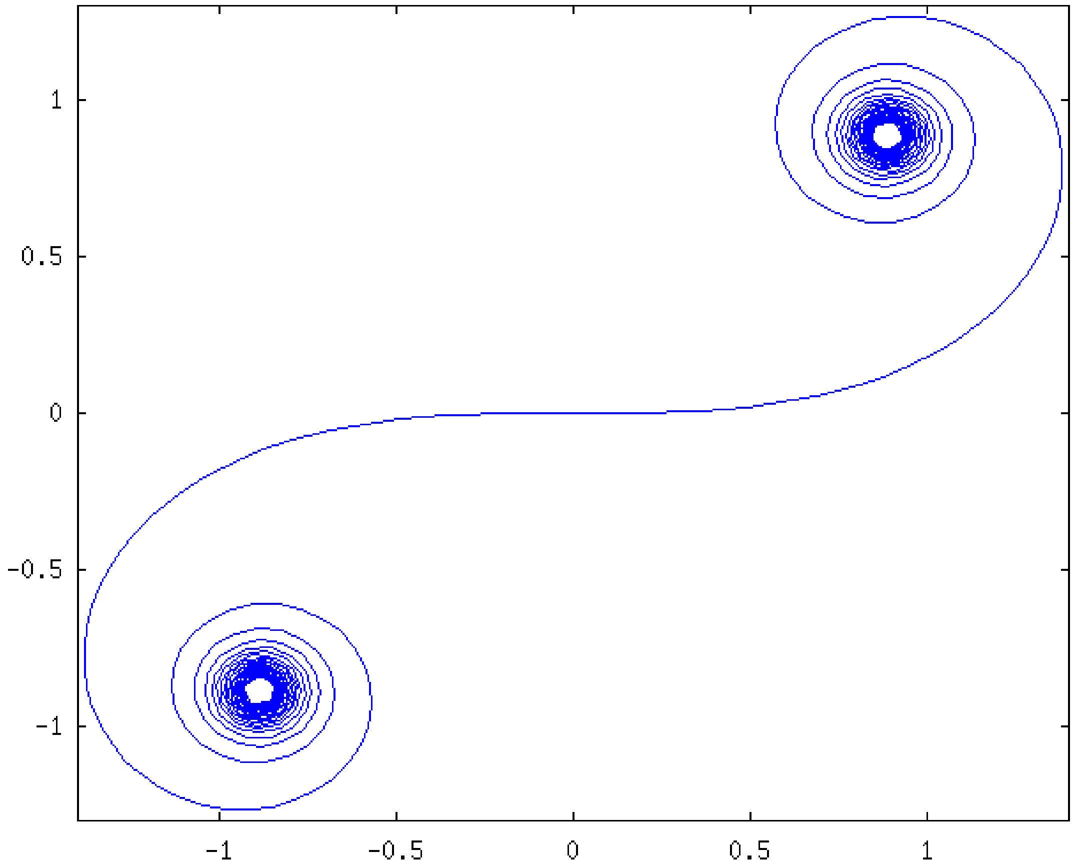

図1．2:クロソイド(s＝20、両側)

sを負の値まで広げると、図のように、原点を中心とした対称性を見ることが出来る。

次に、s→±∞としたときの挙動をみるために、もう少しsを大きくしたときのクロソイド曲線を描いてみる。

それが、次の図1．3である。

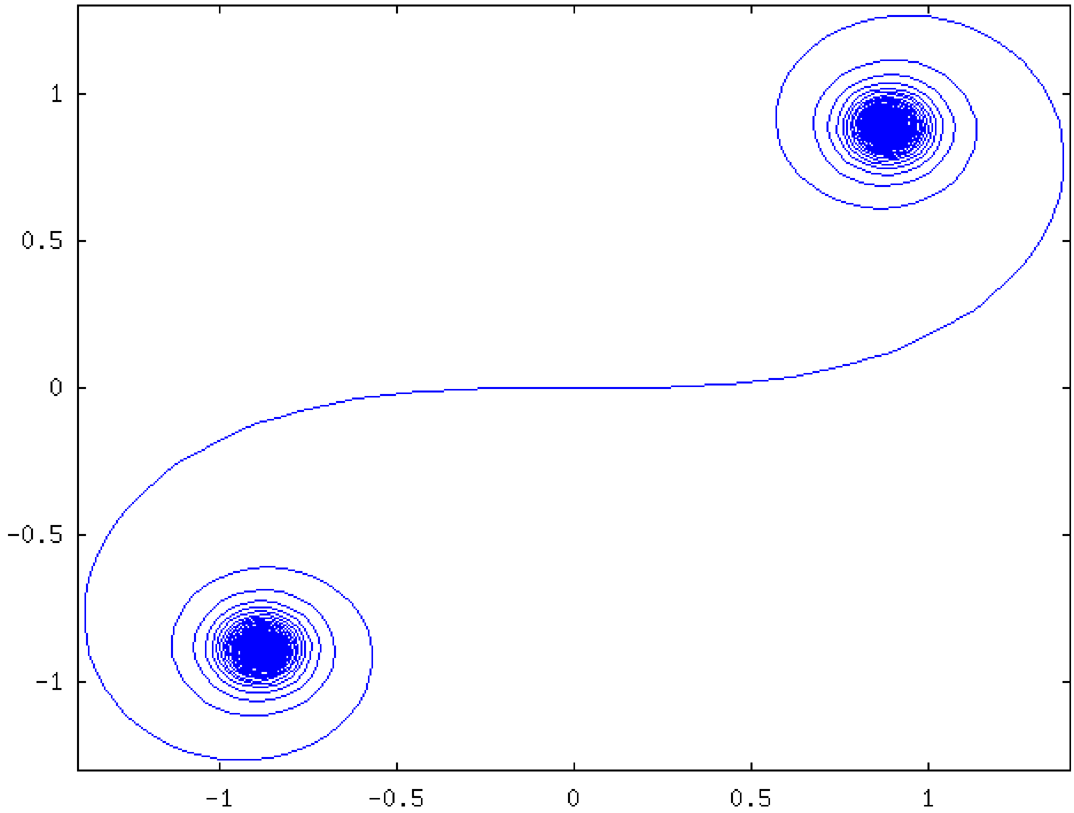

図1．3:クロソイド（s＝80、両側）

これは、sを－80 から 80 まで 3500 分割して描いたクロソイド曲線である。この数値を選んだ理由は、これ以上sを大きくしたり分割を細かくすると PC がフリーズしてしまったからである。しかし、図1．1、図1．2で白く空洞になっていた部分がこの図では埋まっていることから、曲線が1点に収束していくことが予想される。

実際、このグラフのクロソイドの弧長パラメータ表示のx座標、y座標はそれぞれ、

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{s^2}{2}\right)ds,\ \int_0^\infty \sin\left(\frac{s^2}{2}\right)ds$$

であり、これらはフレネル積分と呼ばれていて、どちらも $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$（≒0．89）に等しいことが証明できる。

（コーシーの積分定理を用いることで示せるが、長くなる上に内容が本レポートの主旨と異なるので、ここでは事実として扱うことにする）

以上より、この曲線はs→±∞としたとき、ある1点に収束するといえる。

問2：周期 L をもつなめらかな関数 κ(s)に対応する曲線 γ(s)が、周期 L の閉曲線になるための

条件を求めなさい。

回答: θ (s) = $\int_0^s \kappa(t)dt$ とおくと、

θ (s+L) = $\int_0^{s+L} \kappa(t)dt$ = $\int_0^L \kappa(t)dt + \int_L^{s+L} \kappa(t)dt$

= $\int_0^L \kappa(t)dt + \int_0^s \kappa(u+L)du$ （∵ t = u + L と変数変換）

= $\int_0^L \kappa(t)dt + \int_0^s \kappa(u)du$ （∵ κ (u)の周期性より）

= $\alpha + \theta$ (s)･･･①

ここで、$\alpha = \int_0^L \kappa(t)dt$ である。

また、γ (s) = ^{t} (x(s) , y(s))、x(s) = $\int_0^s \cos(\theta(t))dt$, y(s) = $\int_0^s \sin(\theta(t))dt$ とおくと、

x(s+L) = $\int_0^{s+L} \cos(\theta(t))dt$ = $\int_0^L \cos(\theta(t))dt + \int_L^{s+L} \cos(\theta(t))dt$

= $\int_0^L \cos(\theta(t))dt + \int_0^s \cos(\theta(u+L))du$ （∵ t = u + L と変数変換）

= $b1 + \int_0^s \cos(\theta(u)+\alpha)du$ （∵①より。ただし、$b1$ = $\int_0^L \cos(\theta(t))dt$ である。）

= $b1 + \int_0^s (\cos(\theta(u))\cos\alpha - \sin(\theta(u))\sin\alpha)du$ （∵加法定理）

= $b1 +$ cosα・x(s) − sinα・y(s)

同様の計算により、y(s+L) = $b2$ ＋sinα・x(s) + cosα・y(s)（ただし、$b2 = \int_0^L \sin(\theta(t))dt$ である。）を得るので、

γ (s+L) = ^{t} (x(s+L) , y(s+L))

= ^{t} ($b1, b2$) + Aγ (s) となる。

ただし、A は2×2行列で、A = $\begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}$ である。

よって、γ(s)が周期 L の閉曲線 ⇔ γ(s+L) = γ(s)

⇔ ${}^t(b1, b2)$ + Aγ(s) = γ(s) となるので、

「b1 = b2 = 0 かつ A = E(単位行列)」となることが、γ(s)が周期 L の閉曲線になるための条件である。

この条件を書き下すと、次のようになる。

b1 = b2 = 0 ⇔ $\int_0^L \cos(\theta(t))dt = \int_0^L \sin(\theta(t))dt = 0$

A=E ⇔ α = $\int_0^L \kappa(t)dt$ = 2 π m （mは整数）

問3：定数 a に対して κ(s)＝a＊cos(s)とおく。曲率が κ(s)となる曲線 γ(s)が周期2 π の閉曲線となるような a の値が存在することを示し、その近似値を求めなさい。

問4:問3の曲線を図示しなさい。

回答:

・a の存在の証明

問2の条件を満たしているかどうかをチェックすればよい。

$\int_0^{2\pi} a \cdot \cos(t)dt = 0$ より、A = E は満たしている。

また、θ(t) = $\int_0^t a \cdot \cos(s)ds = a \cdot \sin(t)$ より、

$$\int_0^{2\pi} \sin(a \cdot \sin(t))dt = \int_0^{\pi} \sin(a \cdot \sin(t))dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(a \cdot \sin(t))dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(a \cdot \sin(t))dt - \int_0^{\pi} \sin(a \cdot \sin(t))dt = 0$$

よって、$\int_0^{2\pi} \cos(a \cdot \sin(t))dt = 0$ を満たす a の値が存在することを示せばよいということになる。

まず、$f(a) = \int_0^{2\pi} \cos(a \cdot \sin(t))dt$ とおくとfは連続であり、f(0)=2 π＞0となる。

よって、あるb＞0で

$f(b) < 0$

を満たすとすると、中間値の定理より、閉区間[0,b]の中に求める a が存在する。

実際にb＝π とすると、

$f(\pi) = -1.91161$

となり、負であることがわかった。

(計算機を使わずに f(π)<0であることを証明できなかったため、この計算は mathematica で行った)

よって、γ(s)が閉曲線になるような a は、[0、π]に少なくとも1つ存在する。

・a の近似値を求め、図示

Octave を用いて、次のような微分方程式

$$\frac{d\Theta}{ds}=a\cdot\cos(s),\frac{dx}{ds}=\cos(\Theta),\frac{dy}{ds}=\sin(\Theta),\Theta(0)=x(0)=y(0)=0$$

を、いろいろなａの値に対して解き、以下に図示してみる。

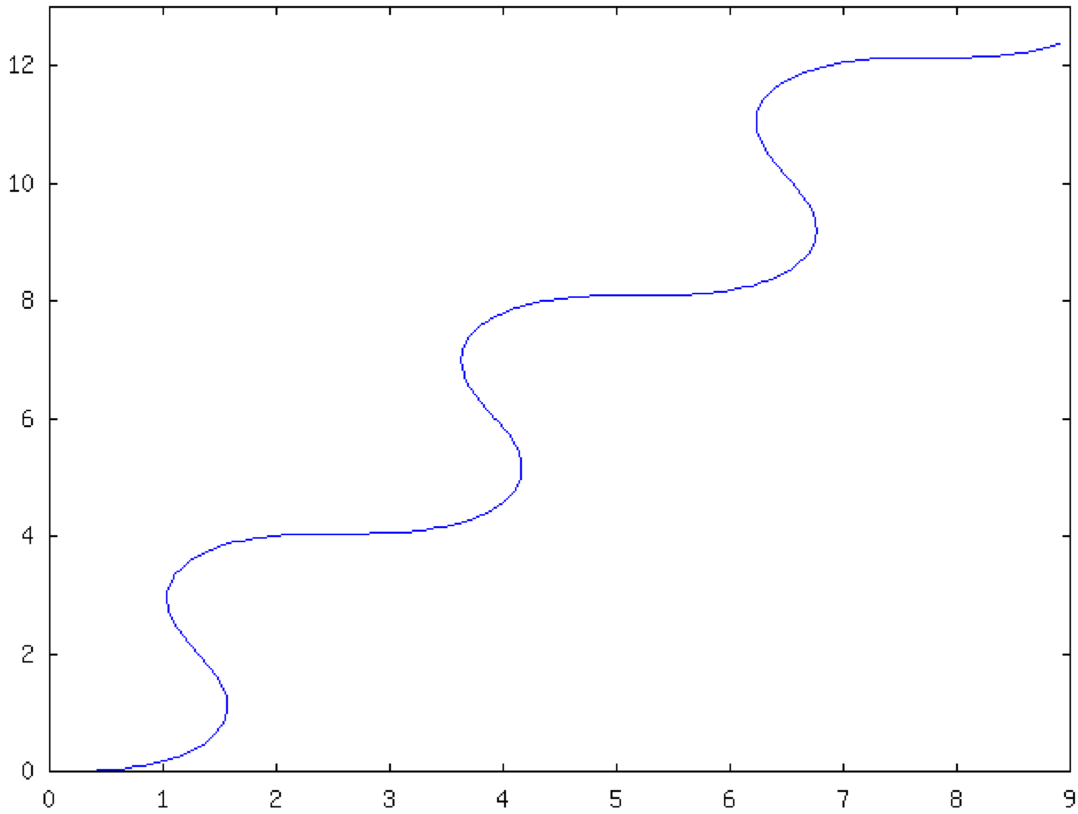

図4．1:a＝1のとき

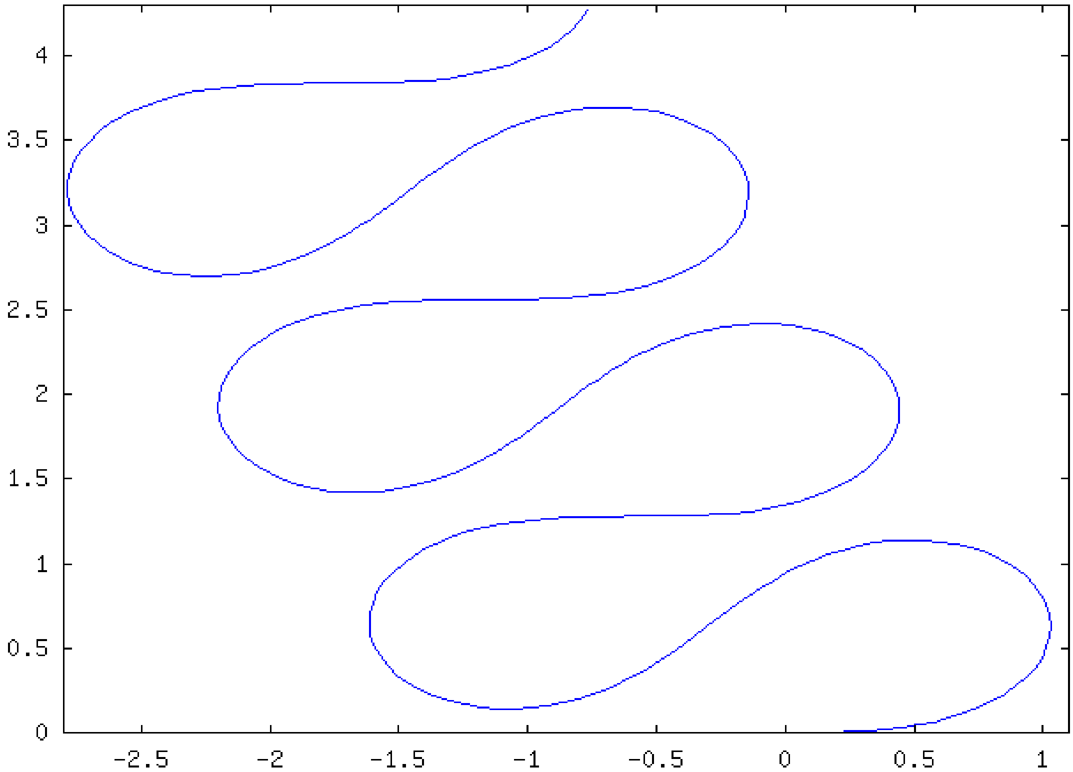

図4．2:a＝2のとき

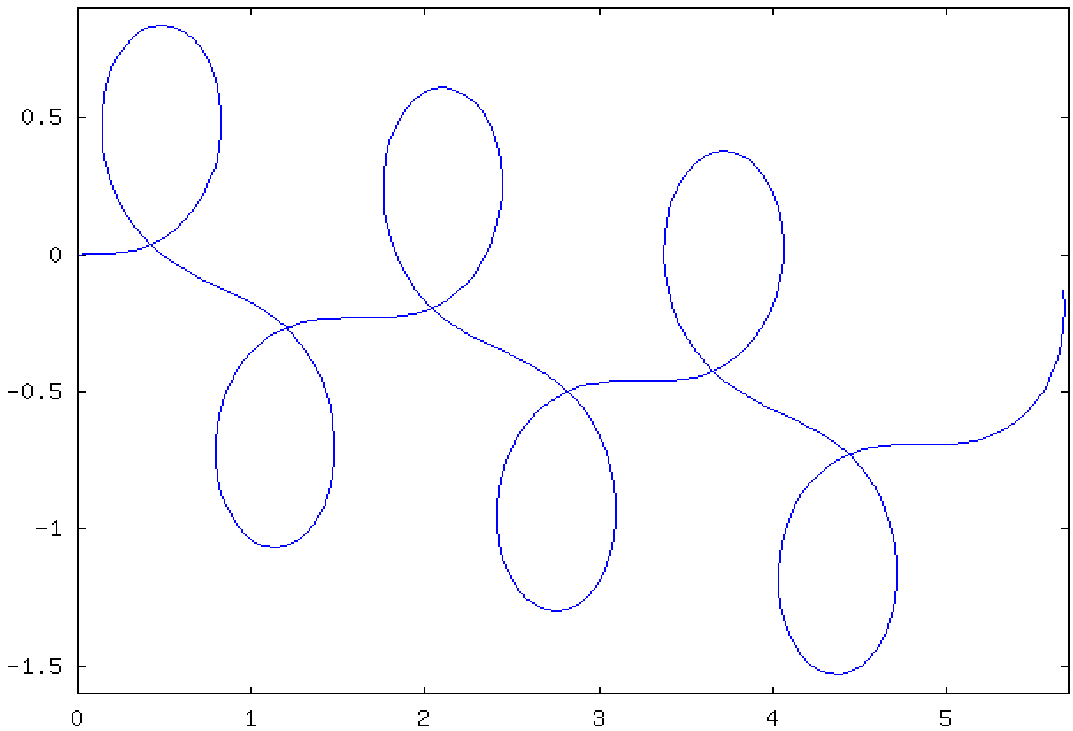

図4．3:a＝3のとき

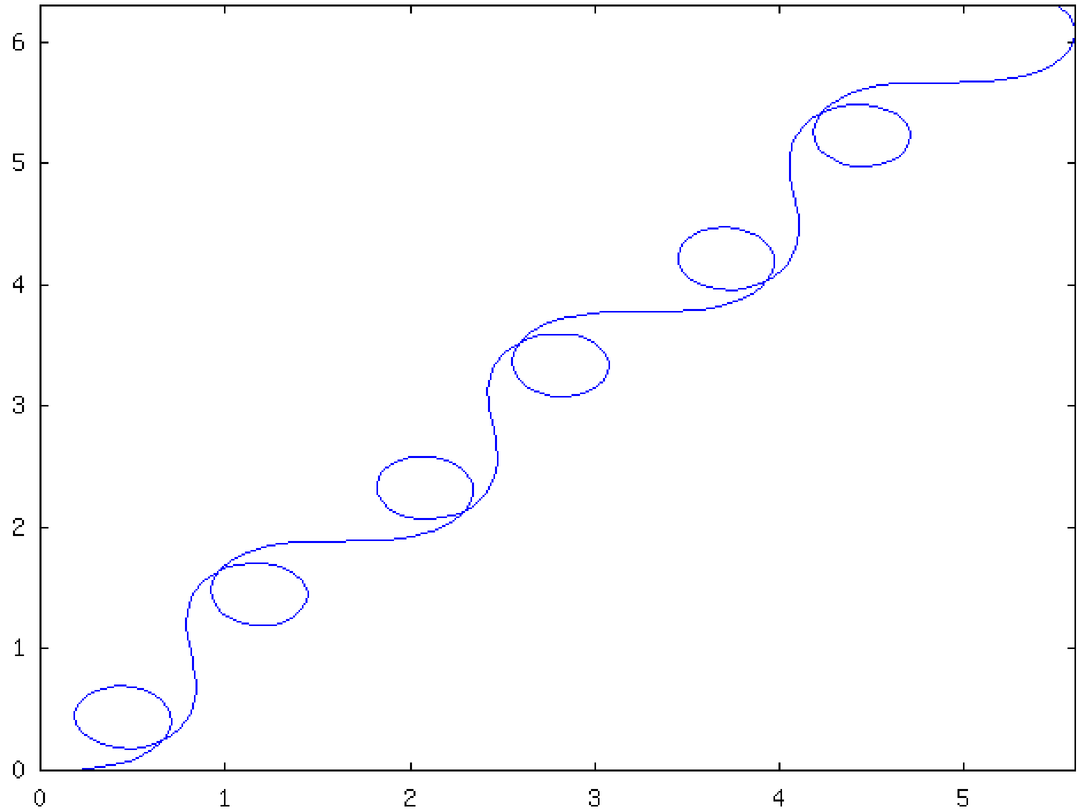

図4．4:a=4のとき

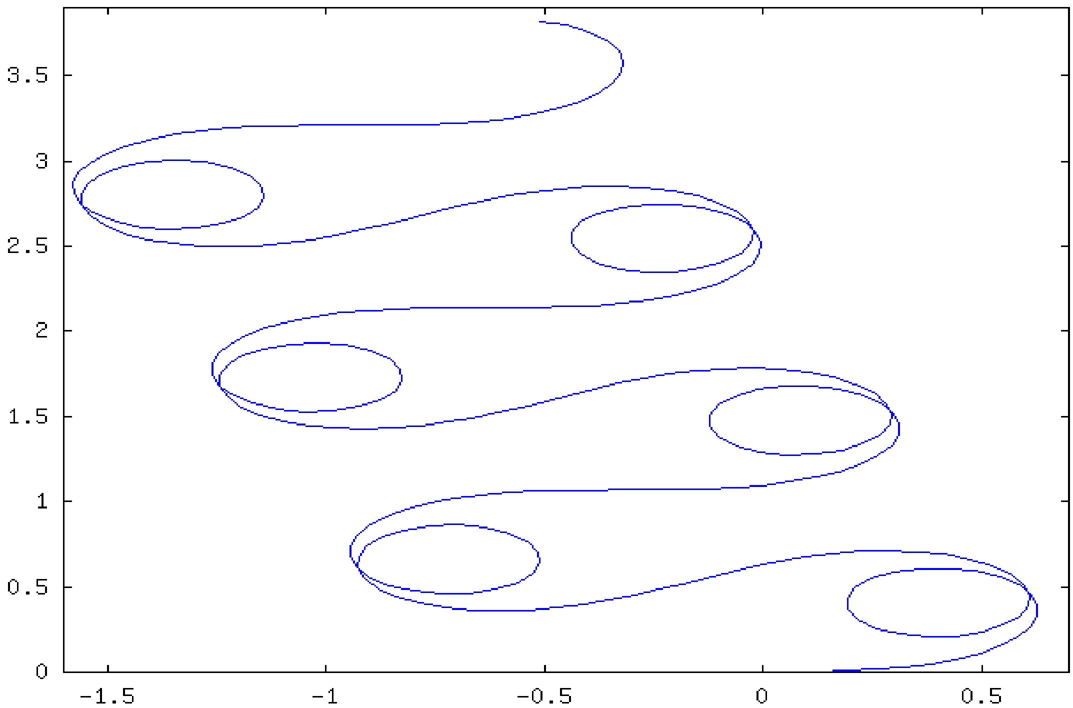

図4．5:a=5のとき

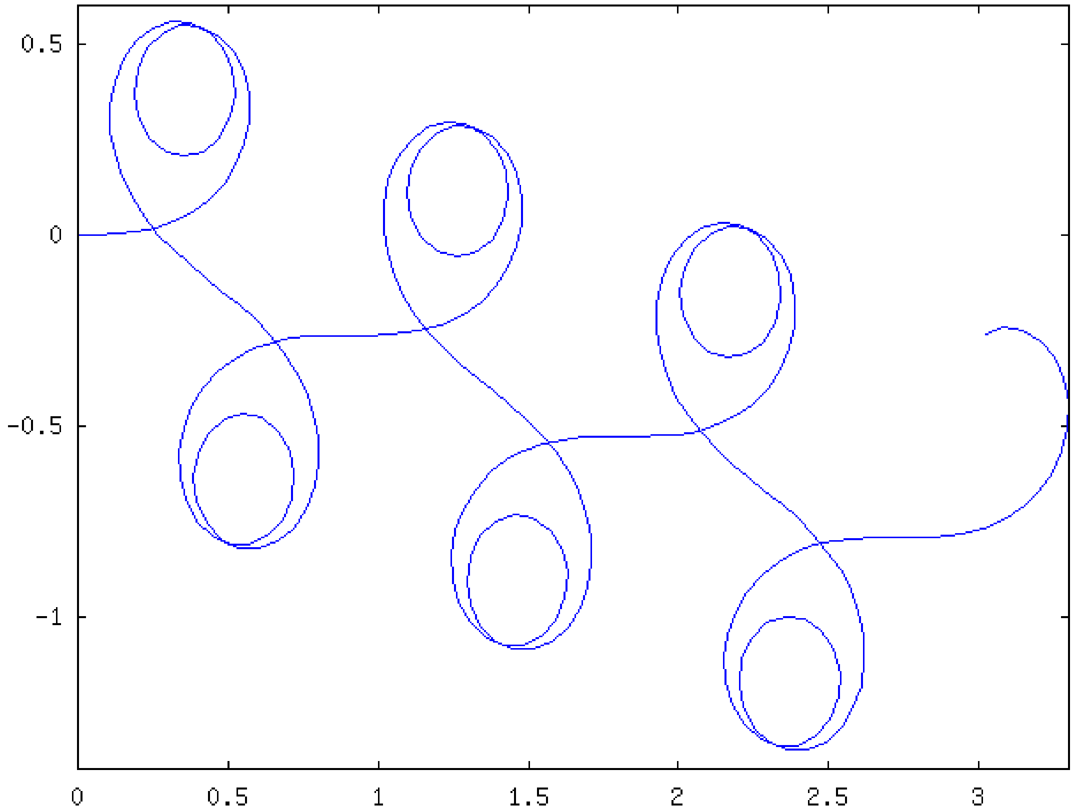

図4．6:a＝6のとき

a＝2とa＝5、a＝3とa＝6は非常に形が似ており、a＝5とa＝6は1周分だけ余分に回転している所に、周期性が表れている。

また、a＝1とa＝2の図は自身と交差していないのに対し、a＝3以降は自身との交差が見られることから、閉曲線となるようなaの値は、2と3の間に少なくとも1つはあると考えられる。

よって、さらに多くのグラフを書いてみたところ、a＝2．40で閉曲線に近い状態の曲線が見られた。

それが次の図4．7である。

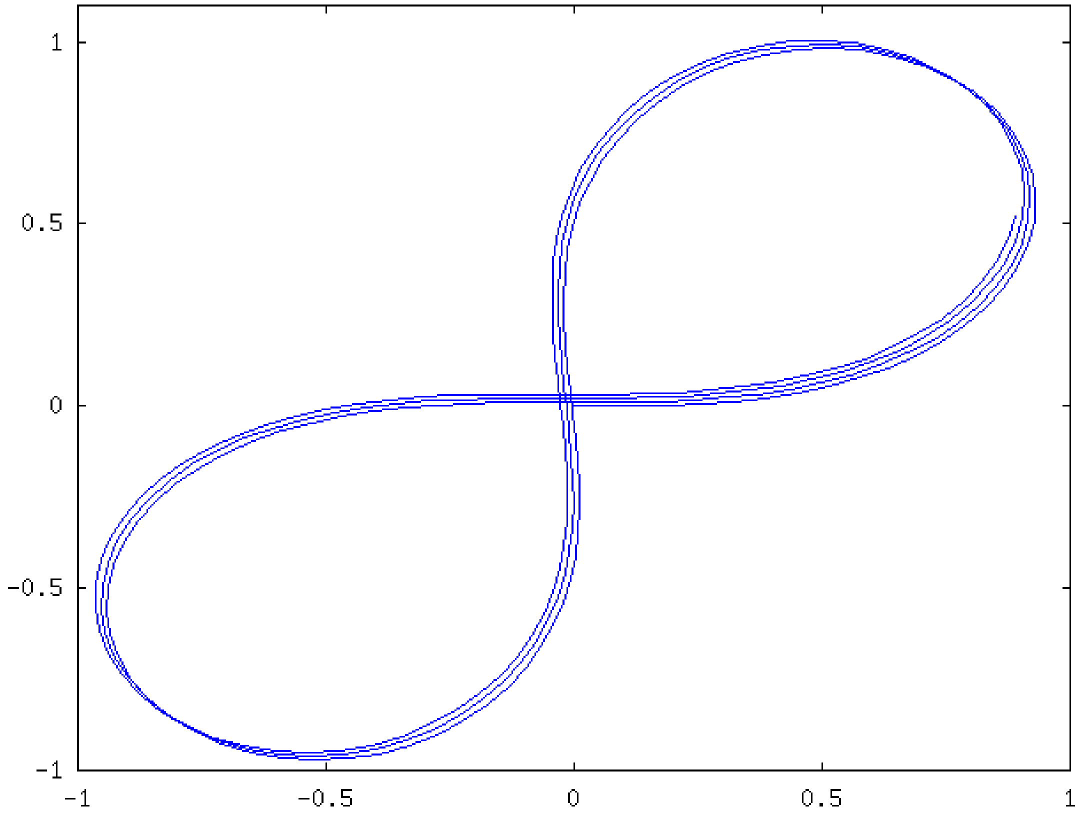

図4．7:a＝2．40のとき

少しずれているが、おおむね閉曲線状に見える。
ただし、この a＝2．40は小数点以下二桁までしか見ていない上に、グラフによる視覚的かつ主観的な決定による値であるため、これを近似値として判断できるかについては更なる検証が必要である。