

提出日 2009年6月17日
講義名 MMA 講究 A
担当 山田 光太郎 先生

MMA 講究 A レポート 6月4日分

学生番号 2MA09056N
氏名 甲斐 佑太

課題：楕円、放物線、双曲線（2次曲線）を定曲線 l の回りに滑らないように転がしたときに、2次曲線の焦点が描く軌跡を直線 l のまわりに回転して得られる曲面の平均曲率が一定となることを示し、その曲線（母線）を図示しなさい。

回答：

問題文中の定直線 l は、簡単のため x 軸としておく。もし x 軸で成り立つならば、一般の l でも成り立つからである。

準備として、一般の回転面の平均曲率の計算式を導出する。

$x y$ 平面上の曲線

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$$

が $\dot{\gamma}(\theta) \neq 0, y > 0$ を満たすとする、この曲線を x 軸を軸として回転させて得られる回転面は次のように表現される。

$$f(\theta, \phi) = (x(\theta), y(\theta) \cos \phi, y(\theta) \sin \phi)$$

この f の各成分をパラメータ θ, ϕ で微分したもの（変数 θ での微分を記号 $\dot{\cdot}$ で表すものとする）をそれぞれ f_θ, f_ϕ とおくと、

$$\begin{aligned} f_\theta &= (\dot{x}, \dot{y} \cos \phi, \dot{y} \sin \phi) \\ f_\phi &= (0, -y \sin \phi, y \cos \phi) \end{aligned}$$

となるので、第1基本行列を I とおくと、

$$I = \begin{bmatrix} (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}$$

従って、

$$I^{-1} = \frac{1}{((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2) y^2} \begin{bmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

となる。次に、単位法線ベクトル ν を求めるために f_θ と f_ϕ の外積を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f_\theta \times f_\phi &= (y\dot{y}, -\dot{x}y \cos \phi, -\dot{x}y \sin \phi) \\ &= y(\dot{y}, -\dot{x} \cos \phi, -\dot{x} \sin \phi) \end{aligned}$$

よって、

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} (\dot{y}, -\dot{x} \cos \phi, -\dot{x} \sin \phi)$$

また、 f_θ を θ, ϕ で微分したものを $f_{\theta\theta}, f_{\theta\phi}, f_\phi$ を ϕ で微分したものを $f_{\phi\phi}$ と表記すると、

$$\begin{aligned} f_{\theta\theta} &= (\ddot{x}, \ddot{y} \cos \phi, \ddot{y} \sin \phi) \\ f_{\theta\phi} &= (0, -\dot{y} \sin \phi, \dot{y} \cos \phi) \\ f_{\phi\phi} &= (0, -y \cos \phi, -y \sin \phi) \end{aligned}$$

となるので、第2基本行列 II をこれらを用いて計算すると、

$$II = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \begin{bmatrix} \ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x}\dot{y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる。よって、 $A = I^{-1}II$ とおくと、(1)(2) より、

$$A = \frac{1}{\left(\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\right)^3 y^2} \begin{bmatrix} y^2(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}) & 0 \\ 0 & \dot{x}\dot{y} \left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right) \end{bmatrix}$$

となるので、平均曲率は、

$$\frac{1}{2} \text{tr} A = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{2 \left(\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\right)^3} + \frac{\dot{x}}{2y\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}} \quad (3)$$

である。

以上で述べた事は後ほど使うとして、ここから課題への回答に移りたい。

まず、次のような極座標表示で表される曲線を考える。

$$r = r(\theta) = \frac{a}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad a > 0, \epsilon > 0 \quad (4)$$

これが $0 < \epsilon < 1$ ならば楕円を、 $\epsilon = 1$ ならば放物線を、 $1 < \epsilon$ ならば双曲線を表していることを証明する。

(4) を変形すると、

$$\begin{aligned} r &= a - \epsilon r \cos \theta \\ r^2 &= (a - \epsilon r \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

となる。 (r, θ) は極座標であるから $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と書けるのでこれを上の式に代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a - \epsilon x)^2 \\ -y^2 &= (1 - \epsilon^2)x^2 + 2a\epsilon x - a^2 \end{aligned}$$

この式から $\epsilon = 1$ ならば、 x について解くと放物線の方程式となることがわかる。

$\epsilon \neq 1$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{-y^2}{1-\epsilon^2} &= x^2 + \frac{2a\epsilon}{1-\epsilon^2}x - \frac{a^2}{1-\epsilon^2} \\ &= \left(x + \frac{a\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 - \frac{a^2}{(1-\epsilon^2)^2} \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{(1-\epsilon^2)^2}{a^2} \left(x + \frac{a\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2 + \frac{1-\epsilon^2}{a^2} y^2 = 1 \quad (5)$$

この式から、 $\epsilon < 1$ ならば y^2 の係数が正なので楕円となり、 $1 < \epsilon$ ならば負なので双曲線となることがわかる。

以上より、楕円、放物線、双曲線のパラメータ表示 (4) を得た。

これから、焦点の軌跡を求めてゆく。

焦点の一つを原点にとった楕円に接線を引いたものが図 1 である。なお、以後の図は全て gnuplot を用いて描いた。

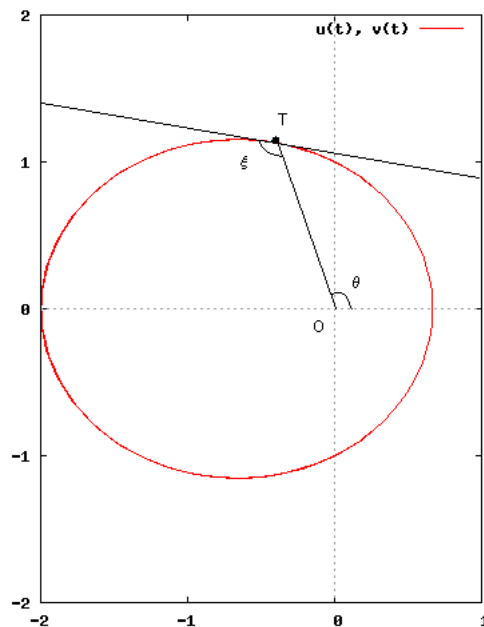


図 1: 楕円

図1では2次曲線として楕円を描いているが、放物線、双曲線でも同様の議論が可能である。

原点をO、接点をTとし、図1のように角度を θ, ξ とおく。

この楕円は、

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \left(\frac{a \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta}, \frac{a \sin \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \right)\end{aligned}$$

とパラメータ表示されているので、接点Tにおける接ベクトルは、

$$\dot{\gamma}(\theta) = \left(\frac{-a \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2}, \frac{a(\epsilon + \cos \theta)}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \right)$$

となる。また、ベクトル $T\vec{O}$ と $\dot{\gamma}(\theta)$ との内積、 $T\vec{O}$ と $\dot{\gamma}(\theta)$ の大きさをそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned}T\vec{O} \cdot \dot{\gamma}(\theta) &= \left(\frac{-a \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \right) \left(\frac{-a \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \right) + \left(\frac{-a \sin \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \right) \left(\frac{a(\epsilon + \cos \theta)}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \right) \\ &= \frac{-a^2 \epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^3} \\ |T\vec{O}| &= r = \frac{a}{1 + \epsilon \cos \theta} \\ |\dot{\gamma}(\theta)| &= \frac{a}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \sqrt{1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2}\end{aligned}$$

これらより、

$$\cos \xi = \frac{-\epsilon \sin \theta}{\sqrt{1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2}} \quad (6)$$

$$\sin \xi = \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{\sqrt{1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2}} \quad (7)$$

さて、この楕円を x 軸に沿って次の図 2 のように、焦点の周りに θ だけ回転させる。

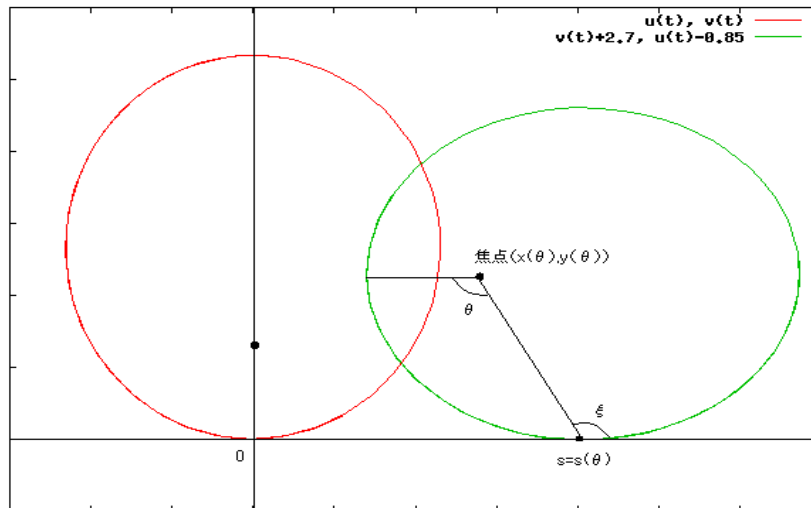


図 2: 楕円を焦点のまわりに だけ回転

x 軸との接点の移動距離を $s(\theta)$ とおく。
この時、焦点の座標を $(x(\theta), y(\theta))$ とおくと、

$$(x(\theta), y(\theta)) = (s(\theta) + r(\theta) \cos \xi, r(\theta) \sin \xi) \quad (8)$$

となる。また、 $s(\theta)$ は曲線 $\gamma(\theta)$ の 0 から θ までの弧長に等しいので、

$$\begin{aligned} s(\theta) &= \int_0^\theta |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= \int_0^\theta \frac{a}{(1 + \epsilon \cos t)^2} \sqrt{1 + 2\epsilon \cos t + \epsilon^2} dt \end{aligned} \quad (9)$$

よって、2 次曲線の焦点 $(x(\theta), y(\theta))$ が描く軌跡を x 軸のまわりに回転させてできる回転面の平均曲率は、(4)、(6)~(9) 式を冒頭で述べておいた平均曲率の式 (3) に代入することで得られる。

ここで $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$ を求める必要がある。計算をわかりやすくするために $C = \sqrt{1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2}$ とおくと、

$$\frac{d}{d\theta} C = \frac{-\epsilon \sin \theta}{C}$$

よって、 $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{x}(\theta) &= \dot{s}(\theta) + \frac{d}{d\theta}r(\theta) \cdot \cos \xi + r(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} \cos \xi \\
&= \frac{aC}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} + \frac{a\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \cdot \frac{-\epsilon \sin \theta}{C} + \frac{a}{1 + \epsilon \cos \theta} \cdot \left(-\frac{\epsilon \cos \theta}{C} - \frac{\epsilon^2 \sin^2 \theta}{C^3} \right) \\
&= \frac{a(1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2) - a\epsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2 C} - \frac{a}{1 + \epsilon \cos \theta} \cdot \frac{\epsilon \cos \theta(1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2) + \epsilon^2 \sin^2 \theta}{C^3} \\
&= \frac{a(1 + \epsilon \cos \theta)^2}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2 C} - \frac{a}{1 + \epsilon \cos \theta} \cdot \frac{(1 + \epsilon \cos \theta)(\epsilon^2 + \epsilon \cos \theta)}{C^3} \\
&= \frac{a(1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2)}{C^3} - \frac{a(\epsilon^2 + \epsilon \cos \theta)}{C^3} \\
&= \frac{a(1 + \epsilon \cos \theta)}{C^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(\theta) &= \frac{-a\epsilon \sin \theta}{C^3} + \frac{3a\epsilon \sin \theta(1 + \epsilon \cos \theta)}{C^5} \\
&= \frac{-a\epsilon \sin \theta(1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2) + 3a\epsilon \sin \theta(1 + \epsilon \cos \theta)}{C^5} \\
&= \frac{a\epsilon \sin \theta(2 + \epsilon \cos \theta - \epsilon^2)}{C^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}(\theta) &= \frac{d}{d\theta}r(\theta) \cdot \sin \xi + r(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} \sin \xi \\
&= \frac{a\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \cdot \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{C} + \frac{a}{1 + \epsilon \cos \theta} \cdot \left(-\frac{\epsilon \sin \theta}{C} + \frac{\epsilon \sin \theta(1 + \epsilon \cos \theta)}{C^3} \right) \\
&= \frac{a\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)C} - \frac{a\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)C} + \frac{a\epsilon \sin \theta(1 + \epsilon \cos \theta)}{(1 + \epsilon \cos \theta)C^3} \\
&= \frac{a\epsilon \sin \theta}{C^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(\theta) &= \frac{a\epsilon \cos \theta}{C^3} + \frac{3a\epsilon^2 \sin^2 \theta}{C^5} \\
&= \frac{a\epsilon \cos \theta(1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2) + 3a\epsilon^2(1 - \cos^2 \theta)}{C^5} \\
&= \frac{a\epsilon(3\epsilon + (1 + \epsilon^2)\cos \theta - \epsilon \cos^2 \theta)}{C^5}
\end{aligned}$$

これらから、

$$\begin{aligned}
\ddot{x}\dot{y} &= \frac{a^2\epsilon^2(1 - \cos^2 \theta)(2 + \epsilon \cos \theta - \epsilon^2)}{C^8} \\
&= \frac{a^2}{C^8} (2\epsilon^2 - \epsilon^4 + \epsilon^3 \cos \theta + (\epsilon^4 - 2\epsilon^2) \cos^2 \theta - \epsilon^3 \cos^3 \theta) \\
\dot{x}\ddot{y} &= \frac{a^2\epsilon(1 + \epsilon \cos \theta)(3\epsilon + (1 + \epsilon^2)\cos \theta - \epsilon \cos^2 \theta)}{C^8}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{C^8} (3\epsilon^2 + (\epsilon + 4\epsilon^3) \cos \theta + \epsilon^4 \cos^2 \theta - \epsilon^3 \cos^3 \theta)$$

よって、

$$\begin{aligned} \ddot{x}y - \dot{x}\ddot{y} &= -\frac{a^2}{C^8} (2\epsilon^2 \cos^2 \theta + (\epsilon + 3\epsilon^3) \cos \theta + \epsilon^2 + \epsilon^4) \\ &= -\frac{a^2}{C^8} (\epsilon \cos \theta + \epsilon^2)(1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2) \\ &= -\frac{a^2}{C^6} (\epsilon \cos \theta + \epsilon^2) \end{aligned} \quad (10)$$

また、

$$\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} = \frac{a}{C^2} \quad (11)$$

これまで求めた式を (3) に代入すると、平均曲率は、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2 \left(\frac{a}{C^2}\right)^3} \cdot \left(-\frac{a^2}{C^6} (\epsilon \cos \theta + \epsilon^2)\right) + \frac{1}{2 \cdot \frac{a}{C} \cdot \frac{a}{C^2}} \cdot \frac{a(1 + \epsilon \cos \theta)}{C^3} \\ &= -\frac{\epsilon \cos \theta + \epsilon^2}{2a} + \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{2a} \\ &= \frac{1 - \epsilon^2}{2a} \end{aligned}$$

ϵ, a は定数であったので、 H は定数となり、2次曲線の焦点の軌跡を回転して得られる回転面の平均曲率が一定であることが示せた。この式より特に、 $\epsilon = 1$ のとき、即ち2次曲線が放物線のときは回転面が極小曲面となることもわかる。

次に、焦点の軌跡を図示する。まずは楕円について考えよう。
 焦点の座標は (8) 式で与えられているが、式の中にある $s(\theta)$ は初等関数で表せないので、数値計算ソフト Octave を用いて解くこととする。
 Octave で解くには、次のように入力すればよい。

```

a=1;e=0.1; /*a,ε の値を定義*/
function y = f(x)
    y = a*sqrt(1+2*e*cos(x))/((1+e*cos(x))**2);
    /*s(θ) の被積分関数を定義*/
endfunction
t=linspace(-5,5,301);
/*区間 [-5,5] を 300 等分する分点。t は t1 から t301 までの 301 次元ベクトル。区間、分点をこの数値にする必要はない*/
for n = 1:301
    s(n) = quad("f",0,t(n));
    /*quad は第 2 引数から第 3 引数までの区間で f を積分するコマンド。
for 文で 1 から 301 まで回す*/
end
r = a./(1+e*cos(t));
/* ./ はベクトルの演算。r は 301 次元ベクトルとなる*/
x = s + r.*(-e*sin(t))./sqrt(1+2*e*cos(t)+e**2); /*焦点の x 座標*/
y = r.*(1+e*cos(t))./sqrt(1+2*e*cos(t)+e**2);
/*焦点の y 座標。x,y 共に 301 次元ベクトル*/
plot (x,y);
このようにして解き、gnuplot で出力した結果が次の図 3 である。
    
```

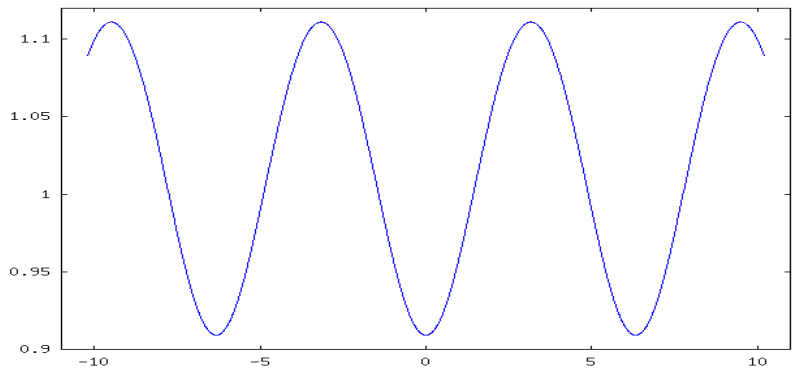


図 3: 楕円を転がしたときの焦点の軌跡 ($\epsilon = 0.1, [-5,5]$ を 300 分割)

放物線の場合は、楕円と同じ方法で $\epsilon = 1$ とすればよい。ただし、 $\theta = \pm\pi$ で r が発散してしまうので、区間を小さくした。

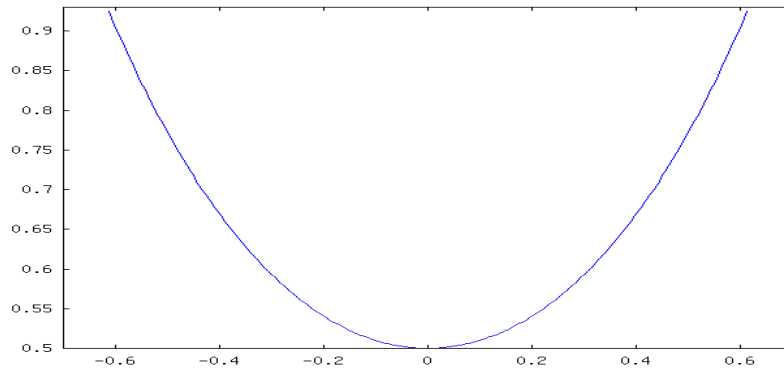


図 4: 放物線を転がしたときの焦点の軌跡 ($\epsilon = 1, [-2, 2]$ を 200 分割)

最後は双曲線である。

双曲線を定直線に沿って転がしていくと、接点は無限遠点に近づき、接線は漸近線に近づく。

ここまで動いたときの焦点の軌跡は次のようになる。

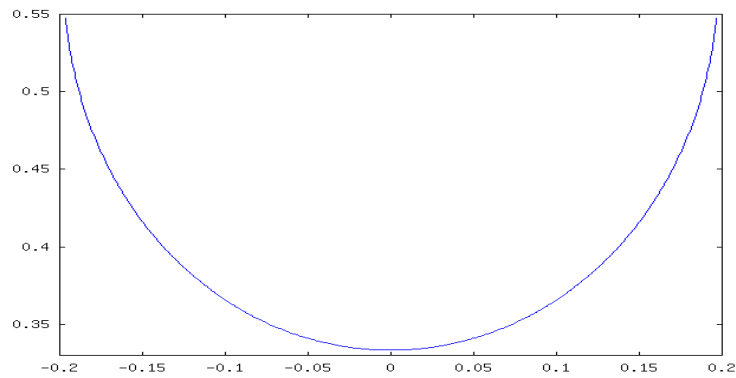


図 5: 双曲線の焦点の軌跡 (一部)

この極限の状態になるともう転がせないで、今度は双曲線のもう一方の側を定直線に沿って転がしていく。このとき焦点の軌跡は、今軌跡を考えている焦点ではないもう一方の焦点の軌跡と同じ形になる。よってもう一方の焦点の軌跡（座標）を求める必要があるので、次の図のように考える。

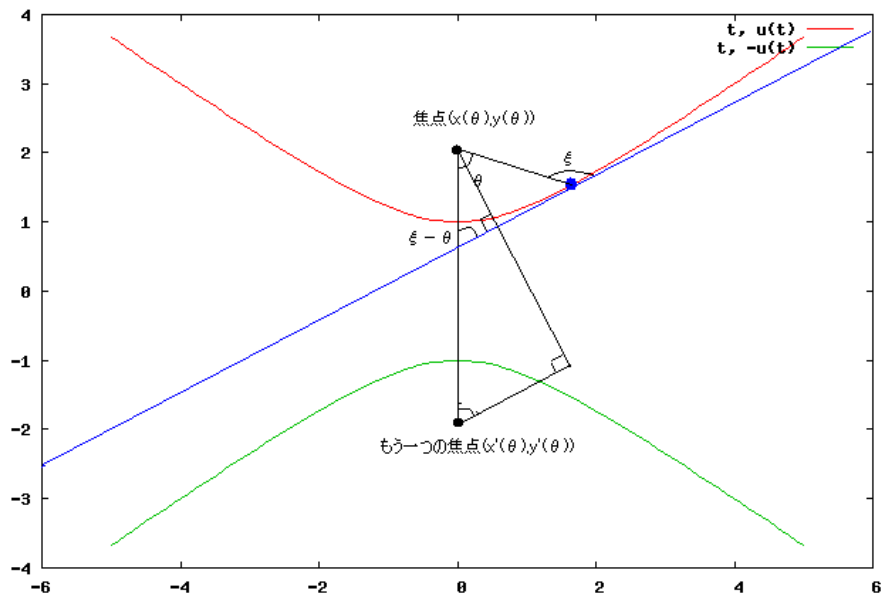


図 6: 双曲線の 2 焦点

双曲線の極座標表示は (4) で与えられていたので、これから焦点間の距離を求めることができる。

一般に、 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, b > a > 0$ の形の双曲線の焦点間の距離は $2\sqrt{a^2 + b^2}$ であることから、(5) より、焦点間の距離は $\frac{2a\epsilon}{\epsilon^2 - 1}$ である。

よって図 (6) より、軌跡を考えている焦点の座標を $(x(\theta), y(\theta))$ とすると、もう一方の焦点の座標は

$$\left(x(\theta) - \frac{2a\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \cos(\xi - \theta), y(\theta) - \frac{2a\epsilon}{\epsilon^2 - 1} \sin(\xi - \theta) \right)$$

となる。これをプロットしたものが次の図である。

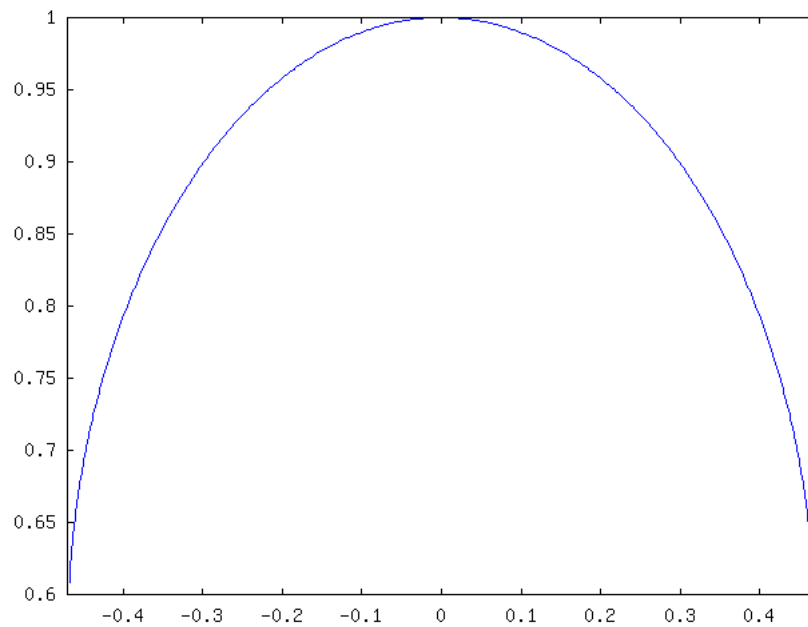


図 7: もう一方の焦点の軌跡 (を反転させたもの)

図5と図7を繰り返しつなぎ合わせていくと、双曲線の焦点の軌跡となる。それが図8である。

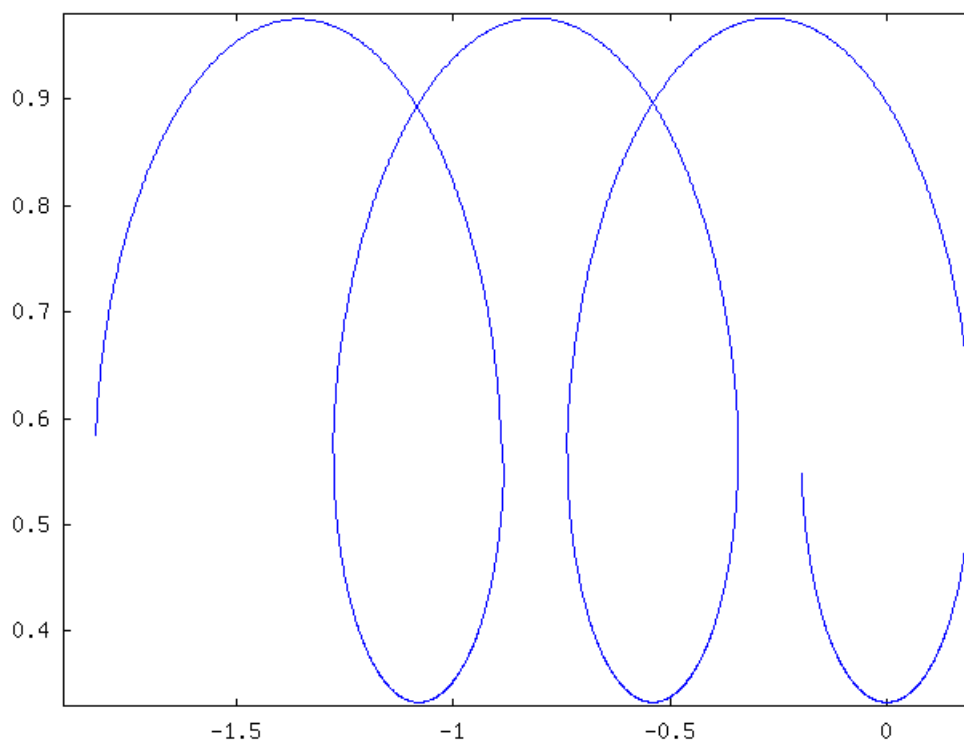


図 8: 双曲線を転がしたときの焦点の軌跡 ($\epsilon = 2$)

参考文献:

- 1 梅原雅顕・山田光太郎 (共著), 曲線と曲面-微分幾何的アプローチ, 裳華房,(2002)
- 2 栄伸一郎・山田光太郎 (共著), 若山正人 (編), パターン形成の数理/技術者のための微分幾何入門, 講談社,(2008)