提出日　２００９年7月２９日
講義名　MMA 講究 A
　担当　山田　光太郎　先生

MMA 講究 A　第３回まとめレポート

学生番号　2MA09056N
氏名　甲斐　佑太

課題：
適当な周期関数 $H(s)$ を与え, それを平均曲率に持つような回転面の中から周期的となるものを探す.

1 対応する曲面が常に周期的となるような, 定数でない $H(s)$ を一つ見付け, 対応する回転面のいくつかを描画しなさい.

2 対応する曲面のうちただ一つが周期的になるような $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する周期的な回転面と, 周期的でない回転面を描画しなさい.

3 対応する曲面のうちただ一つの母線が閉曲線になるような $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する閉曲線から得られる回転面と, そうでない回転面を描画しなさい.

4 対応する曲面のどれもが周期的にならないような関数 $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する回転面を描画しなさい.

以下では, 回転面と表記する際は平面曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ を x 軸の周りに回転させて得られる回転面

$$(x(s), y(s)\cos\theta, y(s)\sin\theta)$$

を意味するものとする. なお平面曲線 γ をこの回転面の母線という.
課題に解答するにあたりいくつかの定義, 定理を必要とするので, まず準備としてそれらを述べておく.

<u>定義.</u>
弧長 s によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ から得られる回転面が周期的であるとは,

$$x(s+L) = x(s) + a \quad , \quad y(s+L) = y(s)$$

となる 0 でない定数 L および実数 a が存在することである.

<u>補題 1.</u>
周期 L の周期関数 $\kappa(s)$ を曲率に持つ弧長 s によりパラメータ付けられた平面曲線 $\sigma(s) = (\xi(s), \eta(s))$ に対し, ある $A \in SO(2), \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ が存在して

$$\begin{pmatrix} \xi(s+L) \\ \eta(s+L) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \mathbf{b} \tag{1}$$

が成り立つ. 特にある s_0 に対して

$$(\xi(s_0),\eta(s_0))=(0,0) \quad , \quad (\xi'(s_0),\eta'(s_0))=(1,0) \tag{2}$$

($'$ は弧長 s での微分を表す) であるならば,

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{3}$$

である. ただし,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_0^L \kappa(u)du \\
a &= \int_{s_0}^{s_0+L} \cos\left(\int_{s_0}^u \kappa(t)dt\right) du \\
b &= \int_{s_0}^{s_0+L} \sin\left(\int_{s_0}^u \kappa(t)dt\right) du
\end{aligned}$$

である.

[証明]:
$\kappa(s+L)=\kappa(s)$ より, 曲線論の基本定理から (1) 式の $A,\mathbf{b}$ は存在する.
よって補題の条件 (2) の下で (3) の形で書ける事を示せばよい.
平面曲線 $\sigma(s)=(\xi(s),\eta(s))$ は $\kappa(s)$ を曲率に持つので, 条件 (2) を加味すると次のように書ける.

$$(\xi(s),\eta(s)) = \int_{s_0}^s \left(\cos\left(\int_{s_0}^u \kappa(t)dt\right), \sin\left(\int_{s_0}^u \kappa(t)dt\right)\right) du$$

よって,

$$\begin{aligned}
\xi'(s+L) &= \cos\left(\int_{s_0}^{s+L} \kappa(t)dt\right) \\
&= \cos\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt + \int_{s}^{s+L} \kappa(t)dt\right) \\
&= \cos\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt + \alpha\right) \\
&= \cos\alpha\cos\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt\right) - \sin\alpha\sin\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt\right)
\end{aligned}$$

同様に,

$$\eta'(s+L) = \sin\alpha\cos\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt\right) + \cos\alpha\sin\left(\int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt\right)$$

であるので,

$$\begin{pmatrix} \xi'(s+L) \\ \eta'(s+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'(s) \\ \eta'(s) \end{pmatrix}$$

となる. またこの式の両辺を s_0 から s まで積分すると,

$$\begin{pmatrix} \xi(s+L) - \xi(s_0+L) \\ \eta(s+L) - \eta(s_0+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(s) - \xi(s_0) \\ \eta(s) - \eta(s_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi(s+L) \\ \eta(s+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(s_0+L) \\ \eta(s_0+L) \end{pmatrix}$$

となり, $A, \mathbf{b}$ 共に (3) の形で書ける. [証明終]

定理 1(前田 [5]).
弧長 s によりパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ から得られる回転面の平均曲率が $H(s)$ ならば, 曲率 $2H(s)$ の平面曲線

$$\sigma(s) = (\xi(s), \eta(s))$$

が存在して,

$$x(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\xi'(u)\eta(u) - \xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2 + (\eta(u))^2}} du + c \quad (4)$$

$$y(s) = \sqrt{(\xi(s))^2 + (\eta(s))^2} \quad (5)$$

と書ける. ただし c は定数である.
証明は参考文献 [5] を参照されたい. この定理 1 によって, 曲率 $2H(s)$ を持つ平面曲線 σ から平均曲率 $H(s)$ を持つ回転面を作ることができる.

補題 2.
定理 1 において, 恒等的に 0 でない関数 $H(s)$ が周期 L の周期関数ならば

$$\begin{pmatrix} \xi(s+L) \\ \eta(s+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (6)$$

と書ける. また, γ から得られる回転面が周期 L で周期的であることと $a = b = 0$ であることは同値である.

[証明]:
上式のように書けることは補題 1 からわかる. また定理 1 より, 回転面の母線は (4)(5) 式で表される.

γ から得られる回転面が周期 L で周期的であるとすると, 回転面の母線の y 座標, 即ち (5) 式は周期 L の周期関数となる. ここで, y が周期 L の周期関数であることを表す式 $y(s+L)=y(s)$ は次式と同値である.

$$\xi^2(s+L)+\eta^2(s+L) \quad = \quad \xi^2(s)+\eta^2(s)$$

ここに (6) 式を代入すると,

$$\begin{aligned}
&(\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha+a)^2+(\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha+b)^2=\xi^2+\eta^2 \\
&2(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\xi+2(-a\sin\alpha+b\cos\alpha)\eta+a^2+b^2=0 \qquad (7)
\end{aligned}$$

(7) 式を ξ,η に関する恒等式と見れば, ξ,η がある直線上にある, もしくは ξ,η の係数が 0 であることがわかる.
もし ξ,η が直線上にあるならば曲線 σ の曲率 $2H(s)$ は 0 となり, 仮定に反する. よって ξ,η の係数が 0 となり, これを (7) に代入すると $a^2+b^2=0$, 即ち $a=b=0$ となる.
これで, γ から得られる回転面が周期的であるならば $a=b=0$ であることが示せた.

逆に, $a=b=0$ とすると, ここまでの議論により y は周期 L の周期関数となる. あとは, $x(s+L)=x(s)+c$ (c は定数) となることを示せばよい.
$a=b=0$ より, (6) を用いると

$$\begin{aligned}
&\xi'(s+L)\eta(s+L)-\xi(s+L)\eta'(s+L) \\
&=(\xi'(s)\cos\alpha-\eta'(s)\sin\alpha)(\xi(s)\sin\alpha+\eta(s)\cos\alpha) \\
&-(\xi(s)\cos\alpha-\eta(s)\sin\alpha)(\xi'(s)\sin\alpha+\eta'(s)\cos\alpha) \\
&=\xi'(s)\eta(s)-\xi(s)\eta'(s)
\end{aligned}$$

よって x の式の被積分関数は周期 L の周期関数である. 従って任意の s に対し,

$$\int_s^{s+L}\frac{\xi'(u)\eta(u)-\xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2+(\eta(u))^2}}du \quad = \quad const.$$

(左辺)$=x(s+L)-x(s)$ より, $x(s+L)-x(s)$ は定数となる. これで, $a=b=0$ ならば γ から得られる回転面が周期的であることが示せた.
よって, 以上をまとめると, γ から得られる回転面が周期的であることと $a=b=0$ であることが同値となる. [証明終]

さて, 定理 1 において, 曲線 σ を回転・平行移動させることを考える.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}(s) \\ \tilde{\eta}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix}$$

のように回転させて得られる平面曲線 $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ も曲率は $2H(s)$ である. 簡単な計算により,

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}'\tilde{\eta} - \tilde{\xi}\tilde{\eta}' &= \xi'\eta - \xi\eta' \\ \tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 &= \xi^2 + \eta^2 \end{aligned}$$

であることがわかるので, 回転に関して回転面の母線 x, y は不変である.
平行移動に関しては x, y が変わりうるので考察の必要がある.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}(s) \\ \tilde{\eta}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \mathbf{c} \quad , \quad (\mathbf{c} \in \mathbf{R}^2)$$

とおくと, 曲線 $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ の曲率は変わらず $2H(s)$ である.
$H(s)$ が周期 L の周期関数ならば, 補題 1 からある $A \in SO(2), \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ が存在し,

$$\begin{pmatrix} \xi(s+L) \\ \eta(s+L) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \mathbf{b}$$

と表せるので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(s+L) \\ \tilde{\eta}(s+L) \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ &= A \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(s) \\ \tilde{\eta}(s) \end{pmatrix} - A\mathbf{c} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ &= A \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(s) \\ \tilde{\eta}(s) \end{pmatrix} + \mathbf{b} - (A - id)\mathbf{c} \qquad (8) \end{aligned}$$

となる. ここで id は 2 次の単位行列である. よって $A \in SO(2)$ より, もし $A \neq id$ ならば $A - id$ は正則となるので, $\mathbf{c} = (A - id)^{-1}\mathbf{b}$ とおけば補題 2 によって $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ からできる回転面が周期的となる.
また, もし $A = id$ ならば, $\mathbf{b} \neq 0$ と $\mathbf{b} = 0$ で場合分けして考える.
$\mathbf{b} \neq 0$ のときは, 補題 2 より曲線 σ は周期的にならず, (8) よりどのように平行移動させても周期的にはならない. 即ち, 対応する回転面で周期的なものは存在しない.
$\mathbf{b} = 0$ のときは, 補題 2 より曲線 σ は周期的であり, 任意に平行移動させてもやはり周期的となる. 即ち, 対応する回転面はすべて周期的である.

以上をまとめると, 次の定理が導かれる.

定理 2.
周期 L をもつ周期関数 $H(s)$ と, 曲率 $2H(s)$ の平面曲線 γ_0 を一つとり, さらに

$$\gamma_0(s+L) = A\gamma_0(s) + \mathbf{b} \qquad (A \in SO(2), \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2)$$

となるように $A, \mathbf{b}$ をとる. すると,

(i) もし $A \neq id$ ならば, 曲率 $2H$ をもつ曲線 γ_P で, 対応する回転面の母線が周期 L で周期的になるものが（回転を除いて）唯一つ存在する.

(ii) もし $A = id$ かつ $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ならば, 対応する回転面で周期的なものは存在しない.

(iii) もし $A = id$ かつ $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 即ち γ_0 が閉曲線ならば, 対応する回転面はすべて周期的である.

この定理 2 を用いて, 課題に解答する.

1

対応する曲面が常に周期的となるような, 定数でない $H(s)$ を一つ見付け, 対応する回転面のいくつかを描画しなさい.

定数 k に対して $H(s) = k\cos(s)$ とおく. これは周期 2π の周期関数である. この時,

$$\int_0^u 2H(s)ds = 2k\sin(u)$$

であるので, 曲率 $2H(s)$ をもつ平面曲線 (ξ, η) は次のように構成できる.

$$(\xi(s), \eta(s)) = \int_0^s (\cos(2k\sin(u)), \sin(2k\sin(u)))\,du$$

この平面曲線は補題 1 の条件 (2) を $s_0 = 0$ において満たし, 補題 1 の記号を用いれば,

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ a &= \int_0^{2\pi} \cos(2k\sin(u))du \\ b &= \int_0^{2\pi} \sin(2k\sin(u))du = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $a = 0$ となるような k を数値計算によって求めると, $k = 1.2025$ となる. なお, 数値計算には Octave を用いた.
よってこのとき $A = id, \mathbf{b} = \mathbf{0}$ となるので定理 2 より, 対応する回転面は全て周期的となる.
従って $H(s) = 1.2025\cos(s)$ が求める周期関数の一つである.

次に回転面を描画しよう. なお, 描画の方法は Octave による数値計算結果を gnuplot で表示させるものとする.
$H(s) = 1.2025\cos(s)$ として, 曲率 $2H$ をもつ平面曲線 (ξ, η) を

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \int_0^s \cos(2.405\sin(u))du \\ \eta(s) &= \int_0^s \sin(2.405\sin(u))du \end{aligned}$$

と定める. この場合, Octave に次のように打ち込めばよい.

```
s=linspace(0,4*pi,300);
function y=f(x)
        y=cos(2.405*sin(x));
```

```
        endfunction
function y=g(x)
        y=sin(2.405*sin(x));
        endfunction
for n=1:300
        K(n)=quad("f",0,s(n));
        E(n)=quad("g",0,s(n));
        Y(n)=sqrt(K(n)*K(n)+E(n)*E(n));
        h(n)=(f(s(n))*E(n)-K(n)*g(s(n)))/Y(n);
        end
T=s(2)-s(1);
X(1)=h(1)*T;
for n=2:300
        X(n)=X(n-1)+h(n)*T;
        end
t=linspace(0,2*pi,20);
for n=1:300
        for N=1:20
                P(20*(n-1)+N)=X(n);
                Q(20*(n-1)+N)=Y(n)*cos(t(N));
                R(20*(n-1)+N)=Y(n)*sin(t(N));
                end
        end
plot3 (P, Q, R);
```

これは, 与えられた $H(s)$ (このプログラムでは $H(s) = 1.2025\cos(s)$) を平均曲率に持つ回転面を描くプログラムであり, 定理 1 を Octave 上で実行するものである. プログラム内の記号 s, K, E は, それぞれ定理 1 における積分区間, $\xi(s)$, $\eta(s)$ に対応している. 上部で定義されている関数 f, g を $H(s)$ によって変えたり, K, E を適当に平行移動させたりすることで色々な回転面を描くことができる. 以後の課題に対しても, このプログラムによって回転面を描画することとする.

実際に $(\xi + 1, \eta)$ からできる回転面およびその母線は次のようになる.

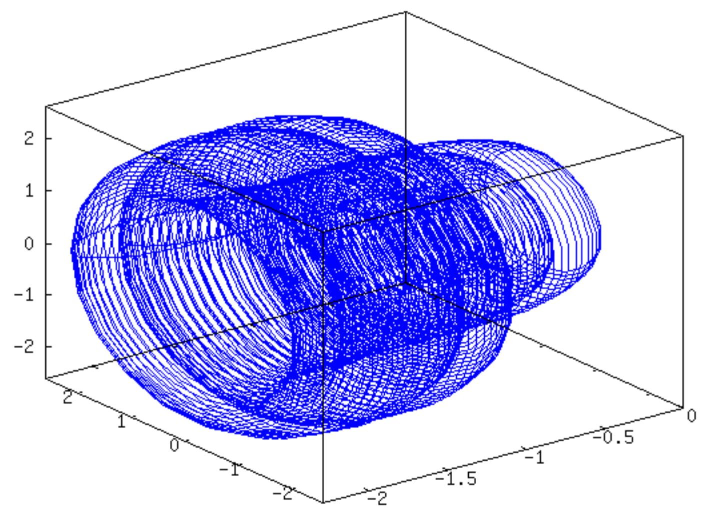

図 1: $(\xi + 1, \eta)$ に対応する回転面

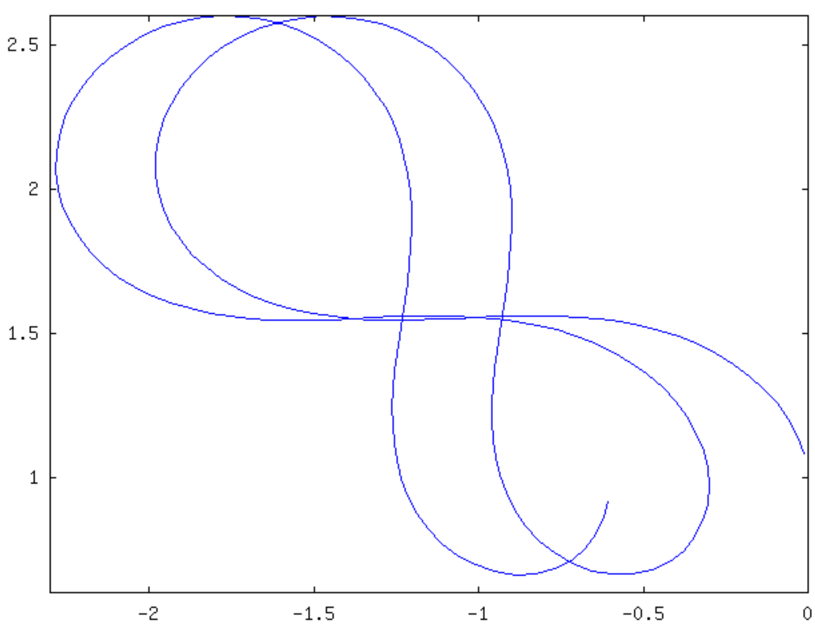

図 2: 回転面の母線（2周期分）

ここで $\xi+1$ としたのは, 母線の y 座標を正にとるためである.
また, $(\xi,\eta+2)$ からできる回転面およびその母線は次のようになる.

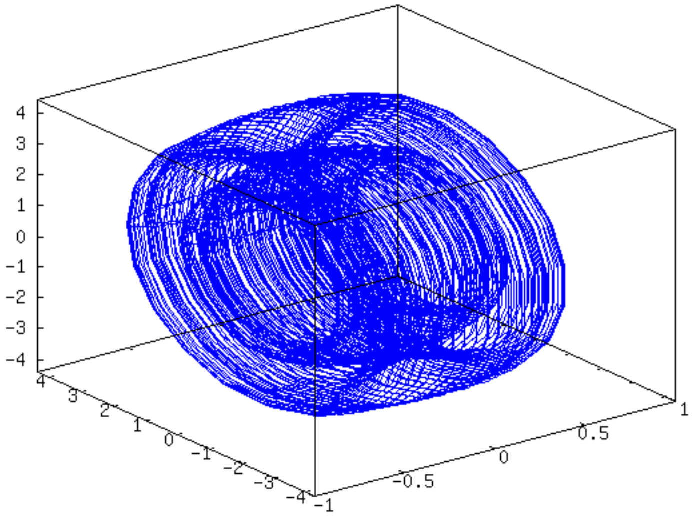

図 3: $(\xi,\eta+2)$ に対応する回転面

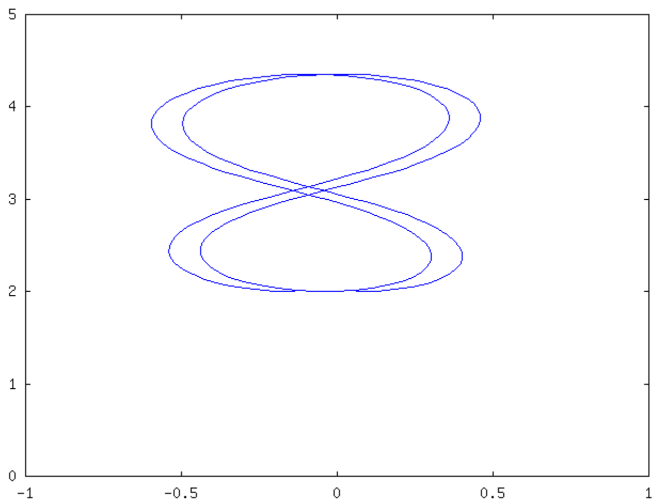

図 4: 回転面の母線（２周期分）

2

対応する曲面のうちただ一つが周期的になるような $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する周期的な回転面と, 周期的でない回転面を描画しなさい.

$H(s) = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2}\cos(s)$ とおく. これは周期 2π の周期関数である. 課題 1 と同様に,

$$\int_0^u 2H(s)ds \quad = \quad \frac{u}{2\pi} + \sin(u)$$

であるので, 曲率 $2H(s)$ をもつ平面曲線 (ξ, η) は次のように構成できる.

$$(\xi(s), \eta(s)) = \int_0^s \left(\cos\left(\frac{u}{2\pi} + \sin(u)\right), \sin\left(\frac{u}{2\pi} + \sin(u)\right)\right) du$$

この平面曲線は補題 1 の条件 (2) を $s_0 = 0$ において満たし, 補題 1 の記号を用いれば,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ a &= \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{u}{2\pi} + \sin(u)\right) du \\ b &= \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{u}{2\pi} + \sin(u)\right) du \end{aligned}$$

が成り立つ. $A \neq id$ なので定理 2 より, (ξ, η) からできる回転面は周期的にならず,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}(s) \\ \tilde{\eta}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{c} = (A - id)^{-1}\mathbf{b}$$

と平行移動させた平面曲線 $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ からできる回転面のみ周期的になる.

実際に $(\xi+1, \eta+1)$ からできる回転面およびその母線は次のようになる.

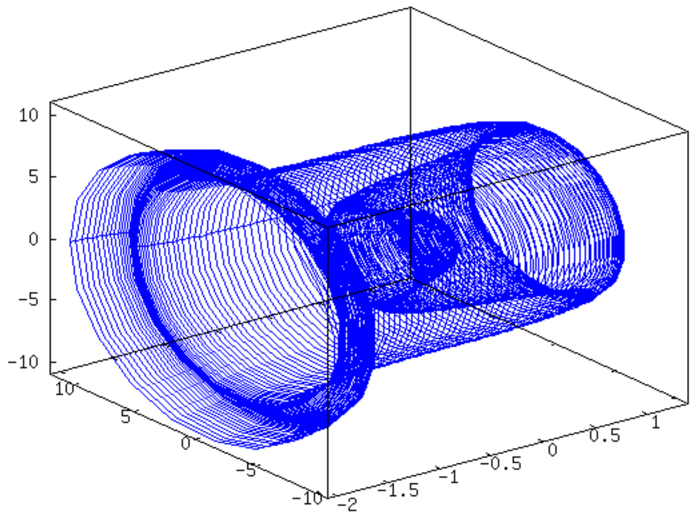

図 5: $(\xi+1,\eta+1)$ に対応する回転面

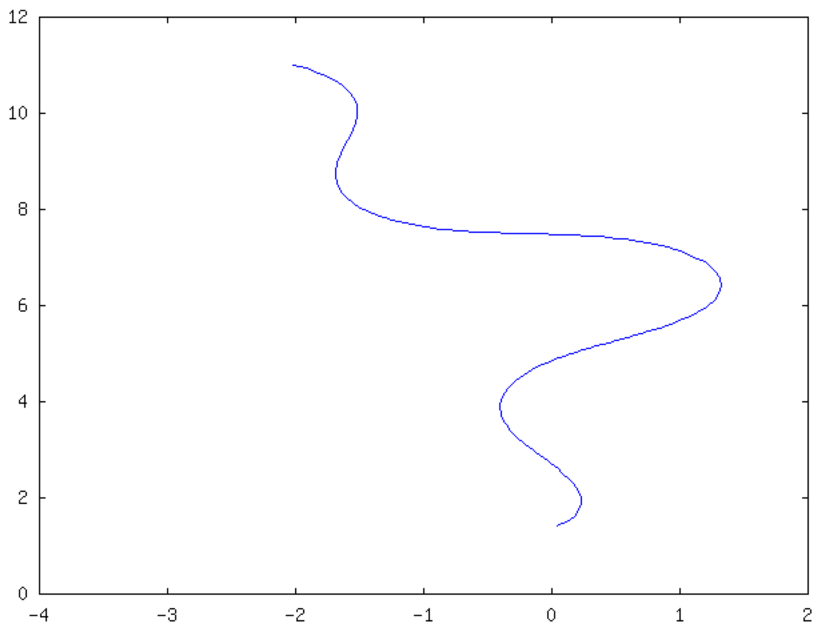

図 6: 回転面の母線（2 周期分）

また $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ からできる回転面およびその母線は次のようになる.

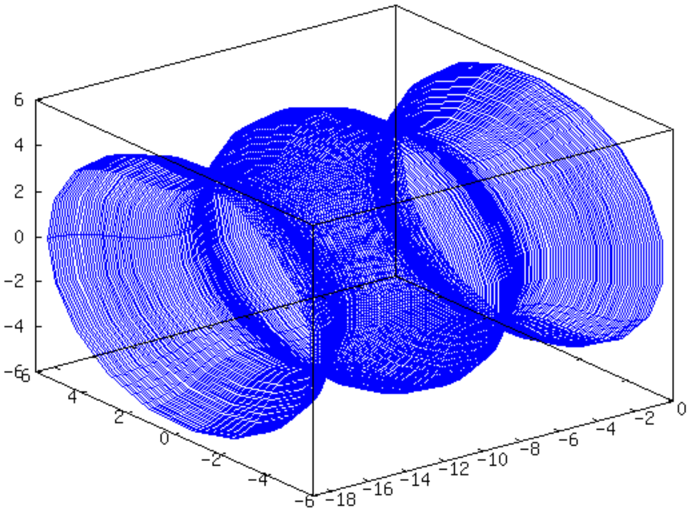

図 7: $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ に対応する回転面

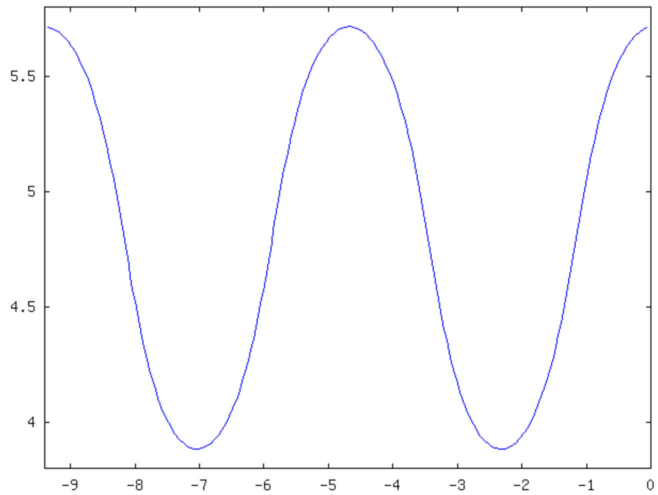

図 8: 回転面の母線（２周期分）

3

対応する曲面のうちただ一つの母線が閉曲線になるような $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する閉曲線から得られる回転面と, そうでない回転面を描画しなさい.

条件を満たす $H(s)$ を闇雲に探していくのは難しいので, 適当な閉曲線を取り, それを母線とする回転面の平均曲率を求めて $H(s)$ と定めるという方法をとる.
弧長 s によってパラメータ付けられた平面曲線 $(x(s), y(s))$ ($y > 0$ とする) から得られる回転面の平均曲率 $H(s)$ は, 次式で与えられる.

$$H(s) \;=\; \frac{1}{2}\left(x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) - \frac{x'(s)}{y(s)}\right)$$

これを事実として用いることにし, 今, 次のような曲線を考える.

$$x(s) = \cos(s) \quad , \quad y(s) = \sin(s) + 2$$

これは弧長 s でパラメータ付けられた円であり, y 軸に触れないように y 軸方向に 2 だけ平行移動させてある.
この円を母線とする回転面の平均曲率 $H(s)$ は, 上式より

$$H(s) \;=\; \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin(s)}{\sin(s)+2}\right)$$

となり, 周期 2π の周期関数である. 課題 1 と同様に, 曲率 $2H(s)$ をもつ平面曲線 (ξ, η) は次のように構成できる.

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \int_0^s \cos\left(\int_0^u \left(1 + \frac{\sin(t)}{\sin(t)+2}\right) dt\right) du \\
\eta(s) &= \int_0^s \sin\left(\int_0^u \left(1 + \frac{\sin(t)}{\sin(t)+2}\right) dt\right) du
\end{aligned}$$

この平面曲線は補題 1 の条件 (2) を $s_0 = 0$ において満たし, 補題 1 の記号を用いれば, 数値計算によって

$$\begin{aligned}
\alpha &= 5.3112 \\
a &= \int_0^{2\pi} \cos\left(\int_0^u \left(1 + \frac{\sin(t)}{\sin(t)+2}\right) dt\right) du = -0.84129 \\
b &= \int_0^{2\pi} \sin\left(\int_0^u \left(1 + \frac{\sin(t)}{\sin(t)+2}\right) dt\right) du = -1.6525
\end{aligned}$$

となる. $\cos(\alpha) = 0.56366$ より $A \neq id$ なので, 定理 2 より (ξ, η) からできる回転面は周期的にならず,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}(s) \\ \tilde{\eta}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{c} = (A - id)^{-1}\mathbf{b}$$

と平行移動させた平面曲線 $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ からできる回転面のみ周期的になる．さらに，この時 $H(s)$ の作り方から回転面の母線は円になるはずである．
実際に $(\xi+1, \eta+1)$ からできる回転面およびその母線は次のようになる．

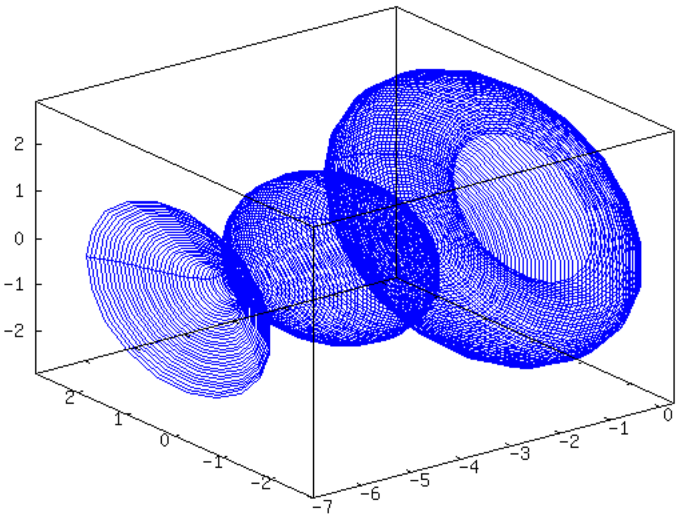

図 9: $(\xi+1, \eta+1)$ に対応する回転面

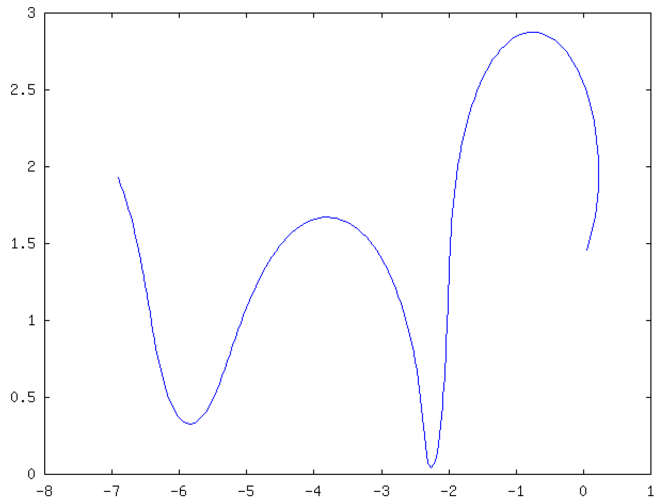

図 10: 回転面の母線（２周期分）

また $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ からできる回転面およびその母線は次のようになる.

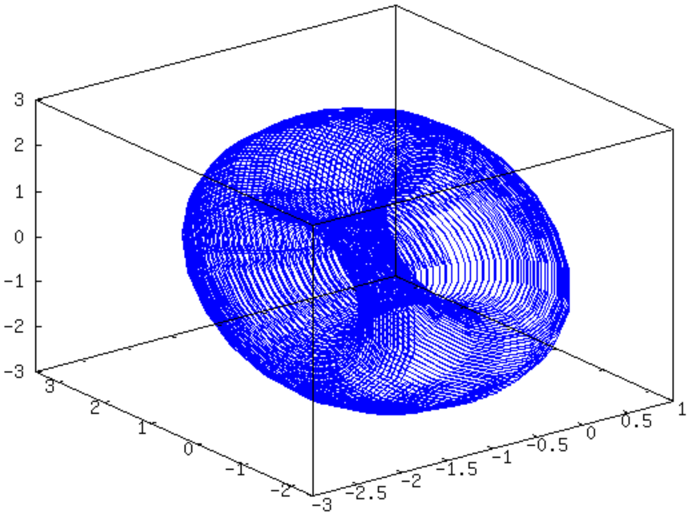

図 11: $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ に対応する回転面

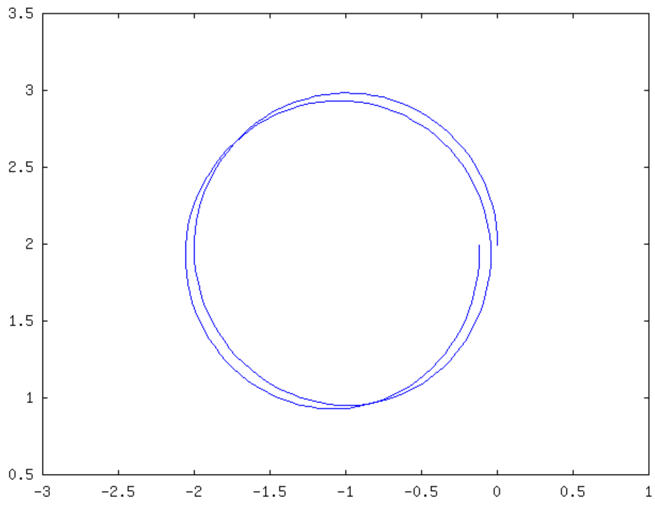

図 12: 回転面の母線（２周期分）

数値計算による誤差のためか少しずれているが, ほぼ円状になった.

4

対応する曲面のどれもが周期的にならないような関数 $H(s)$ を一つ挙げ, 対応する回転面を描画しなさい.

$H(s) = \frac{1}{2}\cos(s)$ とおく. これは周期 2π の周期関数である. 課題 1 と同様に, 曲率 $2H(s)$ をもつ平面曲線 (ξ, η) は次のように構成できる.

$$(\xi(s), \eta(s)) = \int_0^s (\cos(\sin(u)), \sin(\sin(u)))\, du$$

この平面曲線は補題 1 の条件 (2) を $s_0 = 0$ において満たし, 補題 1 の記号を用いれば,

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ a &= \int_0^{2\pi} \cos(\sin(u))\, du \\ b &= \int_0^{2\pi} \sin(\sin(u))\, du = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. 数値計算によると $a = 4.8076$ であるので $A = id, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ となり, 定理 2 より, 対応する回転面で周期的なものは存在しない.

実際に, $(\xi + 1, \eta)$ からできる回転面およびその母線は次のようになる.

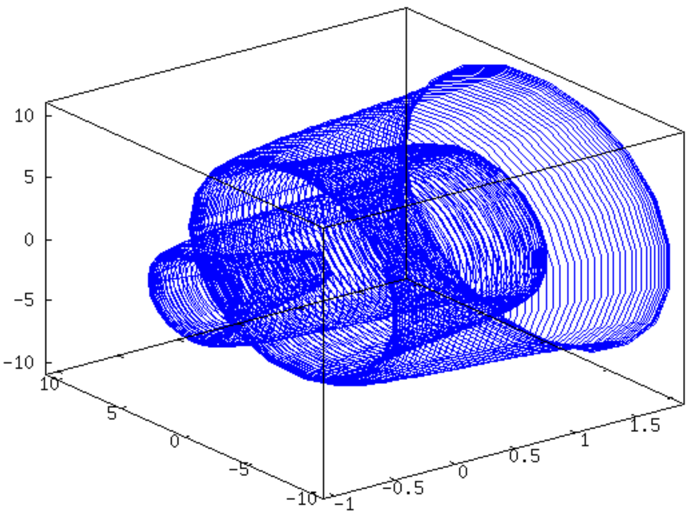

図 13: $(\xi + 1, \eta)$ からできる回転面

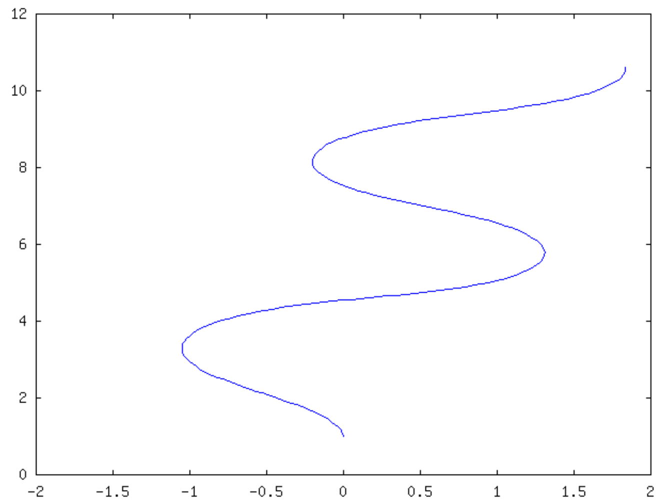

図 14: 回転面の母線（2 周期分）

以上をもってレポートを終える.

参考文献:
[1] 梅原雅顕・山田光太郎 (共著) , 曲線と曲面-微分幾何的アプローチ , 裳華房 , (2002)
[2] 栄伸一郎・山田光太郎 (共著) , 若山正人 (編) , パターン形成の数理/技術者のための微分幾何入門 , 講談社 , (2008)
[3] K.Kenmotsu , *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature* , Tohoku Math.J. , **32**(1980) , 147-153.
[4] K.Kenmotsu , *Surfaces of revolution with periodic mean curvature* , Osaka J.Math. , **40**(2003) , no.3 , 687-696.
[5] 前田俊一「あたえられた平均曲率をもつ回転面の構成について」, 修士学位論文 , 2003 , 九州大学大学院数理学府.