MMA 講究 A レポート (5/11〆切)

酒井 椋三　　2MA09057E

1

曲率 $\kappa(s)=s$ に対応する曲線 γ は、クロソイドである。これをうまく描画できればよい。コンピュータで描画するにあたり、まずは手っ取り早く媒介変数表示を考えてみることにする。すると、

$$\gamma(s)=\left(x_0+\int_{s_0}^{s}\cos(\frac{x^2}{2}-\frac{s_0^2}{2}+\theta_0)dx\ ,\ y_0+\int_{s_0}^{s}\sin(\frac{x^2}{2}-\frac{s_0^2}{2}+\theta_0)dx\right)$$

のようになる。（ここで、s_0 は s の初期値である。x_0 と y_0 は $s=s_0$ における座標、すなわち始点を、θ_0 は始点での速度ベクトルの向きを表している。）

ここに登場する積分はフレネル積分と呼ばれ、初等関数で表せないことがわかっている。

そこで、別の方法を考えてみる。

一般に、曲率が $\kappa(s)$ と与えられているとき、曲線 γ は、

$$\gamma(s)=(x\ ,\ y)=\left(x_0+\int_{s_0}^{s}\cos\theta(x)dx\ ,\ y_0+\int_{s_0}^{s}\sin\theta(x)dx\right)$$

$$\theta(x)=\int_{s_0}^{x}\kappa(t)dt+\theta_0$$

と表せることが知られている。この $\gamma(s)$ の式は、

$$\gamma(s)^T=\begin{pmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int_{s_0}^{s}\cos(\int_{s_0}^{x}\kappa(t)dt)dx\\ \int_{s_0}^{s}\sin(\int_{s_0}^{x}\kappa(t)dt)dx\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

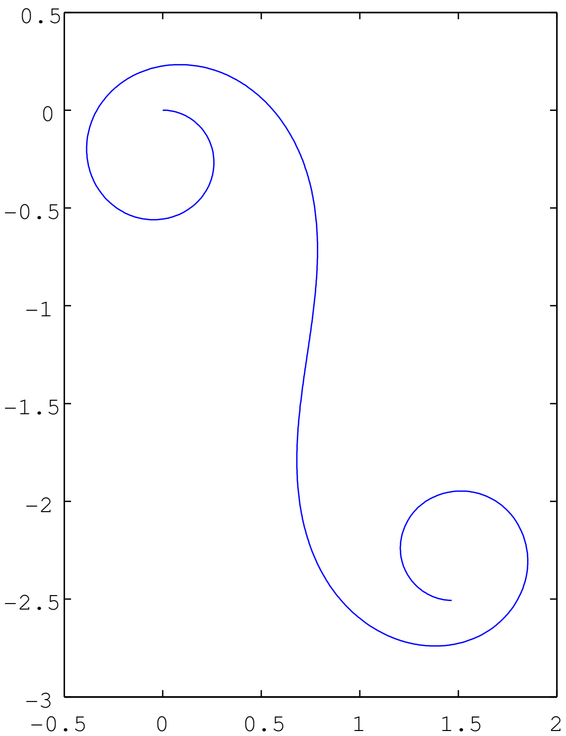
と変形できるので、定数 θ_0 は図形の回転、x_0 と y_0 は平行移動の任意性と対応しているといえる。

この式を微分方程式の形で表現すると、

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{ds}&=\kappa\\ \frac{dx}{ds}&=\cos\theta\\ \frac{dy}{ds}&=\sin\theta\end{aligned}$$

のようになる。これらの方程式を、適当な初期値を与えて解いてやればよい。

適当なソフトウェアとプログラム（今回は MATLAB を用いた）を用いて解く。初期値を $\theta_0=0$、$x_0=y_0=0$ とすると、次のような図形となる。



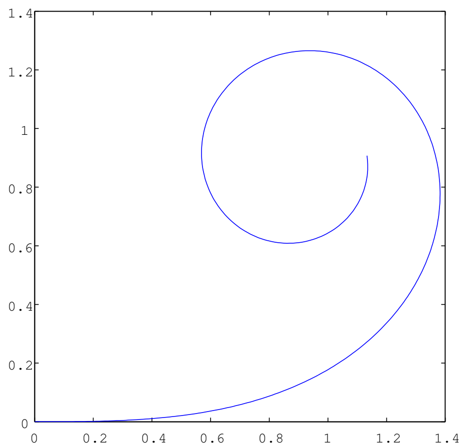
初期値 $s_0 = -4$、描画範囲は $-4 \leq s \leq 4$

さて、s の値を $s \to \infty$ としたときに、どのような挙動をとるかを知るには、媒介変数表示で表された曲線 $\gamma(s)$ の式について、$\lim_{s\to\infty} \gamma(s)$ を求めてやればよい。ただ、前頁の式では、回転と平行移動の任意性を考慮した式であったので、初期値は適当に使いやすい値をとってやることにする。

特に始点は原点に、速度ベクトルの方向を x 軸方向としておくことにすると、初期値は $x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$ とできる。そして、曲率が 0 となる $s = 0$ の点から見て、$\lim_{s\to\infty} s$ での点の行き先が如何なる点であるかを考察することにすると、さらに $s_0 = 0$ とできる。

その時、$\lim_{s\to\infty} \gamma(s)$ は、

$$\lim_{s\to\infty} \gamma(s) = \left(\int_0^\infty \cos \frac{x^2}{2} dx \, , \, \int_0^\infty \sin \frac{x^2}{2} dx \right)$$



初期値 $s_0 = x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$、描画範囲は $0 \leq s \leq 4$

実は、0 から ∞ までのフレネル積分値は、

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

とわかっている。これを適当に変数変換することで、

$$\lim_{s\to\infty} \gamma(s) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

となることがわかる。

クロソイドは、曲率が 0 となる点を中心に点対称である。

以上の事から、$s \to \pm\infty$ となると、$s = 0$ の点からその点での速度ベクトルに平行に $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 進み、その後、左に直角に曲がって $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 進んだような点に収束することがわかる。
（言葉にすると非常に変な感じになるが、図形の回転や平行移動の任意性を考慮すると、こういう言い回ししかないような気がします。）

2

曲線 $\gamma(s)$ が周期 L の閉曲線であるとは、任意の s で $\gamma(s)=\gamma(s+L)$ であり、またこの二点における γ の s に関する任意階数の微分が一致することである。

この問題では、既に $\gamma(s)$ の曲率がなめらかな関数 $\kappa(s)$ で与えられているので、特に $s=0$ において上の条件を満たせばよい。

ゆえに、以下の二つを必要条件と考えることが出来る。

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \gamma(L) \qquad (1) \\ \frac{d}{ds}\gamma(0) &= \frac{d}{ds}\gamma(L) \qquad (2) \end{aligned}$$

(1) は、「$s=0$ と $s=L$ の二点で座標が一致する」という意味であり、(2) は、「二点における γ の s に関する 1 階微分が一致する」という意味である。

(2) の条件を書き下すと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\gamma(0) &= \left(\cos(\int_{s_0}^{0}\kappa(t)dt+\theta_0)\,,\,\sin(\int_{s_0}^{0}\kappa(t)dt+\theta_0)\right) \\ &= \left(\cos(\int_{s_0}^{L}\kappa(t)dt+\theta_0)\,,\,\sin(\int_{s_0}^{L}\kappa(t)dt+\theta_0)\right)=\frac{d}{ds}\gamma(L) \end{aligned}$$

のようになるので、

$$\int_{s_0}^{L}\kappa(t)dt=\int_{s_0}^{0}\kappa(t)dt+\int_{0}^{L}\kappa(t)dt$$

とできることを考えると、(2) を満たす条件は、

$$\int_{0}^{L}\kappa(t)dt=2n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \qquad (3)$$

と記述できる。

(3) は s によらない式、つまり、

$$\frac{d}{ds}(\int_{0}^{L}\kappa(t)dt)=0$$

であり（問題の条件からでも良いが、）閉曲線 γ に対応する曲率 κ は周期 L の関数となるので、$\kappa(0)=\kappa(L)$ が成り立つ。

これらのことを使うと、(3) が満たされると、$s=0$ と $s=L$ の二点における γ の s に関する任意階数の微分が一致する事が証明される。

なぜなら、$\theta(s)=\int_{s_0}^{s}\kappa(t)dt+\theta_0$ と表すことにすると、

$$\frac{d}{ds}\theta(s)=\kappa(s)$$

であり、

$$\frac{d}{ds}\gamma(s)=(\cos\theta(s)\,,\,\sin\theta(s))$$

という形で表される。$\kappa(s)$ が周期 L のなめらかな関数という条件があるので、$\frac{d^n}{ds^n}\kappa(0)=\frac{d^n}{ds^n}\kappa(L)$ が成り立つ。ゆえに、

$$\frac{d^n}{ds^n}\theta(0)=\frac{d^n}{ds^n}\theta(L)\quad(n=1,2,3,\ldots)$$

が成り立つ。

このことから、$s=0$ と $s=L$ の二点における γ の s に関する任意階数の微分が一致するには、

$$\cos\theta(0)=\cos\theta(L)$$

$$\sin\theta(0)=\sin\theta(L)$$

を満たせば十分である。ゆえに、(3) を満たせば十分である。

したがって以上の事から、曲率 $\kappa(s)$ が周期 L のなめらかな周期関数で与えられたとき、

$$\begin{aligned}\gamma(0)&=\gamma(L)\\ \int_0^L\kappa(t)dt&=2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)\end{aligned}$$

を満たすとき、$\kappa(s)$ に対応する曲線 $\gamma(s)$ が閉曲線になる。

3

曲率 $\kappa(s)$ が、$\kappa(s)=\alpha\cos s$（α は定数）と与えられた時、$\kappa(s)$ は周期 2π のなめらかな周期関数であるから、$\kappa(s)$ に対応する曲線 $\gamma(s)$ が閉曲線となるのは、問題 2 より、

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \gamma(2\pi)\\ \int_0^{2\pi}\kappa(t)dt &= 2n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)\end{aligned}$$

を満たすときである。

ここで、

$$\int_0^{2\pi}\kappa(t)dt=\alpha\int_0^{2\pi}\cos t dt=0=2\pi\times 0$$

より、下の条件は α の値によらず満たしている。

よって、$\gamma(s)$ が閉曲線となるには、$\gamma(0)=\gamma(2\pi)$ を満たせばよい。

曲率 $\kappa(s)=\alpha\cos s$ が与えられているので、曲線 $\gamma(s)$ は、初期値を $x_0=y_0=\theta_0=0$ で与えたものを考えると、

$$\gamma(s)=\left(\int_{s_0}^{s}\cos(\alpha\sin t)dt\ ,\ \int_{s_0}^{s}\sin(\alpha\sin t)dt\right)$$

と表せる。（曲線の形は x_0、y_0、θ_0 の値によらないので、都合のいいものを入れて条件としても差支えがない。）

$\gamma(0)=\gamma(2\pi)$ を満たすように α を決定したいので、各成分を考え、展開して整理すると、

$$\int_0^{2\pi}\cos(\alpha\sin t)dt=0$$
$$\int_0^{2\pi}\sin(\alpha\sin t)dt=0$$

を満たすようにすればよいことがわかる。

ここで、式を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin(\alpha\sin t)dt &= \int_0^{\pi}(\sin(\alpha\sin t)+\sin(\alpha\sin(\pi+t)))dt\\ &= \int_0^{\pi}(\sin(\alpha\sin t)-\sin(\alpha\sin t)))dt\\ &= 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(\alpha \sin t) dt &= \int_0^{\pi} (\cos(\alpha \sin t) + \cos(\alpha \sin(\pi + t)))dt \\
&= 2 \times \int_0^{\pi} \cos(\alpha \sin t) dt
\end{aligned}
$$

以上の結果から、

$$
\int_0^{\pi} \cos(\alpha \sin t) dt = 0
$$

が成り立てばよい。つまり、上記の式が成り立つような α が存在することを言えばよい。

$$
f(\alpha) = \int_0^{\pi} \cos(\alpha \sin t) dt
$$

$$
g_\alpha(t) = \alpha \sin t
$$

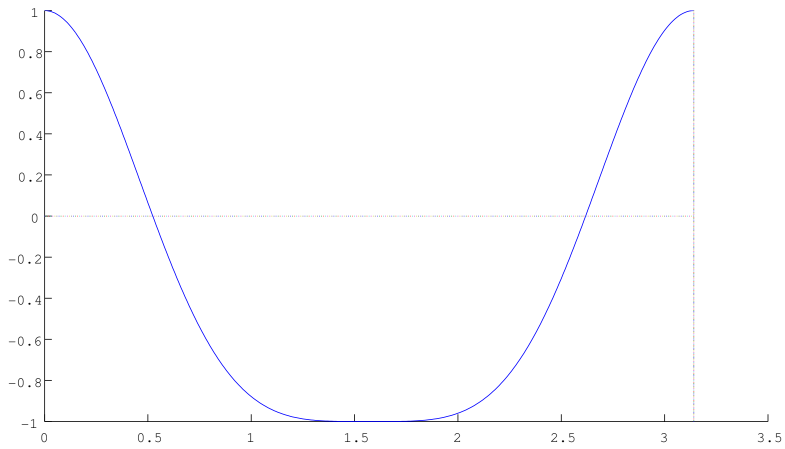
とする。$0 \leq t \leq \pi$ であれば $0 \leq \sin t$ であるから、$0 < \alpha < \beta < \pi$ のとき、$0 < \alpha \sin t < \beta \sin t < \pi \sin t \leq \pi$、つまり $0 < g_\alpha(t) < g_\beta(t) < \pi$ が成立する。

cos は $[0, \pi]$ で単調減少するので、以上の条件を満たせば、任意の t で $-1 = \cos \pi < \cos g_\beta(t) < \cos g_\alpha(t) < \cos 0 = 1$ を満たす。よって、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos g_\beta(t) dt &< \int_0^{\pi} \cos g_\alpha(t) dt \\
\int_0^{\pi} \cos(\beta \sin t) dt &< \int_0^{\pi} \cos(\alpha \sin t) dt \\
f(\beta) &< f(\alpha)
\end{aligned}
$$

よって、$f(\alpha)$ は、$0 < \alpha < \pi$ の区間で単調減少する。

ここで、きちんと $f(\pi) < 0$ を言うことができればよかったのですが、証明が難しかったので（わかりませんでした)、グラフを載せてお茶を濁すことにしました。



$y = cos(\pi \sin t)$ のグラフ

グラフから、なんとなく $f(\pi) < 0$ であることが読み取れます。

$f(0) = \pi > 0$ とあわせて、$f(\pi) < 0 < f(0)$ であり、f が単調減少する連続関数であるから、

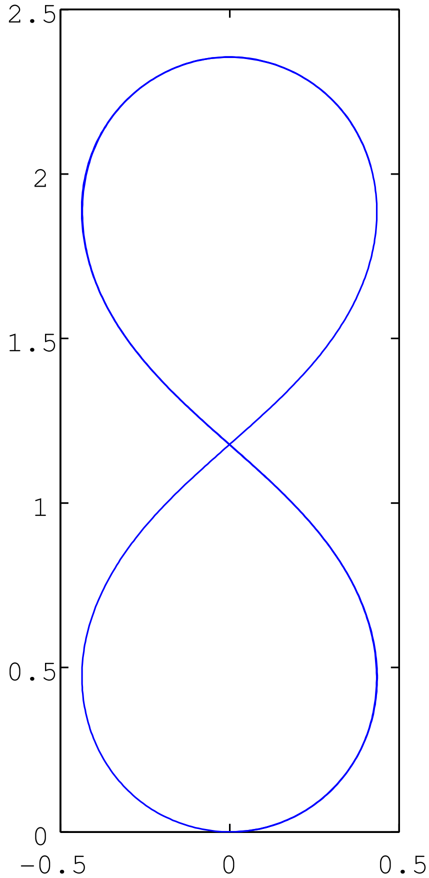
$$0 < {}^{\exists}\alpha < \pi \quad , \quad \int_0^{\pi} \cos(\alpha \sin t) dt = 0$$

といえる。

試行錯誤の結果（本当にいろんな値を代入し曲線を描いてみた）、α の値は 2.405 付近であることがわかりました。

4

問題 3 の最後で、α は 2.405 付近の値である、と結論付けた。



曲率 $\kappa(s) = \alpha \cos s$ に $\alpha = 2.405$ を代入したときの、曲線 $\gamma(s)$ の概形
初期値 $s_0 = x_0 = y_0 = \theta_0 = 0$、描画範囲 $0 \leq s \leq 4\pi$

このような結果となったので、α の値として 2.405 付近が怪しいと思いました。