MMA 講究 A レポート (6/4 出題分)

酒井 椋三　　2MA09057E

問題：

楕円、放物線、双曲線（二次曲線）を定直線 l の回りに滑らないように転がした時に、二次曲線の焦点が描く軌跡を直線 l を軸に回転させて得られる回転面の平均曲率が一定であることを示し、その母線を図示しなさい。

初めに、一般的な回転面の曲率の式を与える。

3 次直交座標系（右手系 xyz 軸を持つものとする。）の中の xy 平面上に曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ が描かれている状態を考える。これを x 軸を中心に曲線 γ を回転させ、それによってできる回転面を考える。

この曲面に特異点が出ないよう、曲線 γ は x 軸と交わらず、曲線 γ の速度ベクトル $\frac{d}{dt}\gamma$ が常に 0 にならないことを仮定しておく（正則条件）。

つまり、

$$y(t) \neq 0$$

$$\frac{d}{dt}\gamma = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t)\right) \neq 0$$

とする。

（注意）

以降、関数 x が一変数関数のとき、その変数による一回微分を x'、更にそれをその変数で微分したものを x'' というように、$'$ を用いて微分した式を表すことにする。また、複数の変数を持つ関数 $f(t, \theta)$ の t による偏微分は f_t、更にそれを θ で偏微分したものは $f_{t\theta}$ と順番に明記して表すことにする。以上の表記は場合により、併用することがある。

さて、曲線 γ を回転させてできる回転面 S のパラメータ表示としては、次のような表示が一般的である。

$$S(t, \theta) = (x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta)$$

これによって得られる曲面の平均曲率を求めてみる。

まずは、必要となる計算結果を提示しておく。

$$S_t = (x', y'\cos\theta, y'\sin\theta)$$

$$S_\theta = (0, -y\sin\theta, y\cos\theta)$$

$$S_{tt} = (x'', y''\cos\theta, y''\cos\theta)$$

$$S_{t\theta} = S_{\theta t} = (0, -y'\sin\theta, y'\cos\theta)$$

$$S_{\theta\theta} = (0, -y\cos\theta, -y\sin\theta)$$

上の結果を用いて、第一基本量 I と第二基本量 II の計算を行う。

$$I = \begin{pmatrix} S_t \cdot S_t & S_\theta \cdot S_t \\ S_t \cdot S_\theta & S_\theta \cdot S_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x')^2 + (y')^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

また、単位法線ベクトル ν は、

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{S_t \times S_\theta}{|S_t \times S_\theta|} \\ &= \frac{1}{y\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}(yy', -x'y\cos\theta, -x'y\sin\theta) \end{aligned}$$

と与えられるので

$$II = \begin{pmatrix} S_{tt} \cdot \nu & S_{\theta t} \cdot \nu \\ S_{t\theta} \cdot \nu & S_{\theta\theta} \cdot \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x''y' - x'y''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} & 0 \\ 0 & \frac{x'y}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \end{pmatrix}$$

のように表すことができる。

平均曲率 H は、$H = \frac{1}{2}tr(I^{-1}II)$ で定義されるので、上記の行列をこの式に当てはめる。

すると、

$$I^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x')^2 + (y')^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x')^2 + (y')^2}\frac{x''y' - x'y''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + \frac{1}{y^2}\frac{x'y}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\right) \\ &= \frac{1}{2y^2(\sqrt{(x')^2 + (y')^2})^3}\left\{y^2(x''y' - x'y'') + x'y((x')^2 + (y')^2)\right\} \\ &= \frac{y(x''y' - x'y'') + x'((x')^2 + (y')^2)}{2y(\sqrt{(x')^2 + (y')^2})^3} \qquad (1) \end{aligned}$$

のように計算できる。

このことから、曲線のパラメータ表示がわかれば回転面の平均曲率を (1) により計算できる。

次頁より、回転面の母線のパラメータ表示を求めてみたい。

1　楕円

回転させる楕円のパラメータ表示を $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ と置く。$a>b$ としても一般性を失うことはない。この楕円を直線 $x=a$ に沿って転がす事を考える。焦点の軌跡は直線 $x=a$ が x 軸となるように座標変換したものを考え、$\gamma(t)=(x(t),y(t))$ と置けるものとする。

焦点は一般に二つあるが、どちらの軌跡も平行移動により同じ曲線とみなせるので、特に焦点 $A(\sqrt{a^2-b^2},0)$ の軌跡を考える。特に誤解がなければ、以降焦点と表記した場合点 A を表すものとする。

さて、楕円上の点 $\mathrm{P}(a\cos t, b\sin t)$ が直線に接するまで転がった時に、焦点が変換後の座標上でどこにあるかを考えてみる。

点 P における接線を考えると、この線は点 P まで楕円を転がしたときの、座標変換後の x 軸とみなす事が出来る。この接線に対し、焦点から垂線を下ろし、垂線の長さを Y、垂線の足から点 P までの長さを X と置く。(X は、点 P における法線と焦点の距離と同じになるので、計算はこちらで行うことにする。)

また、点 $(a,0)$ から点 P までの楕円の弧の長さを L とおく。
すると、楕円を点 P が直線に接するまで転がした時の焦点の座標は $(L-X,Y)$ と表すことができる。

X、Y、L について、

$$\frac{dx}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$$

なので、

$$\begin{aligned} L &= \int_0^t \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}d\theta \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta \end{aligned}$$

となる。

また、点 P における接線は $(b\cos t)x+(a\sin t)y-ab=0$、点 P における法線は $(a\sin t)x-(b\cos t)y-(a^2-b^2)\sin t\cos t=0$ のように計算できるので、焦点 $A(\sqrt{a^2-b^2},0)$ との距離をそれぞれ求めると、

$$\begin{aligned} Y &= \frac{|b\cos t\sqrt{a^2-b^2}-ab|}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}} \\ &= \frac{b(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{|a\sin t\sqrt{a^2-b^2}-(a^2-b^2)\sin t\cos t|}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}} \\
&= \frac{\sqrt{a^2-b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)|\sin t|}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}
\end{aligned}
$$

のようになる。

焦点が描く軌跡は明らかに周期的であるから、楕円が一周する区間、つまり $-\pi \leq t \leq \pi$ で考えればよい。しかし、t が負となるときは座標の取り方が $(-(L-X), Y)$ のように変わるが（$\because$ X、Y、L は長さで定義しており、楕円が変換後の座標の負の方向に回転しているため）、上の L、X に負の値 t を代入すると、$L<0$ であり、$\sin t<0$ であるから、これらに t が負のときに付くマイナスの役割を委ねることにしてしまう。

以上より、焦点の座標は $-\pi \leq t \leq \pi$ において、
$(L-X, Y)=\gamma(t)=(x(t), y(t))$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta \\
&\quad -\frac{\sqrt{a^2-b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}} \\
y(t) &= \frac{b(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}
\end{aligned}
$$

と表記してよい。これが楕円の焦点の軌跡のパラメータ表示となっている。
一般にアンデュラリーと呼ばれる曲線である。

ここからこの軌跡の回転面の平曲曲率を求める。これを求めるには、(1) 式に以上の式を代入すればよい。
中途の計算は省くが、計算結果のみを挙げておく。

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{ab^2(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \\
y'(t) &= \frac{ab\sqrt{a^2-b^2}\sin t(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \\
x''(t) &= \frac{ab^2\sqrt{a^2-b^2}\sin t(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)(a-2\sqrt{a^2-b^2}\cos t)}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}} \\
y''(t) &= \frac{ab\sqrt{a^2-b^2}}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}\times \\
&\quad (\sqrt{a^2-b^2}(a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t\cos^2 t-b^2\sin^2 t\cos^2 t) \\
&\quad +ab^2\cos t-2a^3\cos t\sin^2 t+2ab^2\cos t\sin^2 t)
\end{aligned}
$$

ちなみに、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x'^2+y'^2} &= \frac{ab(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t} \\
x''y'-x'y'' &= -\frac{a^2b^3\sqrt{a^2-b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos t)^2\cos t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}
\end{aligned}
$$

となる。これらを (1) 式に代入すると、

$$
H=\frac{1}{2a}
$$

が導出される。

したがって、楕円を直線に沿って転がした時の焦点の軌跡の回転面の平均曲率は定数となる。

2 放物線

放物線を直線に沿って滑らないように転がすときを考える。ここで、その直線を x 軸とするように座標をとる。放物線の頂点と x 軸が接している状態を初期状態としておき、接点を原点としておく。

このとき、放物線の方程式は適当な定数 a を用いて $y = ax^2$ と表せる。

この放物線の焦点は、$(0, \frac{1}{4a})$ と表せる。

特に a が負となるときは、放物線を x 軸で折り返し、グラフを上半平面に移してやると、$y = -ax^2$ が $y = ax^2$ と同じ形であるため、$a > 0$ を考えればよいことがわかる。

この放物線を、放物線上の点 $\mathrm{P}(t, at^2)$ が x 軸に接するところまで転がしたときを考える。(この放物線は y 軸に関して対称であるから、t の値は $t \geq 0$ を考えれば十分である。)

点 P における接線を考えると、この線は点 P まで放物線を転がしたときの、直線そのものとみなす事が出来る。この接線に対し、焦点から垂線を下ろし、垂線の長さを Y、垂線の足から点 P までの長さを X と置く。

また、原点から点 P までの放物線の長さを L とおく。

以上のように放物線を点 P まで転がした時の焦点の座標は、$(L - X, Y)$ と表すことができる。

X、Y、L について、点 P における接線は $y = 2atx - at^2$、焦点を通る接線への垂線は $y = -\frac{x}{2at} + \frac{1}{4a}$ となる。ここから垂線の足を計算すると、座標が $(\frac{t}{2}, 0)$ とわかるので、$a > 0$、$t \geq 0$ を考慮すると、

$$X = \sqrt{(t - \frac{t}{2})^2 + (at^2 - 0)^2} = \frac{t}{2}\sqrt{1 + 4a^2t^2}$$

$$Y = \sqrt{(0 - \frac{t}{2})^2 + (\frac{1}{4a} - 0)^2} = \frac{1}{4a}\sqrt{1 + 4a^2t^2}$$

のように表せる。また、$y' = 2ax$ であるから、

$$L = \int_0^t \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_0^t \sqrt{1 + 4a^2x^2}dx$$

と表すことができる。

L の積分は、$u = 2ax + \sqrt{+4a^2x^2}$ により置換積分すると、$\frac{du}{2au} = \frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$ となり、$x = \frac{u^2-1}{4au}$ となるため、

$$L \quad = \quad \int_0^t \sqrt{1 + 4a^2x^2}dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{2at+\sqrt{1+4a^2t^2}} \frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}} \\
&= \int_1^{2at+\sqrt{1+4a^2t^2}} (1+\frac{(u^2-1)^2}{4u^2})\frac{du}{2au} \\
&= \frac{1}{8a}\int_1^{2at+\sqrt{1+4a^2t^2}} (u+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3})du \\
&= \frac{1}{8a}[\frac{u^2}{2}-\frac{u^{-2}}{2}+2\log u]_1^{2at+\sqrt{1+4a^2t^2}} \\
&= \frac{(2at+\sqrt{1+4a^2t^2})^2}{16a} - \frac{1}{16a(2at+\sqrt{1+4a^2t^2})^2} + \frac{1}{4a}\log(2at+\sqrt{1+4a^2t^2})
\end{aligned}$$

のようにできる。

ここで、$\frac{1}{2at+\sqrt{1+4a^2t^2}} = \sqrt{1+4a^2t^2} - 2at$ となるため、

$$L = \frac{t}{2}\sqrt{1+4a^2t^2} + \frac{1}{4a}\log(2at+\sqrt{1+4a^2t^2})$$

となる。

以上より、放物線を転がした後の焦点の座標 (X', Y') は、

$$\begin{aligned}
(X', Y') &= (L-X, Y) \\
&= (\frac{1}{4a}\log(2at+\sqrt{1+4a^2t^2}), \frac{1}{4a}\sqrt{1+4a^2t^2})
\end{aligned}$$

と表すことができる。

X' の式をを変形すると、

$$e^{4aX'} = 2at + \sqrt{1+4a^2t^2}$$

とでき、$\frac{1}{2at+\sqrt{1+4a^2t^2}} = \sqrt{1+4a^2t^2} - 2at$ なのだから、

$$e^{-4aX'} = \sqrt{1+4a^2t^2} - 2at$$

が成り立っている。これらを辺々足すと、

$$e^{4aX'} + e^{-4aX'} = 2\sqrt{1+4a^2t^2}$$

となるので、$Y' = \frac{1}{4a}\sqrt{1+4a^2t^2}$ より、

$$e^{4aX'} + e^{-4aX'} = 8aY'$$

$$Y' = \frac{e^{4aX'} + e^{-4aX'}}{2 \times 4a}$$

が成り立つ。

ゆえに、放物線の焦点の軌跡は

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, \frac{e^{4at} + e^{-4at}}{8a})$$

のようなパラメータ表示で表すことができる。更に、

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 \\ x''(t) &= 0 \\ y'(t) &= \frac{e^{4at} - e^{-4at}}{2} \\ y''(t) &= 2a(e^{4at} + e^{-4at}) \end{aligned}$$

(ちなみに、$(x')^2 + (y')^2 =$ となっている。) であるから、平均曲率 H を求めると（(1) 式に代入すると)、

$$\begin{aligned} H &= \frac{y(x''y' - x'y'') + x'((x')^2 + (y')^2)}{2y(\sqrt{(x')^2 + (y')^2})^3} \\ &= \frac{-\frac{e^{4at}+e^{-4at}}{8a} \times 2a(e^{4at} + e^{-4at}) + (1 + (\frac{e^{4at}-e^{-4at}}{2})^2)}{2\frac{e^{4at}+e^{-4at}}{8a} \times (\sqrt{1 + (\frac{e^{4at}-e^{-4at}}{2})^2})^3} \\ &= a \times \frac{4 + (e^{4at} - e^{-4at})^2 - (e^{4at} + e^{-4at})^2}{(e^{4at} + e^{-4at}) \times (\sqrt{1 + (\frac{e^{4at}-e^{-4at}}{2})^2})^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、平均曲率は恒等的に 0 となることがわかる。

3　双曲線

転がす双曲線は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ としても一般性を失わない。この双曲線を直線 $x=a$ に沿って転がす場合を考える。

さて、この双曲線上の点 P は無論上記の式を満たす。点 $(\pm a\cosh t, b\sinh t)$ は任意の t で上記の式を満たしているので、双曲線上にあることがわかる。この表記によって双曲線上の全ての点を表せることがわかるので、これをパラメータ表示として採用する。

双曲線上の点 $\mathrm{P}(\pm a\cosh t, b\sinh t)$ まで転がした時を考える。

双曲線には焦点が二つあるが、どちらの軌跡も平行移動を除き同じ曲線となるため、特に焦点 $(\sqrt{a^2+b^2},0)$ の軌跡を考えても一般性を失うことはない。考える焦点を固定すると、一般に点 P の x 座標の正負により描かれる曲線が異なるが、点 P の x 座標の値が負の時は、直線 $x=-a$ に沿って転がすものと考えるようにすればよい。（これは y 軸に関する折り返しにより、もう一方の焦点の軌跡を追いかけるのと同じ意味となっていることがわかる。）

（以下、複号同順とする。）

点 $(\pm a,0)$ から点 $\mathrm{P}(\pm a\cosh t, b\sinh t)$ までの弧長を L、点 P における接線と焦点 $(\sqrt{a^2+b^2},0)$ との距離を Y、点 P における法線と焦点 $(sqrta^2+b^2,0)$ との距離を X とおく。

すると、双曲線を転がしたときの焦点の軌跡は $(L-X,Y)$ と表すことができる。

接線の方程式は $(\pm b\cosh t)x-(a\sinh t)y-ab=0$、法線の方程式は $(\pm a\sinh t)x+(\cosh t)y-(a^2+b^2)\sinh t\cosh t=0$ であるから、各々計算すると、

$$\begin{aligned}L &= \int_0^t\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}d\theta\\ &= \int_0^t\sqrt{a^2\sinh^2\theta+b^2\cosh^2\theta}d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X &= \frac{|\pm a\sinh t\sqrt{a^2-b^2}-(a^2-b^2)\sinh t\cosh t|}{\sqrt{a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t}}\\ &= \frac{\sqrt{a^2-b^2}(a\mp\sqrt{a^2-b^2}\cos t)|\sinh t|}{\sqrt{a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y &= \frac{|\pm b\cosh t\sqrt{a^2-b^2}-ab|}{\sqrt{a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t}}\\ &= \frac{b(a\mp\sqrt{a^2-b^2}\cos t)}{\sqrt{a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t}}\end{aligned}$$

のようになる。t が負の部分では、座標の取り方が $(-(L-X), Y)$ となるが、$L<0$、$\sinh t<0$ となるため、楕円の時と同様に考えれば、任意の実数 t に対して、焦点の軌跡 $\gamma(t)=(x(t), y(t))$ は、

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \sqrt{a^2\sinh^2\theta + b^2\cosh^2\theta}d\theta \\
&\quad -\frac{\sqrt{a^2-b^2}(a\mp\sqrt{a^2-b^2}\cosh t)\sinh t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} \\
y(t) &= \frac{b(a\mp\sqrt{a^2-b^2}\cosh t)}{\sqrt{a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t}}
\end{aligned}
$$

のように与えることができる。

ここからこの軌跡の回転面の平曲曲率を求める。これを求める時も、やはり (1) 式に以上の式を代入すればよい。

計算結果のみを挙げておく。

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \pm\frac{ab^2(\sqrt{a^2+b^2}\cosh t\mp a)}{(a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}} \\
y'(t) &= \pm\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}\sinh t(\sqrt{a^2+b^2}\cosh t\mp a)}{(a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}} \\
x''(t) &= \pm\frac{ab^2\sqrt{a^2+b^2}\sinh t(\sqrt{a^2+b^2}\cosh t\mp a)(2\sqrt{a^2+b^2}\cosh t\mp a)}{(a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t)^{\frac{5}{2}}} \\
y''(t) &= \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t)^{\frac{5}{2}}}\times \\
&\quad (\sqrt{a^2+b^2}(-a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t-a^2\sinh^2 t\cosh^2 t-b^2\sinh^2 t\cosh^2 t) \\
&\qquad \mp ab^2\cosh t\pm 2a^3\cosh t\sinh^2 t\pm 2ab^2\cosh t\sinh^2 t)
\end{aligned}
$$

ちなみに、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x'^2+y'^2} &= \frac{ab(\sqrt{a^2-b^2}\cosh t\mp a)}{a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t} \\
x''y'-x'y'' &= -\frac{a^2b^3\sqrt{a^2-b^2}(\sqrt{a^2-b^2}\cosh t\mp a)^2\cosh t}{(a^2\sinh^2 t+b^2\cosh^2 t)^3}
\end{aligned}
$$

である。

これらを (1) 式に代入すると、

$$
H=-\frac{1}{2a}
$$

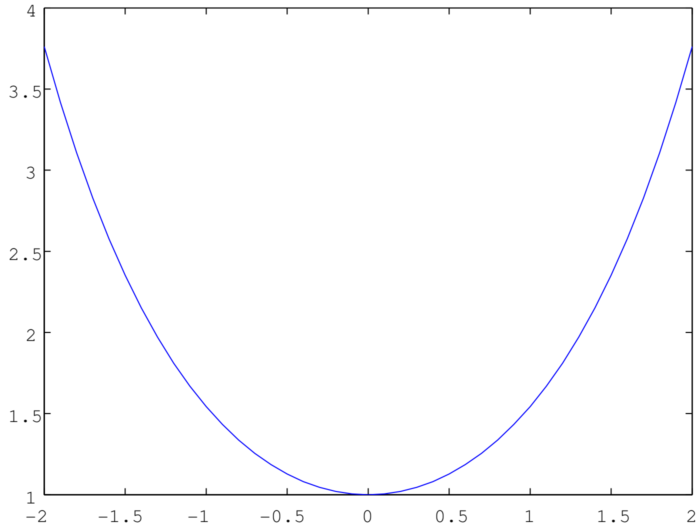
が導出され、確かに双曲線を直線に沿って転がしたときの焦点の軌跡による回転面の平均曲率は定数となる。

（注意）

ただし、これは t が有限の値を動くときのみ考えている。漸近線に限りなく近い部分まで転がした時は、焦点はある一点に収束するような動きを見せる。その点で上記の $\pm$ を反転させ、その点を始点に取れば、連続した曲線として定義できる。（一般に「ノーダリー」と呼ばれる曲線である。）

しかし以上の証明では、t が無限大となるような点においても平均曲率が一定であるのかをきちんと言えていないように思われる。上の議論では、転がしたときに直線と接している点の x 座標の正負によって、独立した二本の曲線とみなしていたので、それらの接合点にあたる部分を如何に考えるかをきちんと議論せねばならないだろう。

母線の図示は放物線のみ、カテナリーなので、



放物線での結果に $a = 1$ を代入し、
区間 $-2 \leq x \leq 2$ で分点 40 として描いた図
(使用ソフトウェア:MATLAB)

のようにに図示できたが、アンデュラリーとノドラリーの図示がどうもうまくいきませんでした。