平成 21 年 7 月 29 日
MMA 講究 A レポート

MMA 講究 A 最終レポート

酒井 椋三　　2MA09057E

平均曲率を周期関数 $H(s)$ で与えられた回転面が周期的になる条件について考察し、与えられた周期関数 $H(s)$ を平均曲率にもつ周期的な回転面を描くことを考えたい。

xz 平面上の平面曲面 $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ を x 軸の回りに回転して得られる回転面 $f_\gamma(\theta, s) = (x(s), z(s)\cos\theta, z(s)\sin\theta)$ が周期的であるとは、

$$x(s+L) = x(s) + a \tag{1}$$
$$z(s+L) = z(s) \tag{2}$$

となるような定数 L と実数 a が存在することである。

さて、以下のような定理がある。

定理 1（前田 [1]）

弧長 s によってパラメータづけられた xz 平面上の平面曲面 $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ を x 軸の回りに回転して得られる回転面 f_γ の平均曲率が $H(s)$ ならば、曲率 $2H(s)$ の平面曲線 $\sigma(s) = (\xi(s), \eta(s))$ が存在し、σ を用いて、

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^{s} \frac{\xi'(u)\eta(u) - \xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2 + (\eta(u))^2}} du + c \\ z(s) &= \sqrt{(\xi(s))^2 + (\eta(s))^2} \end{aligned}$$

と書ける。ただし、c は定数である。

逆に、このようにして得られる曲線 $\gamma(s) = (x(s), z(s))$ から得られる回転面 f_γ の曲率は $H(s)$ となる。

この定理 1 について、$H(s)$ を周期 L の周期関数で与えると、$2H(s)$ も周期 L の周期関数となるので、平面曲線 σ は曲線論の基本定理の一意性から、ある $A \in SO(2)$ と $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ が存在し、

$$\sigma(s+L) = A\sigma(s) + \boldsymbol{b}, \quad {}^\forall s \tag{3}$$

が成り立つ。（σ は周期 L をもつ。）

定理 1 より、γ は σ から導かれるので、γ が式 (1)(2) を満たす σ の条件を考えてみる。

式 (3) を満たすような $\sigma(s) = (\xi(s), \eta(s))$ を考えると、式 (3) は、

$$\begin{pmatrix} \xi(s+L) \\ \eta(s+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

（α、b_1、b_2 は定数）とできるので、

$$\xi(s+L) = \xi(s)\cos\alpha - \eta(s)\sin\alpha + b_1 \tag{4}$$
$$\eta(s+L) = \xi(s)\sin\alpha + \eta(s)\cos\alpha + b_2 \tag{5}$$

が成り立つ。式 (2) は定理 1 より、

$$\sqrt{(\xi(s+L))^2+(\eta(s+L))^2}=\sqrt{(\xi(s))^2+(\eta(s))^2}$$

と表せるので、これに (4)(5) を代入して両辺を二乗し、整理すると、

$$2(b_1\cos\alpha+b_2\sin\alpha)\xi(s)+2(-b_1\sin\alpha+b_2\cos\alpha)\eta(s)+({b_1}^2+{b_2}^2)=0 \quad (6)$$

のようになる。

式 (6) を満たす $\sigma(s)=(\xi(s),\eta(s))$ は、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ のとき、ある直線を表す式となる。直線の曲率は恒等的に 0 なので、定理 (1) の σ を直線で与えるには、$H(s)\equiv 0$ としなければならない。

よって、周期関数 $H(s)$ を $H(s)\not\equiv 0$ で与えたとすれば、式 (6) を満たすためには $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ を満たさねばならない。

式 (4)(5) から、ξ' と η' は

$$\begin{aligned}\xi'(s+L) &= \xi'(s)\cos\alpha-\eta'(s)\sin\alpha\\ \eta'(s+L) &= \xi'(s)\sin\alpha+\eta'(s)\cos\alpha\end{aligned}$$

と表せることがわかる。ここで $\boldsymbol{b}=0$ であるとき、

$$\xi'(s+L)\eta(s+L)-\xi(s+L)\eta'(s+L)=\xi'(s)\eta(s)-\xi(s)\eta'(s)$$

が成り立つので、

$$\frac{\xi'(u)\eta(u)-\xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2+(\eta(u))^2}}$$

は周期 L の周期関数となっている。

ゆえに、式 (1) と定理 1 から導かれる、

$$\begin{aligned}x(s+L)-x(s) &= \int_{s_0}^{s}\frac{\xi'(u)\eta(u)-\xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2+(\eta(u))^2}}du\\ &\qquad -\int_{s_0}^{s+L}\frac{\xi'(u)\eta(u)-\xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2+(\eta(u))^2}}du\\ &= \int_{s}^{s+L}\frac{\xi'(u)\eta(u)-\xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2+(\eta(u))^2}}du\end{aligned}$$

は被積分関数の周期性より、

$$x(s+L)-x(s)=\int_0^L\frac{\xi'(u)\eta(u)-\xi(u)\eta'(u)}{\sqrt{(\xi(u))^2+(\eta(u))^2}}du=a$$

とできる。(a は定数)

つまり、γ が定理 1 のように表示されているときは、回転面 f_γ が周期的である条件は (2) だけで必要十分であることがわかる。

したがって、以下の補題を得る。

補題 2
曲線 σ が周期的な曲率（$\not\equiv 0$）を持つとき、ある $A \in SO(2)$ と $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ が存在し、$\sigma(s+L) = A\sigma(s) + \boldsymbol{b}$ とできる。このとき、定理 1 により σ から得られる回転面 f_γ が周期的である条件は、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である。

ここで、次のような状況を考える。
曲率がともに周期が L の周期関数 $2H(s)$ で与えられている二本の曲線 $\sigma_1(s)$、$\sigma_2(s)$ を用意する。これらから作られる回転面が周期的である時、補題 2 より、ある $A_1, A_2 \in SO(2)$ が存在し、

$$\begin{aligned} \sigma_1(s+L) &= A_1\sigma_1(s) & (7) \\ \sigma_2(s+L) &= A_2\sigma_2(s) & (8) \end{aligned}$$

となっている。また一般に、同じ曲率を持つ曲線は回転と平行移動を除き一意に表すことが出来るので、（∵曲線論の基本定理の一意性より）ある $M \in SO(2)$ と $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^2$ が存在し、

$$\sigma_2(s) = M\sigma_1(s) + \boldsymbol{v} \tag{9}$$

が成り立っている。式 (8) を式 (7)(9) を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \sigma_2(s+L) &= A_2\sigma_2(s) \\ M\sigma_1(s+L) + \boldsymbol{v} &= A_2(M\sigma_1(s) + \boldsymbol{v}) \\ M\sigma_1(s+L) &= A_2M\sigma_1(s) + A_2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \\ \sigma_1(s+L) &= M^{-1}A_2M\sigma_1(s) + M^{-1}(A_2 - I)\boldsymbol{v} \\ \sigma_1(s+L) &= A_2\sigma_1(s) + M^{-1}(A_2 - I)\boldsymbol{v} & (10) \end{aligned}$$

となる（I は単位行列である。）。式 (7)(10) を見比べると、

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 & (11) \\ (A_2 - I)\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0} & (12) \end{aligned}$$

が成り立つ。

もし $A_1 = A_2 \neq I$ であれば式 (12) から、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる。式 (9) より $\sigma_2(s) = M\sigma_1(s)$ が成り立つので、σ は回転を除いて唯一つ存在するといえ

る。

また、もし $A_1 = A_2 = I$ であれば、σ は閉曲線となる。この時、$^\forall M \in SO(2)$、$^\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して、式 (12) を満たすので、σ が閉曲線であれば、σ をどのように回転や平行移動しても、対応する回転面は周期的になるといえる。

以上の考察と補題 2 より、次の定理が導かれる。

定理 3

周期 L を持つ周期関数 $H(s)$ と、$2H(s)$ を曲率に持つ平面曲線 $\sigma(s)$ を一つとる。さらに、$\sigma(s+L) = A\sigma(s) + \boldsymbol{b}$ となるように $A \in SO(2)$ と $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ をとる。すると、

1 もし $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ ならば、
対応する回転面に周期的なものは存在しない。

2 もし $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かつ $A \neq I$ ならば、
曲率 $2H$ をもつ曲線のうち、対応する回転面を周期的にするものが、
回転を除き唯一つ存在する。

3 もし $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かつ $A = I$、すなわち σ が閉曲線であれば、
対応する回転面は全て周期的となる。

曲面論の基本定理（梅原, 山田 [2]）より、弧長パラメータ s により曲線 $\sigma(s)$ の平均曲率が $\kappa(s)$ と表せているとき、$\sigma(s)$ は回転と平行移動を除いて、

$$\sigma(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du, \int_{s_0}^{s} \sin(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \right)$$

と表すことができる。

さて、σ が $\sigma(s+L) = A\sigma(s) + \boldsymbol{b}$ を満たす時、両辺を s で微分すると、$\sigma'(s+L) = A\sigma'(s)$ が成り立つ。この式を、$^\forall A \in SO(2)$ が $^\exists \alpha \in \boldsymbol{R}$ によって、

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

と表せることに注意して変形すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\int_{s_0}^{s+L} \kappa(t)dt) \\ \sin(\int_{s_0}^{s+L} \kappa(t)dt) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt) \\ \sin(\int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt) \\ \sin(\alpha + \int_{s_0}^{s} \kappa(t)dt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、

$$\alpha = \int_s^{s+L} \kappa(t)dt + 2\pi n \qquad (n \in \boldsymbol{Z}) \tag{13}$$

であることがわかる。特に曲率 κ が周期 L の周期関数であれば、式 (13) は任意の s で同じ値をとる。また、$\boldsymbol{b} = \sigma(s+L) - A\sigma(s)$ なので、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} \int_{s_0}^{s+L} \cos(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \\ \int_{s_0}^{s+L} \sin(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \end{pmatrix} \\
&\qquad - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{s_0}^{s} \cos(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \\ \int_{s_0}^{s} \sin(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_{s_0}^{s+L} \cos(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du - \int_{s_0}^{s} \cos(\alpha + \int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \\ \int_{s_0}^{s+L} \sin(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du - \int_{s_0}^{s} \sin(\alpha + \int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_{s_0}^{s+L} \cos(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du - \int_{s_0+L}^{s+L} \cos(\int_{s_0}^{x} \kappa(t)dt)dx \\ \int_{s_0}^{s+L} \sin(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du - \int_{s_0+L}^{s+L} \sin(\int_{s_0}^{x} \kappa(t)dt)dx \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_{s_0}^{s_0+L} \cos(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \\ \int_{s_0}^{s_0+L} \sin(\int_{s_0}^{u} \kappa(t)dt)du \end{pmatrix} \qquad (14)
\end{aligned}$$

とできる。

今、$2H(s)$ は周期 L の周期関数であるから、$\kappa = 2H$ を式 (13)(14) に代入して得られる

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2\int_s^{s+L} H(t)dt \quad (= const) \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} \int_{s_0}^{s_0+L} \cos(2\int_{s_0}^{u} H(t)dt)du \\ \int_{s_0}^{s_0+L} \sin(2\int_{s_0}^{u} H(t)dt)du \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を用いて、定理 3 を $A = I \Leftrightarrow \alpha = 2\pi m$（$m$ は整数）と読み替えて利用する。

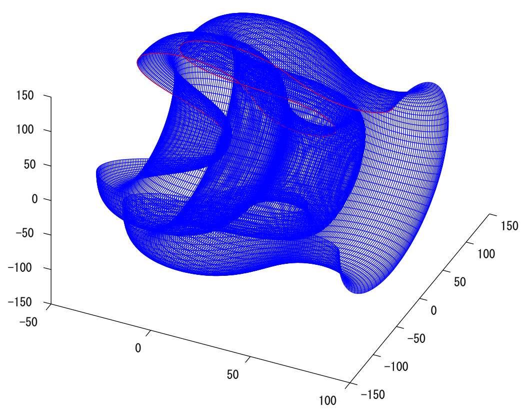
今回は MATLAB を用いて描画した。

例 1 $H(s) = \cos s$

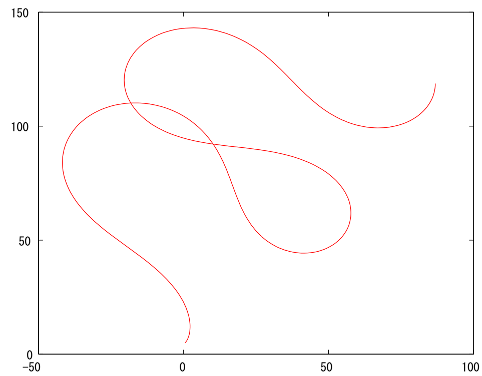
周期は 2π であり、$\alpha = 0$ である。

しかし $s_0 = 0$ とすると、$\boldsymbol{b} = (1.4067, 0) \neq \mathbf{0}$ であるから、$s_0 = 0$ のときはこの回転面は周期的ではないとわかる。

実際に描画すると、以下のようになる。



$s_0 = 0$、$0 \leq s \leq 6\pi$、$-\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とした。
$(\xi(0), \eta(0)) = (3, 3)$ とし、分点 513、回転方向 61 分割で描画。
赤線が母線である。



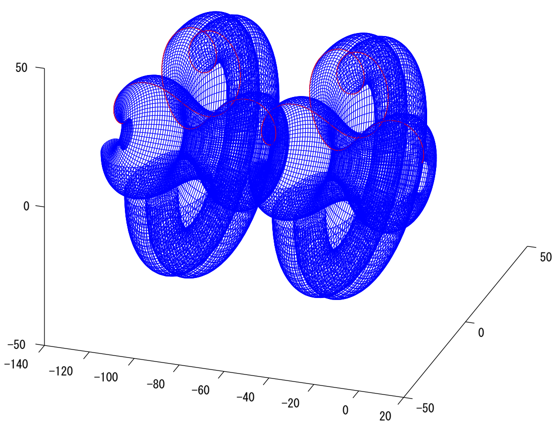
$s_0 = 0$、$0 \leq s \leq 6\pi$、分点 513 で描画。上図の母線である。

1 周期ごとに回転半径が徐々に増えていっているのがわかる。これは回転面が周期的でないことを意味している。

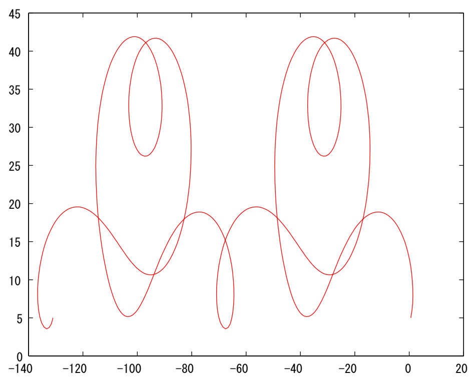
以下 $s_0 = 0$ とし、実験的に試行を重ね、様々な回転面を作ってみた。

例 2 $H(s) = 2.760039 \times \cos s$

このように $H(s)$ を定義すると、
周期は 2π となる。また、$\alpha = 0$ であり、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となる。
ゆえに、この回転面は s_0 をどのようにとっても周期的である。

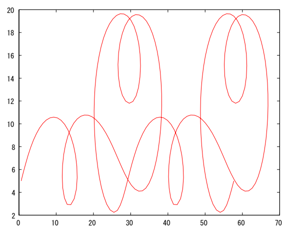


$s_0 = 0$、$0 \leq s \leq 4\pi$、$-\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とした。
$(\xi(0), \eta(0)) = (3, 3)$ とし、分点 513、回転方向 61 分割で描画。
赤線が母線である。



$s_0 = 0$、$0 \leq s \leq 4\pi$、分点 513 で描画。上図の母線である。

ちなみに、$s_0 = 2$ でやると、母線は下図のようになり、

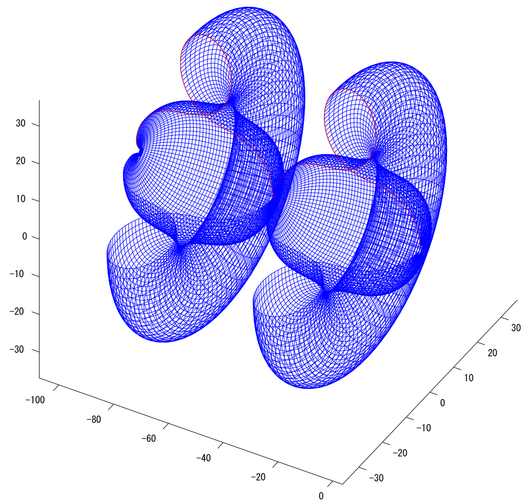


$0 \leq s \leq 4\pi$、$(\xi(0), \eta(0)) = (3, 3)$、分点 513 で描画。

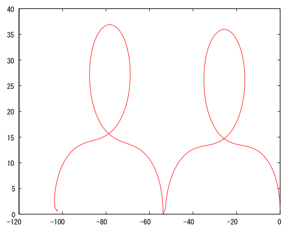
やはり周期的である。

例 3 $H(s) = 1.5916 \times \cos s + 0.20$

このように $H(s)$ を定義すると、周期は 2π ある。
この時、$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ となるが、$A \neq I$ である。
この回転面は $s_0 = 0$ の時のみ周期的で、それ以外では周期的でない。
（s_0 が変化すると、σ が平行移動するため。）

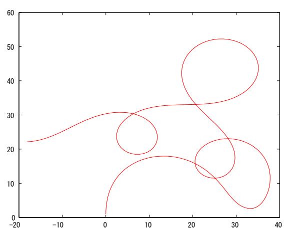


$s_0 = 0$、$0 \leq s \leq 4\pi$、$-\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とした。
$(\xi(0), \eta(0)) = (3, 3)$ とし、分点 513、回転方向 61 分割で描画。
赤線が母線である。



$0 \leq s \leq 4\pi$、$(\xi(0), \eta(0)) = (0, 0)$、分点 257 で描画。

ちなみに、$s_0 = 2$ でやると母線は下図のようになり、

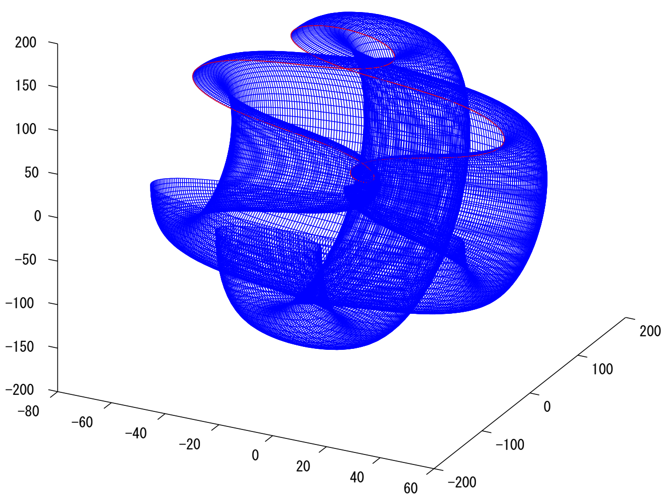


$0 \leq s \leq 4\pi$、分点 257 で描画。

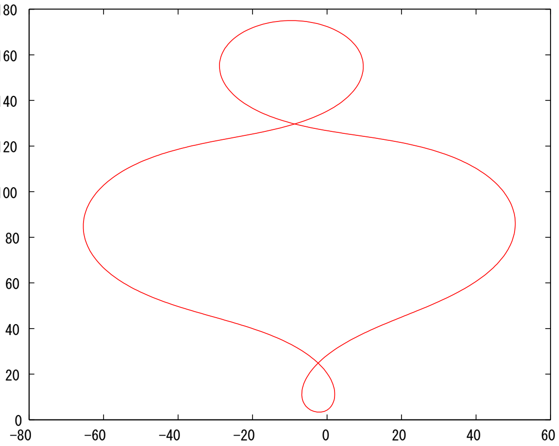
周期的ではない。

例 4 $H(s) = 0.94705 \times \cos s + 0.25$

このように $H(s)$ を定義すると、周期は 2π であるが、
$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かつ、$\alpha = \pi$ となる。
しかし、周期 4π だと思うと、
$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かつ、$\alpha = 2\pi$ となる。



$s_0 = 0$、$0 \leq s \leq 4\pi$、$-\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とした。
$(\xi(0), \eta(0)) = (3, 3)$ とし、分点 513、回転方向 61 分割で描画。
赤線が母線である。



$s_0 = 0$、$0 \leq s \leq 4\pi$、分点 513 で描画。上図の母線である。

$s = 4\pi$ で線が元の場所に戻ってきた。

参考文献

[1] 前田俊一「あたえられた平均曲率をもつ回転面の構成について」, 修士学位論文,2003, 九州大学数理学府

[2] 梅原雅顕・山田光太郎 共著「曲線と曲面-微分幾何的アプローチ-」裳華房,2002,P21