2010 年 10 月 5 日 (2010 年 10 月 6 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第二講義資料 1

お知らせ

- 単位が必要な方は「講義概要」の指示にしたがって，今回分の提出物を提出してください．
- 重要なポインタ
  - http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2010/geom2/ (この授業の公式ページ)
  - http://www.official.kotaroy.com/class/2010/geom2/ (この授業のページ; ミラーサイト)
  - http://www.ocw.titech.ac.jp/ (東工大 OCW)
  - kotaro@math.titech.ac.jp (山田の電子メイル)
  - 本館 2 階 231 (山田の部屋；提出物ポストはここ)
- 講義概要

講義の目的　3 次元ユークリッド空間の極小曲面の古典的な理論（の一部）を解説する．その道筋に現れる微分幾何学や解析学の風景を眺め，学部で学んだ様々な数学が交錯する場面を体感してほしい．

教科書・参考書など　よく書かれた極小曲面論の参考書として R. Osserman, A survey of minimal surfaces, (Dover 1986) を挙げておきますが，必要な文献はその都度紹介します．

必要な予備知識　ユークリッド空間の曲面の微分幾何，多様体の初歩複素解析の基本事項，常微分方程式論の基本事項（とくに線形方程式に関すること）は既知としたいのですが，受講者の状況によっては復習をしながら講義を行います．

成績評価の方法　毎回の提出物で評価します．内容は

- その回の講義資料の末尾にある問題のうちの一つに対する解答，
- 講義内容に関する質問あるいは誤りの指摘

です．

提出方法　所定の用紙（授業で配布しますが，web ページ上にもおいておきます）に記入し，授業の翌日**水曜日の 17 時**までに山田の部屋（本館 2 階 231）の前のポストに提出してください．なお，所定の用紙と異なる形式のものは受け付けません．ご了承ください．用紙の追加も不可です．

注意　いただいた質問にはできる限り回答します．なお，質問および回答の内容は原則として公開しますのでご了承下さい．とくに質問の文章はできる限り原文を尊重しますので，誤字に気をつけてください．

おまけ　授業に関する感想，意見などがありましたら，提出用紙/電子メイルに付記してください．なお，これらが成績に影響することは一切ありません．もしそのような疑いがある場合は申し出てください．いただいた御意見は個人が特定できない形で公開することをお含み置き下さい．

1 面積最小の曲面

1.1 曲面

この講義では，2 次元多様体 Σ から 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ へのはめこみ $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を**曲面**とよぶ．多様体 Σ の局所座標系 $(U; u^1, u^2)$ をとれば，f は $\boldsymbol{R}^2$ の領域 U から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像と思うことができる．とくに f が**はめこみ**である，とは，各点 p において

$$\frac{\partial f}{\partial u^1}(p) \quad \text{と} \quad \frac{\partial f}{\partial u^2}(p) \qquad \text{が一次独立} \tag{1.1}$$

が成り立つことと同値である．

点 $p \in \Sigma$ に対して

$$V_p := f_*(T_p\Sigma) = \operatorname{Span}\left\{\frac{\partial f}{\partial u^1}(p), \frac{\partial f}{\partial u^2}(p)\right\} \tag{1.2}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間をあたえる．これを p における曲面 f の**接平面**とよぶ．すると，V_p の直交補空間は $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次元部分空間となるが，その単位ベクトル $\nu(p)$ を曲面 f の p における**単位法ベクトル**という．

単位法ベクトルのとりかたは二通りあるが，とくに Σ が向きづけられているとき，向きに同調した局所座標 (u^1, u^2) に対して

$$\nu(p) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u^1}(p) \times \dfrac{\partial f}{\partial u^2}(p)}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial u^1}(p) \times \dfrac{\partial f}{\partial u^2}(p)\right|} \tag{1.3}$$

であたえられるものを**向きに同調した単位法ベクトル**という．ただし “$\times$” は $\boldsymbol{R}^3$ の**ベクトル積**である．

単位法ベクトルは，局所的には p に関して滑らかにとることができる．さらに $|\nu(p)| = 1$ だから，ν は曲面（の定義域）から単位球面 S^2 への写像をあたえることになる．この写像を**単位法線ベクトル場**または**ガウス写像**とよぶ．とくに Σ が向き付け可能なときは，向きに同調した単位法線ベクトル場が Σ 全体で滑らかに定義できる．

■第一基本形式または誘導計量　曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を考え，$(u, v) = (u^1, u^2)$ を Σ の局所座標系とする．このとき

$$ds^2 := df \cdot df = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,du^i\,du^j \tag{1.4}$$

を f の**第一基本形式** または **誘導計量** とよぶ．ただし “$\cdot$” は $\boldsymbol{R}^3$ の標準的な内積で，

$$E = f_u \cdot f_u, \quad F = f_u \cdot f_v, \quad G = f_v \cdot f_v, \qquad g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u^j} \quad (i, j = 1, 2)$$

である．とくに ds^2 は局所座標系のとりかたによらない．以下

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = (g_{ij}) \qquad (g_{12} = g_{21})$$

2010 年 10 月 5 日 (2010 年 10 月 6 日訂正)

と書き，第一基本行列とよぶ．これは正値な対称行列である．

第一基本形式 ds^2 は Σ の各点での接空間に内積をあたえる：

$$X = X_1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p + X_2\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)_p, \quad Y = Y_1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p + Y_2\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)_p \in T_p\Sigma$$

$$\text{に対して}\quad ds^2(X,Y) = \langle X, Y\rangle := \sum g_{ij}(p)X_iY_j.$$

これにより (Σ, ds^2) は 2 次元の**リーマン多様体**となる．

第一基本形式から定まる曲面の不変量を**内的な量**という．

■第二基本形式　曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の単位法線ベクトル場 ν があたえられているとき，

$$II := -df \cdot d\nu = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\,du^i\,du^j \tag{1.5}$$

を f の**第二基本形式**という．ただし，

$$h_{ij} = -\frac{\partial f}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}\cdot \nu, \qquad L = h_{11}, \quad M = h_{12} = h_{21}, \quad N = h_{22}$$

である．単位法線ベクトル場をひとつ固定しておけば，第二基本形式は座標変換で不変である．もし，単位法線ベクトル場を (1.3) で（(u^1, u^2) が定める向きに同調するように）定めるならば，向きを保つ座標変換で不変であるが，向きを反転するような座標変換では，符号が反転する．以下

$$\widehat{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = (h_{ij}) \qquad (h_{12} = h_{21})$$

と書き，第二基本行列とよぶ．

■ワインガルテン方程式・ガウス曲率と平均曲率　多様体 Σ の局所座標系 $(\Sigma; u^1, u^2)$ をとり，曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の単位法ベクトル場を ν とすると，各点 $p \in U$ に対して

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial u^1}(p), \quad \frac{\partial f}{\partial u^2}(p), \quad \nu(p)\right\} \tag{1.6}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の基底をあたえる．これを**ガウス枠**とよぶ．

記号． 記号を簡単にするために $\partial f/\partial u^j$ のことを f_j と書く．また，正値対称行列 $\widehat{I} = (g_{ij})$ の逆行列を (g^{ij}) で表す．逆行列の定義から

$$\sum_{k=1}^{2} g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \qquad (\text{クロネッカーの } \delta \text{ 記号})$$

が成り立つ．

補題 1.1 (ワインガルテン方程式)**.** 以上の状況のもと，

$$\frac{\partial \nu}{\partial u^j} = -\sum_{k=1}^{2} A^k_j f_k \qquad \text{ただし}\quad A^k_j = \sum_{l=1}^{2} g^{kl} h_{lj}$$

が成り立つ．

証明： ガウス枠 (1.6) を用いて

$$\nu_j = \sum_{k=1}^{2} a_j^i f_i + c_j \nu$$

と書く．ここで $\nu \cdot \nu = 1$ を微分すれば ν_j が ν と直交することがわかるので，$c_j = 0$．さらに，この式の両辺に f_l を内積すると

$$-h_{lj} = f_l \cdot \nu_j = \sum_k a_j^i f_l \cdot f_i = \sum_k a_j^i g_{li}.$$

この両辺に g^{kl} をかけて l について和をとると結論が得られる．

補題 1.1 より ν の微分は曲面に接する成分しか持たない．すなわち各 $X \in T_p\Sigma$ に対して $\nu_* X \in f_*(T_p\Sigma)$．ここで，はめこみの条件から $f_* \colon T_p\Sigma \longrightarrow V_p = f_*(T_p\Sigma)$ は全単射であるから，各 $X \in T_p\Sigma$ に対して

$$\nu_* X = -f_*(A_p X) \qquad \text{となるような線型写像} \quad A_p \colon T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$$

が存在する．この A_p を**ワインガルテン作用素**または**型作用素**という．

補題 1.1 で表れた行列 (A_k^j) はワインガルテン作用素の基底 $\{\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^2\}$ に関する表現行列である．とくに

$$\widehat{A} := (A_k^j) = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{II} \tag{1.7}$$

が成り立つ．

注意 1.2. 接空間 $T_p\Sigma$ の，計量 ds^2 に関する正規直交基に関する A_p の表現行列は対称行列になる．したがって A_p の固有値は実数である．

定義 1.3. ワインガルテン作用素 A_p の固有値 $\lambda_1(p)$, $\lambda_2(p)$ を曲面の p における**主曲率**，それらの積と平均を，曲面の p におけるガウス曲率，平均曲率とよび，$K(p)$, $H(p)$ と書く：

$$K(p) = \lambda_1(p)\lambda_2(p) = \det(A_k^j), \qquad H(p) = \frac{1}{2}\bigl(\lambda_1(p) + \lambda_2(p)\bigr).$$

ガウス曲率，平均曲率は，(1.7) の行列 $\widehat{A}$ を用いて

$$K = \det \widehat{A}, \qquad H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\widehat{A}$$

と表される．

■面積 曲面 $f\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の面積を次のように定義する：多様体 Σ 上の座標系 (u, v) に対して

$$dA = dA_f = |f_u \times f_v|\,du\,dv = |\det(f_u, f_v, \nu)|\,du\,dv = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{1.8}$$

を**面積要素**という．ただし，(f_u, f_v, ν) は 3 つの列ベクトルを並べてできる 3 次正方行列とみなしている．別の座標系 (ξ, η) に対して，同じ量を計算すると，

$$d\widetilde{A} := |\det(f_\xi, f_\eta, \nu)| = |J|\,|\det(f_u, f_v, \nu)| \qquad J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} = \det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

である．すると，座標系 (u, v), (ξ, η) で覆われている Σ 上の領域 U に対して

$$\int d\widetilde{A} = \int |\det(f_\xi, f_\eta, \nu)|\,d\xi\,d\eta = \int |\det(f_u, f_v, \nu)|\,|J|\,d\xi\,d\eta = \int |\det(f_u, f_v, \nu)|\,du\,dv = \int dA$$

となる．ただし，積分は (u, v) 平面，または (ξ, η) 平面上の U に対応する領域上で行う．このことから，dA の積分は座標のとりかたによらないということがわかる．

そこで，多様体 Σ 上の相対コンパクトな領域 D に対して

$$A_f(D) = \int_D dA, \tag{1.10}$$

を $f(D)$ の**面積**と定義する．右辺の積分は，適当な座標系に関して面積要素 (1.8) をとって計算するものとする．D が一枚の座標系に覆われていないときは，適当に D を分割して計算すればよい．

1.2 面積最小の曲面

針金を張る石鹸膜の形は，針金を境界にもつ曲面のうち，最小の面積をもつものになる．このような曲面の平均曲率が恒等的に 0 になることを示したい．

■面積汎関数　$\boldsymbol{R}^3$ の単純閉曲線とは，自己交叉をもたない正則曲線 $\gamma\colon S^1 \to \boldsymbol{R}^3$ のことである．$S^1 = \{e^{\sqrt{-1}t} \,|\, t \in \boldsymbol{R}\}$ と表せば $\gamma = \gamma(t)$ と周期 2π の関数とみなすことができる．

単位円板 $D = \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 < 1\}$ の閉包を $\overline{D}$ と書く．単純閉曲線 $\gamma\colon S^1 \to \boldsymbol{R}^3$ をはる曲面とは，なめらかな写像

$$f\colon \overline{D} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3 \qquad \text{で} \qquad f(\partial D) = \gamma(S^1) \qquad \text{となるもの} \tag{1.11}$$

のこととする．この意味で $\mathcal{S}_\gamma :=$ 単純閉曲線 γ を境界にもつ曲面全体の集合，とする．

■面積汎関数　すると，$\mathcal{S}_\gamma$ 上の関数

$$\mathcal{A}\colon \mathcal{S}_\gamma \ni f \longmapsto \mathcal{A}(f) = \int_D dA_f \in \boldsymbol{R}$$

が定義される．これを**面積汎関数**という．

■変分　面積汎関数の最小を考えるために，その「微分」を求めたい．

定義 1.4. 曲面 $f \in \mathcal{S}_\gamma$ の**変分**とは，なめらかな写像

$$F\colon \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (x, t) \longrightarrow F(x, t) = f_t(x) \in \boldsymbol{R}^3$$

で，各 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $f_t \in \mathcal{S}_\gamma$，かつ $f_0 = f$ を満たすことである．このとき，

$$\boldsymbol{v}(p) := \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} F(p, t) \qquad p \in \overline{D}$$

を，変分 $F = \{f_t\}$ の**変分ベクトル場**とよぶ．

補題 1.5. 曲面 $f \in \mathcal{S}_\gamma$ の変分 F の変分ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は，∂D で曲線 $\gamma(S^1)$ に接する．

定理 1.6. 曲面 $f \in \mathcal{S}_\gamma$ の変分 $F = \{f_t\}$ の変分ベクトル場を $\boldsymbol{v}$ とするとき，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{A}(f_t) = -2 \int_D H_f \bigl(\boldsymbol{v} \cdot \nu\bigr)\, dA_f$$

となる．ただし ν は曲面 f の単位法線ベクトル場である．

極小曲面

定理 1.7. 曲面 $f\colon \overline{D} \to \boldsymbol{R}^3$ が，単純閉曲線 $\gamma\colon S^1 \to \boldsymbol{R}^3$ を張る曲面の中で最小の面積を持つならば，f の平均曲率は恒等的に 0 である．

証明. 曲面 f が $\mathcal{S}_\gamma$ のなかで最小の面積をもつとすると，任意の f の変分 $F = \{f_t\}$ に対して $\mathcal{A}(f_t) \leqq \mathcal{A}(f) = \mathcal{A}(f_0)$ だから，

$$\text{任意の } f \text{ の変分 } F = \{f_t\} \text{ に対して} \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(f_t) = 0$$

が成り立つ．したがって，任意の変分に対して

$$\int_D H\big(\boldsymbol{v}\cdot\nu\big)\,du\,dv = 0$$

が成り立つ．ここで $H(p) = \varepsilon > 0$ $(p \in D)$ とし，p の δ-近傍 $U_\delta(p)$ を $U_\delta(p) \subset D$ かつその近傍上で $H(p) > \varepsilon/2$ が成り立つようにとっておく．ここで $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^∞-級関数 ψ で

$$\psi \begin{cases} = 0 & (\boldsymbol{R}^2 \setminus U_\delta(p) \text{ 上で}) \\ > 0 & (U_\delta(p) \text{ 上で}) \end{cases}$$

となるものをとり，

$$f_t = f + t\psi\nu$$

とおけば，$\{f_t\}$ は f の変分でその変分ベクトル場は $\psi\nu$ であるから

$$\int_D H\big(\boldsymbol{v}\cdot\nu\big)\,dA = \int_{U_\delta(p)} H\psi\,dA \geqq \int_{U_\delta(p)} \frac{\varepsilon}{2}\psi\,dA > 0$$

となり，最小性に矛盾する．$H(p) < 0$ としても同様に矛盾が導けるから，$H \neq 0$ なる点は存在しない． □

定義 1.8. 平均曲率が恒等的に 0 となるような曲面を**極小曲面**という．

参考文献

[1] 梅原雅顕・山田光太郎「曲線と曲面」(裳華房).
ガウス曲率・平均曲率の定義は 8 節，ワインガルテン方程式は練習問題 11.

[2] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, 1969/1986, Diver Publications.
面積最小の曲面に関しては §3.

問題

1-1 次で表される曲面は極小曲面であることを示しなさい．

(1) 平面.

(2) xy 平面上の $y = \cosh x$ で表される曲線を x 軸のまわりに回転させて得られる曲面（懸垂面).

1-2 $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義されたなめらかな関数 $\varphi\colon D \to \boldsymbol{R}$ のグラフが極小曲面となるための φ の条件を求めなさい．